Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*, **Reihe VII, Band 5. Mathematische Schriften, 1674–1675** Infinitesimalrechnung.

Die folgenden Handschriften von Leibniz zur Infinitesimalrechnung wurden am Leibniz-Archiv Hannover bearbeitet. Von Frau Sefrin-Weis (September 2003 bis September 2004) wurden die Stücke 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 22, 24. bearbeitet. Herr Mayer (ab Oktober 2004) bearbeitete die Stücke 25, 26, 27, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39. Während der Einarbeitungszeit stand Siegmund Probst, der seinerseits die Stücke 9, 10, 18, 19, 20, 21, 23, 28, 29, 33, 42 und 43 bearbeitete, jeweils Frau Sefrin-Weis und Herrn Mayer beratend zur Seite. Für die Erfassung der Stücke ist Susanne Bawah zu danken. Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino (Massachusetts) und Dominik Wujastyk (London) entwickelten TEX-Macropakets EDMAC erstellt worden. Die Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in TEX weiter bearbeitet.

Inhaltsverzeichnis:

INHALTSVERZEICHNIS

INFINITESIMALRECHNUNG 1674–1675

INFINITESIMALRECHNUNG 1674–1675

1. METHODO TANGENTIUM FLEXUS CURVARUM CONTRARII FACILE DEPREHENDUNTUR
[1. Hälfte 1674 [**noch**]]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 123 ist abgetrennt. 1 1/2 S. auf Bl. 122. Auf Bl. 123 Cc 2, Nr. 842 u. 843 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 841

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück lehnt sich eng an die beiden Publikationen in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1673, S. 5143–5147 und VIII Nr. 95 vom 22.Juni/3.Juli 1673, S. 6059 an, in denen R. F. de Sluse seine Methode zur Tangentenbestimmung darstellt und auf die Möglichkeit anspielt, mithilfe von Tangentenbetrachtungen Wendepunkte zu untersuchen (vgl. hierzu Kapitel V der *Miscellanea* in Sluse, *Mesolabum*, 1668). Leibniz missversteht die Bemerkungen von Sluse, insbesondere den Terminus flexus contrarii (Wendepunkte): Das von ihm verwendete Kriterium für Wendepunkte (S. 4 Z. 3–6) liefert Extrempunkte (recurvatio S. 4 Z. 9 f.), diese werden S. 6 Z. 3 mit Wendepunkten identifiziert. Daher ist N. 1 wohl verfasst worden, bevor Leibniz das *Mesolabum* selbst zur Kenntnis genommen hat. Bereits 1673 hatte Leibniz ein Exzerpt aus Sluses Artikeln angefertigt (Cc 2, Nr. 616, gedruckt in VII, 4 [**noch**]), das allerdings nicht diejenigen Stellen berücksichtigt, die im vorliegenden Stück benutzt werden. Ebenfalls aus dem Jahre 1673 stammt ein kurzes Exzerpt aus einer Rezension von Sluses *Mesolabum* 1668 in den *Philosophical Transactions* IV Nr. 45 vom 25. März/4.April 1669, S. 903–909, das ausschließlich Bemerkungen zu Kapitel IV der *Miscellanea* (Maxima und Minima) berücksichtigt (Cc 2, Nr. 500, gedruckt in VII, 4 [**noch**]). Ein ausführlicheres Exzerpt aus Teil II von Sluses *Mesolabum* (Cc 2, Nr. 850, Druck in einem späteren Band dieser Reihe) ist auf die Zeit August/September 1674 zu datieren. N. 1 ist also vermutlich vor August/Septembeuer 1674 enstanden. Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende Dez. 1673 belegt; auf Bl. 123 v° verwendet Leibniz das Symbol ⊓, das ab Mitte 1674 belegt ist.

Methodo Tangentium flexus curvarum contrarii facile deprehenduntur

Nimirum, investigetur tangens methodo a Slusio publicata, si tangens semper est affirmativa, vel semper negativa, quod facile ex calculo judicari potest, nullos habet curva flexus contrarios; sin mutari potest ex affirmativa in negativam, semel aut saepius[,] hoc quoque ex calculo facile dijudicari, et punctum flexus contrarii reperiri potest. Eadem arte et vertex curvae, in ordine scilicet ad rectam pro Directrice sumtam, semper reperiri potest. Vertex enim determinatur applicata maxima et minima.

Si Directrix occurrit curvae, punctum concursus dat verticem. Curva si recurvata est, habet vertices uno plures. Vertex est punctum recurvationis. Possunt recurvationes esse dissimilares, ut in illis quae sunt instar literae S. Porro sciendum est verticem haberi ope Tangentis directrici parallelae aut perpendicularis.

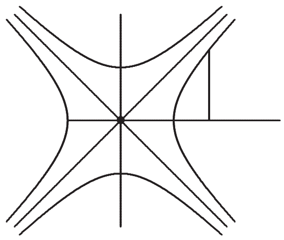
Sicut falsi quidam vertices, qui fiunt ex curvarum dissimilarium compositione in unam inventa aequatione ipsis communi, ita facile est diversas Conicas in unum jungere imo haec conjunctio etiam fieri potest sine nova recurvatione, vel vertice, quas in curvis altioribus discernere difficile est. Videndum est ergo an pars quaedam curvae propositae separatam habere possit ab altera aequationem, et progressionem; proposita quadam curva, et aequatione ejus progressum exprimente, quaerenda sunt ejus aequationis ope puncta tam flexuum contrariorum, quam recurvationum; referendaque sunt puncta curvae ad Tangentes per ea puncta transeuntes et ad rectas quae ad eas tangentes sunt perpendiculares, ut quaeratur si fieri potest aequatio proposita simplicior, certe ab ea

3 methodo *(1)* Slusiana, *(2)* a Slusio *L* 8 f. minima *(1)*. (Minima infinite parva *(2)*. Si Directrix *(a)* secat vel tang *(b)* occurrit *L* 19 recurvationum; *(1)* deinde considerata ipsa aeqvatione, videndum *(2)* referendaque *L*

---

1 f. Methodo . . . deprehenduntur: vgl. Sluse, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/1673, S. 5146–5147: „aliquid etiam attigi Miscelaneorum cap; ubi &, qua ratione flexus contrarii curvarum ex Tangentibus inveniantur, ostendi.“ und Sluse, *Philosophical Transactions* VIII Nr. 95 vom 22.Juni/3.Juli 1673, S. 6059: „De ... Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam esse . . . , cujus ope flexus Curvarum contrarios ac Problematum limites ostendi.“ 21 aequatio . . . simplicior: Vgl. Sluse *a. a. O.* S. 5145, „Quomodo autem Aequationes hujusmodi ad faciliores terminos pro constructione reduci debeant, id sane solertem Geometram minime latebit.“ Leibniz’ Bemerkungen hier, und in S. 5 Z. 10–13, sowie S. 6 Z. 1 nehmen sich wie ein Rückgriff auf die obige pauschale Äußerung von Sluse aus und verraten keine Vertrautheit mit der konkreten Umsetzung solcher Reduktionen von Kurvengleichungen in Teil II des *Mesolabum* von 1668.

diversa. Ubi considerandum etiam est an Curva sit Recurrens in Se. Si non est recurrens in se, videndum est, an habeat sectiones oppositas, imo an et conjugatas.



[*Fig. 1*]

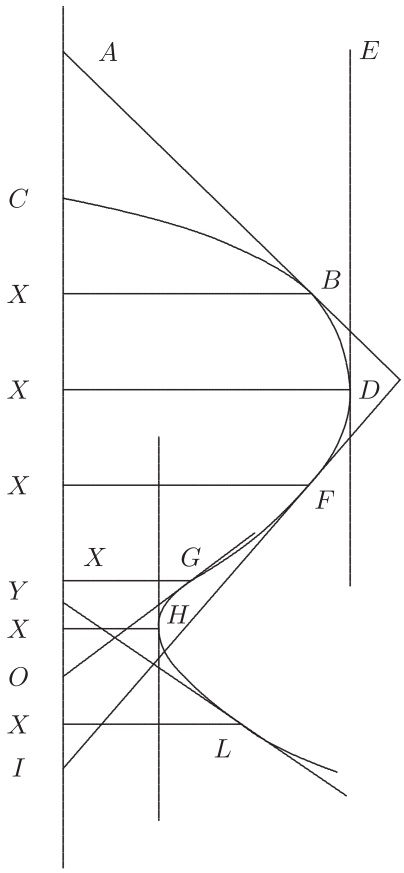
Ad hoc autem necesse est ut videamus an curva habeat asymptoton, id est an punctum aliquod reperiri possit, unde nequeat duci tangens ad curvam, nisi infinita. Unde illud quoque statim investigari potest, sitne ab utroque latere asymptotos. Superest ut investigetur.

Reperta aequatione ad Curvam simplicissima, eadem opera facile habetur et compositissima. Aequationes illae resolvendae sunt in analogias; et ordinatae in partes, ut inde inveniantur, an sint rectae quaedam certae, puncta quaedam certa, ad quae special⟨em⟩ quandam habeant curvae relationem, etiam aliter quam per ordinatas, ut an sint foci, et poli: breviter investigandi sunt modi describendi simpliciores omnes.

Examinandum denique est, quam relationem curva habeat extra suum planum; an solidum aliquod regulare haberi queat, imo an et plura, quorum sectione habeatur. Uti Ellipsis tam ex cylindro quam ex cono secari potest. Examinandum ante omnia fiat, an

9 f. compositissima *(1)* eoque facto in ipsa illa aeqva *(2)* qvae resolvenda est *(3)*. Aeqvationes *L*

recta constans curvam ingrediatur, una pluresve; et quomodo reddi possit simplicissima.



[*Fig. 2*]

Erravi paulo ante inter flexus contrarios et recurvationes nullum est discrimen. Cum tangens, ex punctis contactus *B*. *D*. *F*. *G*. *H*. *L*. axi *CX* productae si opus est, occurrit ultra *C*, id est ultra punctum quo curva continuata axi aut ejus parallelae (ante alium

3 *(1)* Nota cum l, seu producta, est major qvam x, abscissa, figuram esse convexam, Si minor, qvod fit etiam, si in contrarium reducta, concavam; Si mi *(2)* Erravi *L*

flexum) occurrit, tunc curva axi obvertit concavitatem, idem est de FI, quia ultra punctum H, quo curva ante mutatum flexum maxime accedit at axem, cadit I. Si tangens semper tendit versus applicatas minores, ideoque in eas partes curva decrescit. Si tangens est parallela curvae; a statu incrementi transitur in statum decrementi; vel quod idem est contra.

In curvis Conicis tot sunt tantum varietates quot differentiae oriri possunt a quadratis incognitarum absentibus, vel affirmatis aut negatis, varietate quae est ab rectangulo incognitarum ad eas reducta. Sed hoc non erit in altioribus.

1 occurrit *gestr. L erg. Hrsg.* 1 qvia *(1)* curva *(2)* ultra *L* 2 f. tangens *(1)* in cresc *(2)* tendit *(a)* partes a *(b)* versus applicatas minores; curva *(3)* semper *L*

2. SCHEDIASMA DE SUPERFICIEBUS CONOEIDUM
3. Oktober 1674 u. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 5 Bl. 1–2. 1 Bog. 4°. 4 S. 2 Teile. Teil 1 vom Oktober 1674 auf Bl. 1–2 r°, Teil 2 vom Januar 1676 auf Bl. 2 v°.
Cc 2, Nr. 773, 1277

[*Teil 1*]

3. Octob. 1674.

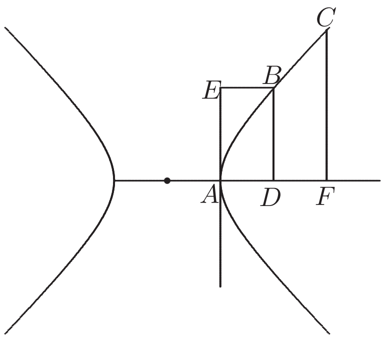
Schediasma de superficiebus Conoeidum et Sphaeroeidum, item de Curva Ellips. et Hyperbolae

Cum hodie apud Cl$^{\text{mum}}$ Justellum essem, de Analysi et Arithmetica infinitorum sermo incidit; Doctissimus Geometra, Ismaël Bullialdus, utilitatem characterum analyticorum confessus, caeteroquin negavit, per Algebram dari posse theorematum ab Archimede, de Sphaera et Cylindro, deque Conoeidibus et Sphaeroeidibus demonstratorum; in quo ei assensus sum. Inde cum procederet sermo, dixi pleraque ab Archimede in illis libris demonstrata recidere ad quadraturam parabolae; Archimedem vero solida quidem Conoeidum et Sphaeroeidum, sed non superficies dedisse; earum autem solutionem tum Celeberrimum Hugenium, tum et me habere. Respondit Bullialdus si quis eas det sed de-

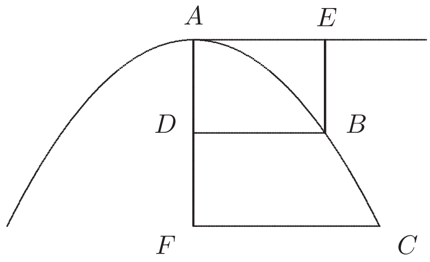
9 item ... Hyperbola *erg. L* 12 per *(1)* Analysin d *(2)* Algebram *L* 16 f. tum *(1)* Hug *(2)* Nobi *(3)* Celeberrimum *L*

10 Justellum: H. Justel. 11 Bullialdus: I. Boulliau. 12 dari posse: Der vorliegende Satz ist unvollständig; als Vervollständigung wäre z. B. „demonstrationem“, aber auch „solutionem“ oder Ähnliches denkbar. 12 f. ab Archimede: vgl. Archimedes, *De sphaera et cylindro* und *De conoidibus et sphaeroidibus*. Die hier angesprochenen Hauptresultate werden mit der sogenannten Exhaustionsmethode bewiesen. 15 recidere ad quadraturam parabolae: Es ist nicht zutreffend, dass die meisten der Überlegungen bei Archimedes *a. a. O.* auf die Quadratur der Parabel zurückführen. Lediglich *De conoidibus et sphaeroidibus* § 3 und als Folge hiervon § 12, § 21 und § 23 rekurrieren auf die Quadratur. 16 solutionem: vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 [Marg.]. Huygens gibt dort, ohne Beweis, die Resultate einer Rückführung der Aufgaben, zur Oberfläche gegebener Konoide einen flächengleichen Kreis zu bestimmen, auf die Rektifikation des Kreises und die Quadratur der Hyperbel an. 17 et me habere: Eine derartige eigenständige Lösung der Oberflächenbstimmung von Konoiden aus der Zeit vor Oktober 1674 wurde nicht gefunden **[noch, Cc 544 mögliche Quelle]**.

monstratas, rem ex subtilissimis eorum quae inde ab Archimede in eo genere data sunt, dedisse ipsi videri. Ego vero dare in me suscepi.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Esto curva conica, ABC, cujus vertex A. Axis AD tangens AE. basis ubicunque sumta CF. abscissa $AD \sqcap x$, ordinata $DB \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$.

Ordinata proxime major: $\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2}$, differentia earum:

$$\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2} \quad - \quad \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \quad \sqcap \quad \frac{y\beta}{a}.$$ Unde

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sqcap \quad + \quad \ldots\ldots\ldots \quad + \quad \frac{y\beta}{a},$$

et quadrando: $\boxed{2ax} + 2a\beta \mp \frac{a}{q} \frown \begin{matrix}\boxed{x^2}\\ 2x\beta\\ +\beta^2\end{matrix} \sqcap \boxed{2ax} \mp \boxed{\frac{a}{q}x^2} + 2\frac{y\beta}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$; rejectisque omnibus in quibus β^2 quadrata, fiet: $\cancel{2}a \mp \frac{\cancel{2}a}{q}x \sqcap \cancel{2}\frac{y}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, et quadrando:

10 fiet *(1)* $2a\beta \mp \frac{2a}{q}x\beta$ *(2)* $\cancel{2}a$ *L*

3 *Fig. 2*: Eine Vorstufe zu Figur 2 wird nicht wiedergegeben. 5 $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$: Zu dieser Formel für die Ordinate eines Kegelschnitts vgl. auch *De la méthode de l'universalité* (Cc 2, Nr. 863, tlw. gedruckt in *LFC*, S. 114 f.), sie wird auch in VII, 1, N. 110, S. 680 verwendet.

$a^2 \mp \dfrac{2a^2}{q}x + \dfrac{a^2}{q^2}x^2 \sqcap \dfrac{y^2}{a^2} \frown 2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2$. Hinc ut obiter dicam, quadratura habetur hujus figurae: $\dfrac{a^2 \mp \dfrac{a^2}{q}x}{\sqrt{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}} \sqcap y$.

Jam, $\dfrac{a^2 \mp \dfrac{2a^2x}{q} + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2 \sqcap \beta^2\dfrac{y^2}{a^2}$, addatur ad β^2, quod ita commode fiet:

$\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2 \boxed{\dfrac{\mp\dfrac{2a^2x}{q} + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2} \mp\dfrac{a}{q}\beta^2$, addenda ad β^2, producti radix exprimet Elementa ipsius Curvae Conicae. Fietque:

$\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Quod est Elementum Curvae Conicae. Unde pro parabola: $\sqrt{\dfrac{\cancel{a^2} + 2\cancel{a}x}{2\cancel{a}x}} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Unde $\dfrac{a}{2x} + 1 \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$ vel: $2x \sqcap \dfrac{a^3}{z^2 - a^2}$. Haec ergo figura pendet a quadratura Hyperbolae, quia et curva parabolae. Ducatur in distantiam ab axe, seu ordinatam parabolicam $\sqrt{2ax}$, fiet $\sqrt{a^2 + 2ax}$, quae progressio est ad Parabolicam, ideoque habetur superficies circa axem. Ut habeatur Superficies circa tangentem, ducatur

---

2 *Spätere Nebenbetrachtung:* $\dfrac{\dfrac{a^4}{q^2}x\cancel{^2}}{2a\cancel{x} \mp \dfrac{a}{q}x\cancel{^2}} \sqcap y^2$ et $x \sqcap \dfrac{2ay^2}{\dfrac{a^4}{q^2} \mp \dfrac{a}{q}y^2}$

3 $\sqcap$ $\beta^2\dfrac{y^2}{a^2}$, *(1)* auferatur a $\dfrac{\beta^2}{\beta^2}$ *(2)* auferatur a *(3)* addatur *L* 4 $\mp\dfrac{a}{q}\beta^2$, *(1)* auferenda a β^2, residui *(2)* addenda *L* 5 f. fietqve: *(1)* $\dfrac{2a}{x}$ *(2)* $\sqrt{\dfrac{2ax\beta^2 \mp \dfrac{a}{q}x^2\beta^2 - a^2\beta^2 \ddagger \dfrac{2a^2x}{q}\beta^2 - \dfrac{a^2}{q^2}x^2\beta^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}}$ $\sqcap \dfrac{z\beta}{a}$ sive z $\sqcap$ *(3)* β *(4)* a $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap$ *(5)* $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1}$ *L* 7 f. Haec ... parabolae *erg. L*

in x, seu $\sqrt{}x^2$, fiet: $\sqrt{\dfrac{a}{2}x + x^2}$, quae est progressio ad Hyperbolam.

Recta AF, vocata f, erit $DF \sqcap f - x$, in quam si ducatur Elementum Curvae, fiet aequatio: $a^2 + 2ax, \frown f^2 - 2fx + x^2, \sqcap 2ax^2$, quam proinde figuram ex Hyperbola pendere necesse est.

Pro Circulo aut Hyperbola Circulari fit: $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp x^2} \mp 1 + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Et pro Circulo quidem $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax - x^2}} \sqcap \dfrac{z}{a}$, pro Hyperbola $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax + x^2} + 2} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Hinc Elementum Curvae Circularis ducendo in ejus distantiam a diametro, seu in $\sqrt{2ax - x^2}$, fit $\sqrt{}a^2$, sive a. Ac proinde habetur superficies circa diametrum. Ducatur in x, distantiam a vertice, fiet: $a\sqrt{\dfrac{x}{2a - x}} \sqcap \omega$ unde $a^2x \sqcap 2a\omega^2 - x\omega^2$ cujus quadratura pendet a quadratura Circuli, ac proinde: $x \sqcap \dfrac{2a\omega^2}{a^2 + \omega^2}$ est ad figuram circulo symmetram.

At Elementum Curvae Hyperbolae ducendo in ejus sinum, fit: $\sqrt{a^2 + 4ax + 2x^2}$, cujus progressio est ad aliam Hyperbolam, etiam latera rectum transversumque aequalia habentem; si ducas in x, fiet: $\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a + x} + 2x^2}$. Unde patet nihil fere habere hic quidem Hyperbolam simplicem in quo emineat prae composita.

Si Elementum Hyperbolae vel Ellipsis ducatur in ordinatam, fiet:
$\sqrt{a^2, \mp \dfrac{a}{q} \frown 2ax \mp \dfrac{a^2}{q^2}x^2 + 2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}$, quae progressio est ad Hyperbolam vel Ellipsin, ita scilicet ut sit semper ad Hyperbolam, quando curva est Hyperbola, sed quando curva est Ellipsis tunc distinguendum est, nam, si $+\dfrac{a^2}{q^2} - \dfrac{a}{q}, x^2$ est quantitas affirmativa, seu quando a, major quam q, latus rectum quam transversum, aequatio est ad Hyperbolam, sin contra ad Ellipsin.

3 aeqvatio: *(1)* $\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ax} \frown \mathrm{f}^2 \sqcap 2\mathrm{ax}$ *(2)* a^2 *L*   6 qvidem *(1)* $\mathrm{a}\sqrt{}2\mathrm{ax}$ *(2)* $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}}$ *L*   6 Hinc *(1)* Circulum *(2)* Elementum *(a)* circuli duc *(b)* Curvae *L*   11 At *(1)* pro Elemento Hyperbolae *(2)* Elementum *L*   16 | $\sqrt{\mathrm{a}^2, \mp \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}} \frown 2\mathrm{ax} \mp \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{ax} \mp \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}$ *L ändert Hrsg.* |, qvae *L*   16 Hyperbolam *(1)* pro Hyperbola, ad Ellipsin pro Ellipsi *(2)* vel *L*   19 ad *(1)* Ellipsin, sin contra ad *(2)* Hyperbolam, *L*   20 contra *(1)* ad Ellipsin seu *(2)* ad *L*

Habetur ergo Centrum gravitatis Curvae Ellipticae ex supposita Circuli et Hyperbolae quadratura, eandem curvam Ellipticam modo ad minorem modo ad majorem axem referendo.

Jam eundem calculum resumemus, ponendo ordinatam ad Conicam esse: $\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$ quae est ad Ellipsin vel Hyperbolam, et Circulum, parabola exclusa, fiet: proxime major ordinata: $\sqrt{a^2,, \mp \frac{a}{q}, \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2}$, differentia:

$$\sqrt{a^2,, \mp \frac{a}{q} \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2} \quad - \quad \sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2} \quad \sqcap \quad \frac{y\beta}{a}.$$ Unde transponendo:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sqcap \quad + \quad \ldots\ldots\ldots \quad + \quad \ldots$$ et quadrando:

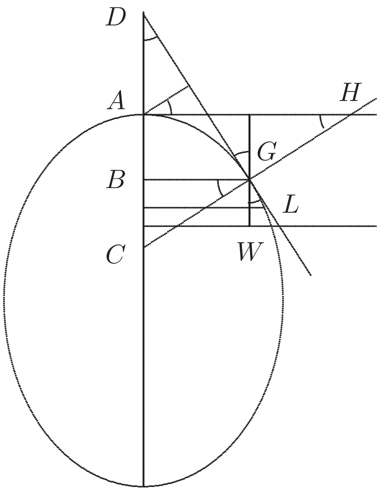
$\boxed{a^2,,} \mp \frac{a}{q} \frown \boxed{z^2} + 2z\beta + \beta^2 \sqcap \boxed{a^2} \mp \boxed{\frac{a}{q}z^2} + \frac{2y\beta}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$ et destructis destruendis, atque ordinando: $\mp \cancel{2}\frac{a}{q}z \sqcap \cancel{2}\frac{y}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$, unde $y \sqcap \frac{a^2z}{q, \frown \sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}}$. Hujus ergo figurae generaliter habetur quadratura. Ejus quadratum quadrato ab a^2, addatur, fiet:

$\frac{a^4z^2}{q^2 \frown \llcorner a^2 \mp \frac{a}{q}z^2 \lrcorner} + a^2$, unde radix: $\frac{a}{q}\sqrt{\frac{a^2z^2 + a^2q^2 \mp \frac{a^3}{q}z^2}{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}}$ Elementum Curvae Hyperbolicae vel Ellipticae.

Sed jam praevideo quod nihil hinc novi, magni momenti ultra calculum priorem; tantum ob circulum patebit: $\sqrt{\frac{\cancel{a}q^2z}{a^{\cancel{2}} \mp \frac{\cancel{a}}{q}z^2}}$ ex Circuli quadratura pendere.

2 modo *(1)* minori modo majori axi *(2)* ad *L* 4 ponendo *(1)* aeqvationem *(2)* ordinatam *L* 4 f. esse *(1)* $a^2 - x^2 \sqcap y$ *(2)* $b^2 - z^2 \sqcap$ *(3)* $\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$ *(a)* $\sqcap y^2$ *(b)* qvae *L* 5 parabola *(1)* et recta exclusis *(2)* exclusa *L* 10 $\cancel{2}\frac{y}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$, *(1)* vel qvadrando *(2)* Unde *L*

12 radix: Der Zähler im folgenden Bruch unter der Wurzel müsste lauten: $a^2z^2 + a^2q^2 \mp aqz^2$.



[*Fig. 3*]

$\dfrac{GL}{GC} \sqcap \dfrac{GW}{BG}$, unde $GL \frown BG \sqcap GC \frown GW$, quod demonstrat Summam omnium perpendicularium GC aequari momento curvae ex axe AB. At $GL \sqcap \dfrac{GC \frown GW}{BG}$. Aestimemus valorem ipsius GC in Hyperbola, fiet: $\sqrt{,,,\dfrac{a}{q}x + a, \square,, + 2ax + \dfrac{a}{q}x^2}$ sive $\sqrt{\dfrac{a^2}{q^2}x^2 + \dfrac{2a^2}{q}x + a^2 + 2ax + \dfrac{a}{q}x^2}$, quae figura est Hyperbola. Porro $\dfrac{\dfrac{a}{q}x + a}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{q^2}x^2 + \dfrac{2a^2}{q}x + a^2 \\ +\dfrac{a}{q} \qquad + 2a \end{array}}}{GH}$. Est autem $\dfrac{2\cancel{a}q}{\cancel{a}}x + x^2 + q^2 \sqcap y^2 + q^2$, fiet: $x \sqcap \sqrt{y^2 + q^2} - q$,

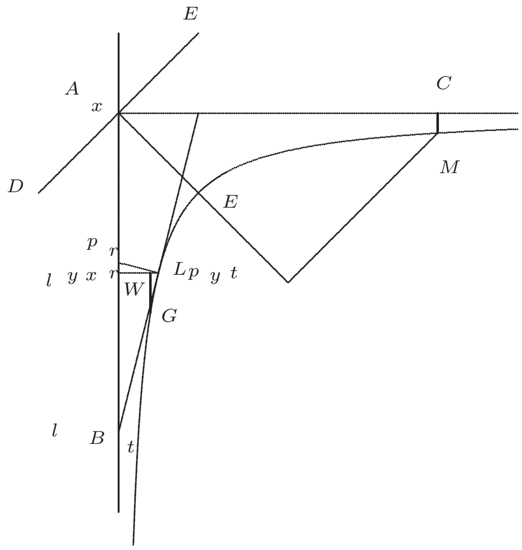
3 GC *erg. L* 5 figura *(1)* pendet ex *(2)* est *L*

6 $y^2 + q^2$: Es fehlt der Faktor $\frac{q}{a}$ vor y^2. Der fehlerhafte Term wirkt sich bis zum Ende der Rechnung S. 14 Z. 1 aus.

unde $\dfrac{\dfrac{a}{q}\sqrt{y^2+q^2}-q+a}{\sqrt{y^2+q^2}-q} \sqcap \dfrac{\sqrt{\begin{array}{l}\dfrac{a}{q}y^2+a^2\\ +2\ \ldots\end{array}}}{GH \sqcap e}$. Ergo e, seu GH, pendet a centro gravitatis Hyperbolae.

Habemus Centrum Gravitatis Curvae parabolae et Ellipseos, restat Centrum gravitatis curvae Hyperbolae. Hyperbolam utile est aliter nunc quidem considerari, nempe: ordinata ad asymptoton $\dfrac{a^2}{x}$, proxime major: $\dfrac{a^2}{x-\beta}$, differentia: $\dfrac{a^2}{x-\beta} - \dfrac{a^2}{x}$, sive $\dfrac{\boxed{a^2x-a^2x}+\beta a^2}{x^2-\beta x}$, sive $\dfrac{\beta a^2}{x^2}$, addatur ejus quadratum, ad β^2, fiet: $\dfrac{\beta^2a^4+x^4\beta^2}{x^4}$, cujus radix: $\dfrac{\beta}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$, Elementum curvae Hyperbolae. Ducatur in x distantiam ab asymptoto, fiet: $\dfrac{\beta}{x}\sqrt{a^4+x^4}$, qua curvae Hyperbolicae momentum ex Asymptoto exhibetur. Unde aequatio talis: $y^2x^2 \sqcap a^4+x^4$. Sive $y^2-x^2 \sqcap \dfrac{a^4}{x^2}$ sive $y+x, \frown\, y-x \sqcap \dfrac{a^4}{x^2}$, vel $y^2x^2-a^4 \sqcap x^4$, sive $yx-a^2, \frown\, yx+a^2 \sqcap x^4$. In Ellipsi est Reducta, ad axem: $a-\dfrac{a}{q}x$, ejus quadratum est $a^2-\dfrac{2a^2}{q}x+\dfrac{a^2}{q^2}x^2$, addatur quadrato ordinatae Ellipseos, nempe $2ax-\dfrac{a}{q}x^2$, fiet: $\sqrt{a^2-\dfrac{2a^2}{q}x+\dfrac{a^2}{q^2}x^2} \sqcap$ perpendiculari ad Ellipsin.
$$+\,2a\ ..\ -\ \frac{a}{q}$$

4 Hyperbolae. *(1)* Ergo *(2)* Hyperbolam *L* 4 f. nempe: *(1)* $\mathrm{yx} \sqcap \mathrm{a}^2$, sive y– *(2)* ordinata *L* 5 differentia *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}-$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}-\beta}$ *L* 6 ad *(1)* a^2, fiet: $\dfrac{\beta^2\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^4}$, cuius radix: $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}^2}\sqrt{\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4}$ *(2)* β^2 *L* 8 fiet: *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4}$ *(2)* $\dfrac{\beta}{\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4}$, *(a)* progressio qvae: exhi *(b)* qva *L* 11 ordinatae *erg. L*



[*Fig. 4*]

Quantum ad Hyperbolam circa Asymptotos, fiet $yl \sqcap \boxed{a^2} - yx$. sive $l \sqcap -x$. Jam quia $\dfrac{t}{l \sqcap x} \sqcap \dfrac{GL}{GW}$, erit $GW \frown t \sqcap x\,GL$. Ac proinde summa omnium t, aequabitur momento curvae ex asymptoto conjugata, est autem $t^2 \sqcap x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}$ ut ante. Perpendicularis p, qualis sit hinc patet quia $pl \sqcap \dfrac{a^4}{x^2}$, sive $rx \sqcap \dfrac{a^4}{x^2}$. Ergo $r \sqcap \dfrac{a^4}{x^3}$, cujus quadrato $\dfrac{a^8}{x^6}$ addatur $\dfrac{a^4}{x^2}$. fiet: $\dfrac{a^8 + a^4x^4}{x^6}$, sive $\dfrac{a^2}{x^3}\ \sqrt{a^4 + x^4} \sqcap p$. Hinc patet harum duarum Curvarum $\dfrac{a^2}{x^3}\ \sqrt{a^4 + x^4}$, et $\dfrac{a}{x}\ \sqrt{a^4 + x^4}$ summas concurrere ad centrum gravitatis Hyperbolae.

2 fiet *(1)* 2a *(2)* yx *(3)* yl $\sqcap$ *(a)* $\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}$. sive l $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}} - \mathrm{x}$ *(b)* $\boxed{\mathrm{a}^2} - \mathrm{yx}$. *(aa)* | sive l $\sqcap$ −yx, *streicht Hrsg.* | *(bb)* sive *L* 4 asymptoto *(1)* opposita *(2)* conjugata *L* 7 summas *(1)* esse symmetras. Nam *(2)* concurrere *L*

5 $pl \sqcap \dfrac{a^4}{x^2}$: Der korrekte Ausdruck für $pl (= yt)$ wäre $\dfrac{a^2}{x}\sqrt{x^4 + a^4}$. 7 $\dfrac{a}{x}\ \sqrt{a^4 + x^4}$: Der Faktor a vor der Wurzel ist inkorrekt. Der fehlerhafte Term wird S. 17 Z. 7 wieder verwendet.

Prior aequalis momento curvae ex AB, posterior ex AC. Unde patet inventa alterutra ex his summis, haberi etiam alterius quadraturam, quia una ex his summis inventa habetur jam centrum gravitatis Curvae Hyperbolae, vel ideo quia ab alterutro latere similis ratiocinatio est, et hyperbola ut ad unam, ita quoque ad alteram est asymptoton.

[*Teil 2*]

Si in aeq: $t^2 \sqcap x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ haberi posset summa omnium x^2 haberetur momentum curvae ex asymptoto conjugata, $x^4 - t^2x^2 + \frac{t^4}{4} \sqcap \frac{t^4}{4} - a^4$. Et $x^2 - \frac{t^2}{2} \sqcap \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$ seu $x \sqcap \sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}$, quae pendet ex $\frac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Cujus momentum per x est $\sqrt{x^4+a^4}$.

6 *Darüber:* Haec adjeci Januar. 1676

1 AB, | posterior ex AC. *erg.* | *(1)* Si pro x substituatur in priore eius valor, $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$, fiet: $\frac{\mathrm{a}^2}{\frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{y}^3}}$, sive $\frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{a}^3}\sqrt{\mathrm{a}^4 + \frac{\mathrm{a}^8}{\mathrm{y}^4}}$, ex qvibus haec priori symmetros. Hinc patet *(2)* Unde *L* 4 asymptoton. | *(1)* $\mathrm{q}^2 + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{x}^2$ *(2)* $2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$, pro x substituatur z − a, fiet: $2\mathrm{az} + \mathrm{z}^2 - 2\mathrm{az} + \mathrm{a}^2$ *(!)* et fiet: $\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$ ponendo $\mathrm{z} \sqcap$ AE, unde $\mathrm{l} \sqcap \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{z}}$, sive $\mathrm{l} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{z}} + \mathrm{z}$, et quadratum: $\frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{z}^2} + 2\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2$, addatur ad $\mathrm{z}^2 + \mathrm{a}^2$ *gestr.* | *L*
6 *(1)* Curva Hyperbolica: *(2)* si *L*

8 x: Im Wurzelausdruck für x fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$ vor t^2. Der fehlerhafte Term wird auch in S. 17 Z. 3 benutzt. 8 pendet ex $\frac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$: Es gilt $\int x dt = xt - \int t dx$, und $\int t dx = \int \sqrt{\frac{x^4+a^4}{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x^4+a^4}}{x} dx$.

At hoc momentum est corresolubile summis omnium x^2, quae dantur ex datis $\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$. Ergo memorabile quiddam invenimus scilicet $\sqrt{x^4 + a^4}$ et $\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$ esse figuras corresolubiles. Quoniam datur $\int \overline{t^2 dx}$, Dabitur etiam $\int \overline{\overline{dtdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}}$. Qualem figuram quadrabilem esse nemo sibi facile persuadeat.

Nota Enchiresin singularem, licet particularem: Sit curvae portio MEG. et portio ME aequalis et similis portioni GE, utique centrum ejus gravitatis cadit in axem AE; porro momentum ejus ex AB est $\int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4}}$ et momentum ex AC, est $\int \overline{\frac{a^2}{x}\sqrt{a^4 + x^4}}$. Distantia centri gravitatis ab AB est $\dfrac{\int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4}}}{ACE \sqcap \text{curv}}$ et dist. centri gravitatis ab AC est $\dfrac{\int \overline{\frac{a^3}{x}\sqrt{a^4 + x^4}}}{ACE \sqcap \text{curv}}$. Sunt autem hae distantiae aequales. Nam quocunque sumto puncto in AE demissa inde perpendicularis in AB, est aequalis demissae alteri in AC, ergo eo casu, quo $EM \sqcap EG$ seu $AC \sqcap x$ erit $\int \overline{\frac{a^3}{x}\sqrt{a^4 + x^4}} \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4}}$. Similis ratiocinatio servit in omnibus aliis curvis, quando ad duo anguli recti latera similiter referuntur.

1 est *(1)* syndeton *(2)* corresolubile *L* 7 ex AB *erg. L* 7 f. $\int \overline{\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{a}^4 + \mathrm{x}^4}}$. *(1)* Ergo distantia Cur *(2)* distantia *(a)* momenti *(b)* centri *L* 12–18,1 referuntur. *(1)* Ubi fieri poterit, ut una sit *(2)* Idem *L*

---

3 $\int \overline{\overline{dtdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}}$: Der korrekte Ausdruck lautet $\int \overline{\overline{2tdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + \frac{t^2}{4}}}}$. 7 momentum ex AC: Der korrekte Ausdruck für das Integral wäre $\int \overline{\frac{\sqrt{a^4 + x^4}}{x}}$. Leibniz behält den fehlerhaften Term bis zum Ende der Überlegung Z. 11 bei. 8 $ACE \sqcap$ curv: vgl. aber die Bezeichnung MEG für die Kurve in Z. 5.

Idem erit non tantum de curvarum sed et spatiorum momentis; et quando eveniet, ut unum momentum quadretur, semper habebitur et quadratura alterius, non quidem omnium portionum attamen certae, et habemus exemplum quo portiones quaedam certae figurarum quadrari possunt. Et videndum an non eorum ope aliquando perveniri possit, ad aliquam portionem arcus circuli dimetiendam; tametsi ejus ratio ad totam Circumferentiam haberi nequeat.

Simili stratagemate uti licet in figuris recurrentibus, cum in ultimo casu momenta ex vertice v. g. et momenta ex basi coincidunt; quod facit ut figura sinuum tota (etsi non partes) mensurari possit, et alia id genus.

Si Angulus ita sumtus sit, ut non bisecetur ab axe figurae curvilineae, tunc quoniam nihilo minus semper patet centri gravitatis figurae locus haberi poterit ratio momentorum.

$t \sqcap \frac{1}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ et $\frac{a^2t}{x} \sqcap$ Elemento curvae, $\sqcap \frac{a}{x^2}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap z$. Ergo $z^2 \sqcap \frac{a^2}{x^4}, a^4+x^4$ sive $z^2 \sqcap \frac{a^6}{x^4}+a^2$. Habetur ergo $\int z^2dx$. ergo $\int xzdz$. $x^4z^2 - a^2x^4 \sqcap a^6$. et $x^2 \sqcap \frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ et $x \sqcap \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$. Ergo $\int zdz\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$ absolute habetur, et talis figura quadrari potest. $\int \frac{a^2}{x}dx\sqrt{a^4+x^4}$ et $\int \frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ sunt corresolubiles.

$t^2 \sqcap \frac{1}{x^2}\,\overline{a^4+x^4} \sqcap \frac{a^4}{x^2}+x^2$, quae habentur. Jam $\int t^2dx$ corresol. $\int \overline{txdt}$ (NB. faciendum signum quod exprimat corresolubilitatem +). Ergo quia $\int \overline{t^2dx}$ id est $\int \overline{\frac{a^4}{x^2}+x^2}$

2 f. qvidem *(1)* semper attamen in certo casu *(2)* omnium ... attamen | in certa, *ändert Hrsg.* | et *L* 5 ad *(1)* totum Circulum *(2)* totam *L* 9 partes) *(1)* inveniri *(2)* mensurari *L* 10 Angulus *(1)* rectus *(2)* ita *L* 10 bisecetur *(1)* a ducta per *(2)* ab *L* 13 et | $\frac{\mathrm{a^2t}}{\mathrm{x}}$ *L ändert Hrsg.* | $\sqcap$ Elemento *L* 17 $\int \mathrm{t^2dx}$ *(1)* $\sqcap$ *(2)* corresol. *L* 17 f. NB. *(1)* inveniendum *(2)* faciendum *L*

17–19,3 t^2: Im vorliegenden Abschnitt ändert Leibniz die zunächst gewählte Variable p in t um, verbessert aber unvollständig. Im Text wurde eine Angleichung vorgenommen.

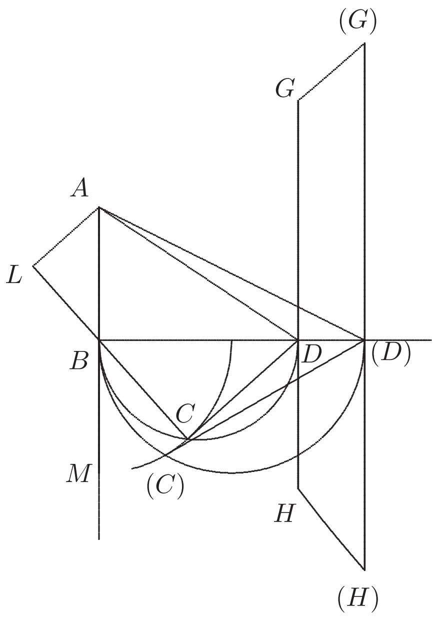
haberi potest, et $t^2x^2 \sqcap a^4 + x^4$. et $x^4 - t^2x^2 + \frac{t^4}{4} \sqcap \frac{t^4}{4} - a^4$. et $x^2 \sqcap t^2 - \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$ et $x \sqcap \sqrt{t^2 - \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}}$. ideo habebitur $\int t\sqrt{t^2 - \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}}$. Porro $\int \overline{x^2dt}$ corresol. $\int \overline{txdx}$. Ergo ex $\int \overline{t^2 - \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}}$ habetur $\int \overline{txdx} \sqcap \int \sqrt{a^4 + x^4}$: Quod est m e m o r a b i l i s s i m u m.

$\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4} \sqcap p$. $\int \overline{pxdx} \sqcap \int \frac{a^2}{x^2}\sqrt{a^4 + x^4}$ curvae longitudo. At $\int \overline{pxdx}$ corresol. $\int x^2dp$. Ergo $x^6p^2 \sqcap a^8 + a^4x^4$ et haberi poterit x^2 per duo binomia Cardanica, quorum summa pendebit ex dimensione curvae Hyperbolae.

$p^2 \sqcap \frac{a^8}{x^6} + \frac{a^4}{x^2}$. Jam $\int \overline{p^2dx}$ corresol. $\int \overline{xpdp}$. At $\int \overline{xpdp}$. dabit rursus figuram satis mirabilem cujus haberi potest quadratura.

3 $\int \overline{\mathrm{t}^2 - \sqrt{\frac{\mathrm{t}^4}{4} - \mathrm{a}^4}}$ *(1)* seu ex qvad. Hyp. *(2)* habetur *L*

1 x^2: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $\frac{t^2}{2}$ statt t^2 stehen. Der fehlerhafte Term wird bis Z. 3 benutzt. Er hat keine Auswirkungen auf den Ausgang der Überlegungen.



[*Fig. 5*]

$BD \sqcap x$. $AB \sqcap a$. $AD \sqcap \sqrt{x^2+a^2} \sqcap DG$. Circulus circa BD alius circulus centro B radio $BC \sqcap AB$, ductus secet priores in punctis $C.(C)$. Jungantur $CD \sqcap \sqrt{x^2-a^2}$ et transferantur in DH. $(D)(H)$. Exiit tam curva $G(G)$ quam curva $H(H)$ Hyperbolica. Quodsi jam unius planum sit alteri perpendiculare et in se invicem ducantur, fiet $\sqrt{x^4-a^4}$. Notabilis relatio inter haec Triangula: ABD, et BCD duo habent latera communia, unumque angulum, sed non latera homologa adeoque nec eadem nec similia sunt, dubitandum tamen non est aliquid in ipsis latere notabile.

In productam CB in L. ducatur AL perpendicularis seu parallela DC et producatur AB in M. Erit ang. $MBC \sqcap$ angulo LBA. Ergo $LAB \sqcap$ ang. DBC. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ALB, BCD similia, et erit ut AL ad AB, ita $AB \sqcap BC$ ad BD et $AL \sqcap \dfrac{a^2}{x}$.

2 alius circulus *erg.* *L*

1 *Fig. 5*: Die Hyperbelbögen $G(G)$ und $H(H)$ sind nur schwach gekrümmt.

3. DE PROBLEMATIS QUADRATURARUM REDUCENDIS
[Nach 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 166. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 166 v°, Bl. 166 r°.
Cc 2, Nr. 830

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück verweist auf das auf den 24. Dezember 1674 datierte N. 28.

Xb. 1674.

De problematis quadraturarum reducendis ad dimensiones curvarum deque methodo tangentium inversa per duas radices aequales

Dimensio curvae propositae semper haberi potest, supposita quadam quadratura, sed non semper data quadratura inveniri potest curva cujus in rectum extensione absolvi possit. Quadratura Circuli et Hyperbolae per extensiones Curvarum Circuli et parabolae habetur; hoc si in omnibus quadraturis fieri posset, non laboraremus. Videndum tamen:

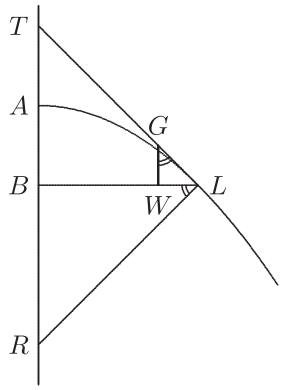
---

10 f. *Nebenbetrachtung, durch Striche abgetrennt:*
$a^2 - x^2 + y^2 \sqcap s^2$. $v^2 + x^2 - 2vx + y^2 \sqcap s^2$. Ergo $v^2 + x^2 - 2vx + \boxed{s^2} + x^2 - a^2 \sqcap \boxed{s^2}$. Ergo $x^2 - vx \left\{ \frac{\begin{matrix} +v^2 \\ -a^2 \end{matrix}}{2} \right. \sqcap 0$. Quam ad duas aequales radices determinari impossibile, nisi a ponatur $\sqcap 0$.

10 f. deqve ... aeqvales *erg. L*

---

10 f. methodo ... aequales: In einer Reihe von Stücken aus dem Zeitraum Oktober 1674 bis Januar 1675 versucht Leibniz, die inverse Tangentenaufgabe durch einfache Umkehrung der cartesischen Methode zur Tangentenbestimmung („ad duas radices aequales“, vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–49) zu lösen. Vgl. hierzu die Vorbemerkung zu N. **[noch]**. 1,18 ad duas ... radices: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43–45. Der Vergleich mit $x^2 - 2ex + e^2 \sqcap 0$ liefert hier $v = 2e$ und $\frac{v^2}{2} - \frac{a^2}{2} = e^2$, d. h. $v^2 = \sqrt{2e^2 + a^2}$. Leibniz meint, dies erzwinge $a = 0$, vielleicht weil er $\sqrt{2e^2} = 2e$ setzt.



[*Fig. 1*]

Sit curva quaelibet cujus aequatio: $x^2+\frac{l}{a}yx+\frac{m}{a}y^2+nx+py+aq \sqcap 0$. $BT \sqcap t$. $AB \sqcap x$. $BL \sqcap y$. Ordinetur secundum tangentes et fiet:

$$\begin{array}{lcl} 2xt + \frac{l}{a}yt & \sqcap & -\frac{l}{a}xy - 2\frac{m}{a}y^2. \\ \quad + n \;\; .. & & -p \;\; .. \end{array}$$

Ergo $t \sqcap \dfrac{\begin{array}{l} -\frac{l}{a}xy - \frac{2m}{a}y^2 \\ -p \;\; .. \end{array}}{2x - \frac{l}{a}y + n}$. Pro y substituatur ejus valor, ut habeatur t per x tantum.

---

1 *Nebenbetrachtung, durch Strich abgetrennt:*
$BR \sqcap \frac{WLy}{\beta}$. $\frac{\sqrt{WL^2+\beta^2}}{\beta} \sqcap \frac{s}{y}$. $y^2WL^2+\beta^2y^2 \sqcap \beta^2s^2$. Jam $BR^2 \sqcap v^2-2vx+x^2$. Latet vero etiam x in WL. Unde elidendo x, restabit una incognita y determinanda ad duas radices aequales.

2 aeqvatio *(1)* $\mathrm{x}^3+\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{yx}^2+\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2\mathrm{x}+\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^3+$ *(2)* x^2 *L* 3 f. fiet: *(1)* $2\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y} \sqcap$ *(2)* $2\mathrm{xt}+\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}$ *(a)* ytx *(b)* yt $\sqcap$ *L*

---

1 *Fig. 1*: Zur Figur und zu den Überlegungen ab S. 23 Z. 1 vgl. N. 4, S. 000 Z. 000–000.

Jam $\frac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \frac{BL \sqcap y}{BT \sqcap t}$. Ergo $WL \sqcap \frac{\beta y}{t} \sqcap \beta \frown \frac{2x + \frac{l}{a}y + n}{\begin{array}{l} -\frac{l}{a}x - \frac{2m}{a}y \\ -p \end{array}}$. Jam ex superioribus:

$$\begin{array}{ll} y^2 + \frac{l}{m} & xy \\ + \frac{ap}{m} & .. \end{array} \frac{\left\{ \begin{array}{l} +\frac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\frac{2lapx}{m^2} \\ +\frac{a^2p^2}{m^2} \end{array} \right.}{4} \sqcap \left\{ \begin{array}{l} +\frac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\frac{2lapx}{m^2} \\ +\frac{a^2p^2}{m^2} \end{array} \right\} \smile 4 \quad - \frac{a}{m}x^2 - \frac{a}{m}nx - \frac{a^2}{m}q.$$

Ergo $y \sqcap \frac{-lx - ap \ddagger \sqrt{\begin{array}{llll} l^2 & x^2 & -2manx & -2a^2qm \\ -2ma.. & & -2alp\ \ .. & +a^2p^2 \end{array}}}{2m}$. Qui valor in locum ipsius y in valore WL substitui potest.

Jam si $\sqrt{WL^2 + \beta^2}$ quaeratur, inquiretur in progressionem ipsius curvae.

Quod si vero data sit figura, et quaeratur alia seu BL cujus sit WL vel BR, item si data sit GL, et quaeratur BL, videndum an alteram ad alteram revocari queat.

Exempli causa si sit $BR^2 \sqcap 2ax \ddagger \frac{a}{b}x^2$, et $BL \sqcap y$. et $LR \sqcap \langle s \rangle$ fiet:

$$\odot\ 2ax \ddagger \frac{a}{b}x^2 + y^2 \sqcap s^2{}_{[,]}$$

aequatio determinanda ad duas ipsarum x et y radices aequales.

1 $\frac{\mathrm{WL}}{\mathrm{GL} \sqcap \beta}$ *L ändert Hrsg.* 2–6 $-\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{m}}\mathrm{q}$. | Ergo $\ddagger \mathrm{y} \ddagger \frac{\mathrm{lx} + \mathrm{ap}}{2\mathrm{m}}$. *streicht Hrsg.* | Ergo *L* 11 sit *(1)* $\mathrm{BR}^2 \sqcap \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} + \mathrm{m} + \boxed{\sqrt{\cdots}}$ etc. *(2)* BR^2 *L*

6 Die folgende Gleichung ist inkorrekt. Unter dem Wurzelzeichen müsste stehen: $l^2x^2 - 4manx - 4a^2qm - 4max^2 - 2alpx + a^2p^3$.

Si detur $WL \sqcap \gamma \dfrac{\sqrt{2ax \ddagger \frac{a}{b}x^2}}{a}$, erit $\dfrac{BR}{BL} \sqcap \dfrac{WL}{\beta \sqcap GW}$. Fiet ergo $BR \sqcap \dfrac{WLy}{\beta}$. Jam $BR^2 \sqcap \dfrac{2\gamma^2 y^2 \cancel{a} x \ddagger \dfrac{\gamma^2 y^2 \cancel{a} x^2}{b}}{a^{\cancel{2}}\beta^2}$. Unde

$$☽\ 2\gamma^2 xy^2 \ddagger \frac{\gamma^2}{b}x^2y^2 + a\beta^2y^2 \sqcap s^2\beta^2 a.$$

Determinata autem formula $\odot$ ad duas radices aequales etiam determinata est formula ☽.

Si autem GL detur $\sqcap \gamma \dfrac{\sqrt{2ax \ddagger \frac{a}{b}x^2}}{a}$[,] ergo $WL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax\gamma^2 \ddagger \frac{a}{b}x^2\gamma^2 - \beta^2a^2}}{a}$. Ergo $BR^2 \sqcap \dfrac{2\cancel{a}y^2x\gamma^2 \ddagger \frac{\cancel{a}}{b}x^2\gamma^2y^2 - \beta^2a^{\cancel{2}}y^2}{\beta^2a^{\cancel{2}}}$.

Unde: $2b\gamma^2x\boxed{y^2} \ddagger \dfrac{x^2\gamma^2}{\cancel{b}}\boxed{y^2}\boxed{-\beta^2a\,y^2 + \beta^2ay^2} \sqcap bs^2\beta^2a.$

Unde patet res memorabilis quando curva quaeritur, semper ipsius y quadratum addendum rursus destrui ac proinde facilius inveniri curvam homogeneam quam quadraturam. Porro haec aequatio videtur facilius posse determinari ad duas radices aequales; nam si secundum y^2 ordinetur, jam est determinata ad duas radices aequales, quia aequatio est pura, omnis autem aequatio pura est ad duas radices aequales. Hinc tantum

---

13 Imo falsum est aequationem puram duas habere radices aequales cum habeat oppositas.

1 Si | qvaeris *ändert Hrsg.* | WL ⊓ *L* 2 BR² ⊓ *(1)* $\dfrac{2\beta xy^2 \ddagger \frac{\beta}{1}x^2y^2}{\beta^2a^2}$ *(2)* $\dfrac{2\beta xy^2 \ddagger \frac{\gamma}{1}x^2y^2}{\beta^2a^2}$ *(3)* $\dfrac{2\gamma^2y^2\cancel{a}x \ddagger \gamma^2y^2\cancel{a}x^2}{a^{\cancel{2}}\beta^2}$ *L* 6 autem *(1)* qvaeratur *(2)* GL *L* 13 aeqvales *(1)* Sed in his puto esse *(2)* Hinc *L*

---

1 γ: Homologe Dreieckseiten werden hier direkt zueinander in Beziehung gesetzt. Aus dem Verlauf der Rechnung ergibt sich, dass $\gamma = \dfrac{a\beta}{y}$ gelten muss. 6 Hier wird ein Tangentenabschnitt mit Hilfe von γ zur Subnormalen BR in Beziehung gesetzt. Die korrespondierenden Dreieckseiten in *Fig. 1* sind nicht homolog. 13 omnis: Die folgende Behauptung ist falsch, wie Leibniz selbst am Rand vermerkt.

determinanda x ad duas radices aequales. Sed ego jam in his errorem esse puto. Nam alioquin et quadraturae semper darentur.

Aequatio $2b\gamma^2 xy^2 \mp \gamma^2 x^2 y^2 - ab\beta^2 s^2 \sqcap 0$[,] ut determinetur ad duas radices aequales, ordinetur primum secundum x, fiet: $x^2 \mp 2bx \pm \dfrac{ab\beta^2}{\gamma^2 y^2} s^2 \sqcap 0$. Conferenda cum hac

$$\begin{array}{l}
+\,x \quad -\,e \qquad\qquad \sqcap 0\\
+\,x \quad -\,e \qquad\qquad \sqcap 0\\
\hline
+\,x^2 \; - \; 2ex\,[+]\,e^2 \;\sqcap 0.
\end{array}$$

Sed malum in eo esse video quod praeter capitales x, et y. non nisi una in aequatione data est incognita s. Et tamen collationes instituendae sunt duae. Cum contra in aequatione tangentium directa, ubi non nisi una instituenda sit aequatio semper duae incognitae v, et s. offerantur. Ergo hic pro x ponamus: $z + \omega$. Fiet:

$$\begin{array}{l}
z^2 + 2\omega z + \omega^2 \qquad\qquad \sqcap 0.\\
\quad \mp 2b \,..\, \mp 2b\omega\\
\qquad\qquad \pm \dfrac{ab\beta^2}{\gamma^2 y^2} s^2
\end{array}$$

Conferenda cum $z^2 - 2ez + e^2 \sqcap 0$. Fiet: $e \sqcap -\omega \pm b$. et $e^2 \sqcap \omega^2 \mp 2b\omega + b^2$, ergo $b \sqcap \pm \dfrac{a\beta^2 s^2}{\gamma^2 y^2}$, sive $\dfrac{s^2}{y^2} \sqcap \pm \dfrac{\gamma^2 b}{a\beta^2}$, sive $\dfrac{s}{y} \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm \dfrac{b}{a}}$. Quae conclusio rursus absurda est. Habetur enim valor ipsius s ante tempus.

An forte sic: $x \sqcap z + \omega$ et $y \sqcap v + \dfrac{c}{a}\omega$. Unde:

$$\begin{array}{l}
z^2 + 2\omega z + \omega^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \sqcap 0.\\
\quad \mp 2b.. \mp 2b\omega\\
\qquad\qquad \pm \dfrac{ab\beta^2 s^2}{\gamma^2 v^2 + 2\gamma^2 \dfrac{c}{a} v\omega + \gamma^2 \dfrac{c^2}{a^2}\omega^2}
\end{array}$$

Unde post collationes fiet: $b \sqcap \pm \dfrac{\dfrac{a\beta^2 s^2}{\gamma^2}}{v^2 + \dfrac{2c}{a} v\omega + \dfrac{c^2}{a^2}\omega^2}$. Sed jam video ista esse erronea, quia

7 f. $\sqcap$ 0. *(1)* unde *(2)* Sed *L* 14 $\dfrac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}$ *L, ändert Hrsg.*

ita non x. et y. sed z seu $x-\omega$, et v, seu $y-\frac{c}{a}\omega$ ad duas radices aequales determinabuntur.

An sic: $\frac{GL}{\sqrt{GL^2-\beta^2}} \sqcap \frac{s}{v-x}$ scilicet ponendo: $AR \sqcap v$. et $AB \sqcap x$.

Itaque $\frac{GL^2}{GL^2-\beta^2} \sqcap \frac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et pro GL^2 ponendo ejus valorem, hoc loco: $2ax \mp \frac{a}{b}x^2$ fiet $\frac{2ax \mp \frac{a}{b}x^2}{2ax \mp \frac{a}{b}x^2 - \beta^2} \sqcap \frac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et in hac aequatione quod mirum non nisi una incognita capitalis est, x. Sed malum, quod non ita veniri potest ad duas radices aequales. Haec aequatio si jungatur superiori: $2ax \mp \frac{a}{b}x^2 \sqcap \frac{s^2\beta^2}{y^2}$, ad duas radices aequales determinandae poterit inde fieri aequatio, in qua duae sint incognitae capitales ad duas radices aequales determinandae, et duae incognitae incidentes, s et v. Sed vereor tamen tunc quoque ne res non succedat, quia una aequatio alteri perfecte inserenda est, id est elidenda incognita.

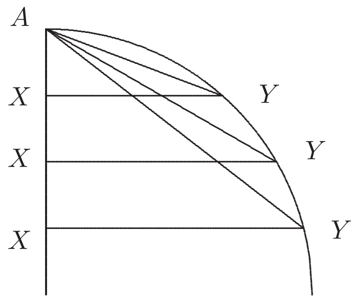
Nota[:] si junctis inter se duabus aequationibus elidere velis x, restabit una tantum incognita duarum radicum aequalium. Et ea determinata elidetur s. vel v. et habebitur aequatio in qua duae tantum supersint y et v. vel y. et s. Quarum proinde relatio habebitur. Et tale problema solvi poterit revolutione curvae, ut alibi docui ubi *de Geometria arcana et Methodo Tangentium inversa*, et *Trochoeidibus* Xb. 1674. Nimirum ad descriptiones illas ne puncto quidem fixo absolute opus esse arbitror. Omnia ergo problemata Methodi tangentium inversae ad curvarum in rectum extensiones reducerentur.

Notandum est unum hactenus a me omissum, et ut arbitror a Cartesio animadversum, non esse necesse, ut incognitae x. et y. seu capitales sint ordinata et abscissa, imo

2 sic *(1)* $\frac{\mathrm{GL}}{\beta} \sqcap \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{y}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{GL}}{\sqrt{(a)\ \beta\ (b)\ \mathrm{GL}^2-\beta^2}}$ *L* 8 incognitae *(1)* supernumerariae *(2)* incidentes *L* 11 si *(1)* elidere velis x, habebis ope primae, *(2)* et *(3)* junctis *L* 14 curvae, *(1)* qvaerendo curvam *(2)* ut *L*

4 $2ax \mp \frac{a}{b}x^2$: Leibniz vergisst den Faktor $\frac{\gamma^2}{a^2}$ für diesen Ausdruck. Dies wirkt sich auch auf die zwei folgenden Gleichungen aus. 14 alibi: vgl. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, VII, 3 N. 39, insbesondere S. 570–574; *Trochoeidibus*: N. 28 u. 29. 18 a Cartesio: vgl. R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–414 [Marg.] (*DO* II S. 514–517). Zum Übergang von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Koordinaten vgl. auch Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176 f. [Marg.]

aliquando esse satius, ut sint rectae non parallelae rectangulae, sed parallelae obliquae, imo et convergentes.



[*Fig. 2*]

Ponendo $AX \sqcap x$, et $AY \sqcap y$. ita aequatio ad circulum est: $2ax \sqcap y^2$, quae alioquin ad parabolam. Ita fiet ut incognitae magis varientur, et facilius ad duas radices aequales aequationes determinentur.

Notanda valde haec schedula, cum tot nova obtulerit.

Nota: an curva quadam data punctum fixum capax demissam ad tangentes, quales postulamus, not ita inquirendum ut initio feceram in schediasmate *de Geometria arcana et methodo Tangentium inversa* sed ut in schediasmate *de Trochoeidibus*, ubi ex puncto assumto calculo.

4 Bei Leibniz hat *Fig. 2* die Gestalt einer Parabel; sie war im vorausgegangenen Abschnitt als allgemeine Kurve aufgefasst; nun wird sie speziell als Kreisbogen interpretiert. Bei Setzung von $y = AY$ (anstelle von $y = XY$) ergibt sich $y^2 = AX^2 + XY^2 = 2ax$. Diese Gleichung beschreibt eine Parabel.

4. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLUM SEU INQUISITIO IN METHODUM QUA CARTESIUS INVENIT PROPRIETATES SUAROM OVALIUM LIB. 2. GEOM.

Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 1–4. 2 Bog. 2°. 7 S. Bl. 4 v° leer. 2 Teile (Teil 1 auf Bl. 1–2, Teil 2 auf Bl. 3–4). Zusammenhang der Teile durch Kustode gesichert. Überschriften ergänzt.
Cc 2, Nr. 832

[*Teil 1*]

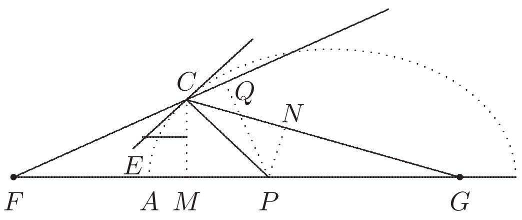
Xb. 1674.

Methodi Tangentium inversae exemplum seu inquisitio in Methodum qua Cartesius invenit proprietates suarum ovalium lib. 2. *Geom.*

11 *Darunter:* Adde alia huc pertinentia de descriptione trochoidis curvae.

1,12 alia | de *streicht Hrsg.* | huc *L*

12 f. Cartesius ... *Geom.*: Zu den Eigenschaften der Cartesischen Ovale vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 55–59, zur Erzeugung der Ovale *a. a. O.* S. 50–55. An den angegebenen Stellen schildert Descartes nicht, wie er die Eigenschaften gefunden hat. Hierzu vgl. N. 33. 14 huc pertinentia: vgl. N. 28 u. N. 29, sowie VII, 3 N. 39 S. 557 f. u. S. 572–574 zu Überlegungen von Leibniz zu Trochoiden.



[*Fig. 1*]

Esto Curva AEC. directrix $FAMPG$. ordinata CM. perpendicularis CP. recta ex puncto determinato F ducta ad punctum curvae quodlibet FC. et ab alio puncto determinato ducta CG. Ex P. ducatur perpendicularis ad FC. nempe PQ. et alia ad GC. nempe PN. Ponatur jam evenire, ut PQ sit ad PN, in data ratione d ad e. Ac proinde, ut a Cartesio in dioptricis ostensum est, si AEC sit superficies ex vitro, omnes radios ex puncto F ad quodlibet curvae punctum C. tendentes, refractum iri ad G. posito d ad e esse rationem quae refractiones metitur. Quaeritur jam quaenam sit curva hujus naturae.

Cum Cartesio AM vocemus y. et FC vocemus $c + z$. Esto $AF \sqcap f$. Ergo $FM \sqcap f + y, GA \sqcap b$. Triangula rectangula PFQ et CMF similia sunt[,] unde $\dfrac{CF}{CM} \sqcap \dfrac{FP}{PQ}$[,] unde $PQ \sqcap \dfrac{FP \frown CM}{CF}$. Item $\bigtriangledown^{\text{la}}$ rectangula PNG et CMG [similia].

4 CG. *(1)* Ex punctis FQ *(2)* Ex *L* 4 perpendicularis *(1)* in radium *(2)* ad *L* 6 vitro *(1)* FC radius; *(2)* omnes *L*

---

1 *Fig. 1*: Die Figur, mit sämtlichen Punktbezeichnungen, übernimmt Leibniz aus Descartes, *a. a. O.* S. 43 (vgl. S. 48, S. 57 und S. 58). 6 in dioptricis: In R. DESCARTES, *La Dioptrique*, 1637, (lateinische Ausgabe, *Dioptrice*, 1644) findet sich keine Ausführung zu den spezifischen Refraktionseigenschaften der Ovale. Zu Refraktions- und Reflexionsphänomenen allgemein vgl. *La Dioptrique*, 1637, S. 12–25 u. S. 89–121 (*Dioptrice*, 1644, S. 93–105 u. S. 149–177, vgl. *DO* VI S. 93–105 u. S. 165–196 bzw. S. 590–595 u. S. 622–634). Die Refraktionseigenschaften werden in der *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 55–59 ausführlich behandelt. Leibniz bezieht sich vermutlich auf S. 58 *a. a. O.* Dort folgert Descartes aus $PN : PQ = d : e$, dass Strahlen wie hier FC auf G gelenkt werden, und schließt folgende Bemerkung an: „Quemadmodum ex iis, quae in Dioptrica tradidi, manifestissimum est.“ 9 Cum Cartesio: Für die Streckenbezeichnungen (inklusive y, jedoch mit Ausnahme von f) vgl. DESCARTES, *a. a. O.* S. 43–44 und S. 57–59. Der gesamte Text bis $\dfrac{d}{e}$ (S. 30 Z. 2) ist aus S. 58–59 durch Paraphrase gewonnen. Descartes gibt dort die Ovale vor und beweist die Refraktionseigenschaften. Leibniz versucht umgekehrt, bei Vorgabe der Refraktionseigenschaften eine Gleichung für das Oval zu finden.

Unde $PN \sqcap \dfrac{GP \frown CM}{CG}$. $CM \sqcap \sqrt{z^2+2cz\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\end{array}-y^2-2fy.}$

$\dfrac{PQ}{PN} \sqcap \dfrac{d}{e} \sqcap \dfrac{FP \frown \cancel{CM}}{CF} \smile \dfrac{GP \frown \cancel{CM}}{CG} \sqcap \dfrac{FP \frown CG}{CF \frown GP} \sqcap \dfrac{d}{e}$.

Jam $FP \sqcap f+v$. $MG \sqcap b-y$. $CG^2 \sqcap z^2+2cz\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\end{array}\boxed{-y^2}-2fy+b^2-2by\boxed{+y^2}$. $GP \sqcap b-v$.

Ergo $e, \frown f+v, \frown \sqrt{z^2+2cz\begin{array}{l}-2fy\\-2b\,..\end{array}\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\\-b^2\end{array}} \sqcap c+z, \frown d, \frown b-v$

sive $z^2+2cz\begin{array}{l}-2fy\\-2b\,..\end{array}\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\\-b^2\end{array} \sqcap \dfrac{c+z,d,b-v}{e,f+v},\square.$ ⊙

Jam $CM^2+MP^2 \sqcap CP^2$, sive $z^2+2cz\boxed{-y^2}-2fy\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\end{array}+v^2-2vy\boxed{+y^2} \sqcap s^2$ ponendo $CP \sqcap s$. Porro his duabus aequationibus junctis elidi poterit y nempe ex priore $y \sqcap \dfrac{-\dfrac{c+z,d,b-v,}{e,f+v,}\square,,\begin{array}{l}+c^2\\-f^2\\-b^2\end{array}+z^2+2cz}{+2f+2b}$. Quo valore in posteriorem inserto aequationem, sola incognitarum Capitalium restabit z. Ordinetur ergo aequatio secundum, z, ubi duae erunt incognitae incidentes v. et s. quae invenientur conferendo aequationem productam (post elisam y) cum aequatione duarum radicum aequalium $z^2-2ez+e^2[\sqcap 0]$. Atque ita invenietur v, quod sufficit. Inventus valor ipsius v. inseratur in aequatione ⊙. et habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z et y, nempe capitales, et habebitur

1 $\sqcap \dfrac{\mathrm{GP} \frown \mathrm{CM}}{\mathrm{CG}}$. *(1)* FM $\sqcap$ f *(2)* CM $\sqcap \boxed{\mathrm{c}^2}-2\mathrm{cz}+\mathrm{z}^2\boxed{-\mathrm{c}^2}-2\mathrm{cy}-\mathrm{y}^2$ *(3)* $\mathrm{c}^2\mathrm{z}^2-2$ *(4)* CM *L*
15 secundum, z, *(1)* |et *streicht Hrsg.*| confer *(2)* ubi *L* 16 aeqvationem *(1)* hanc cum ista *(2)* productam *L* 19 qva *(1)* sola ex incognitis restabit *(2)* solae *L*

7 $-b^2$: Es müsste $+b^2$ heißen. Der Fehler geht in die Gleichung ⊙ und über sie in die Überlegungen bis S. 31 Z. 5 ein. Leibniz stellt keinen Fehler fest, da er die Betrachtung ins Qualitative wendet.
19 habebitur: Leibniz irrt in der Annahme, er habe die gestellte inverse Tangentenaufgabe hier im wesentlichen gelöst.

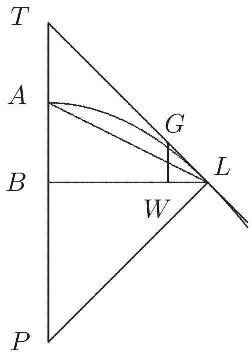
aequatio naturam explicans figurae quaesitae, unde et modus eam describendi non difficulter habetur. Ex his apparet inquisitionem istam methodi tangentium inversae esse ex facillimis, reducitur enim ad aequationem unius incognitae capitalis ad duas radices aequales determinandae, duabus existentibus incognitis incidentibus. Eadem methodo non dubitem, quae a Cartesio omissa sunt.

Scilicet cum una ex vitri superficiebus data est, modo illa sit aut plana, aut a circulo, aut sectionibus Conicis effecta, quomodo altera superficies confici debeat, ut omnes radios ab uno puncto venientes rursus ad aliud punctum colligat. De quo ille[:] *malo alios id quaerere, ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum repererint, eo pluris inventionem rerum hic demonstratarum aestiment.*

Ego ita arbitror, id quaerendum potius, ut superficiem in qua non tantum id in uno puncto dato contingat, sed ut caetera quoque puncta parum inde dissita quam proxime ejusdem sint naturae, id est in alio puncto sensibili omnes radios colligant. Et quaerenda est ejusmodi circularium compositio, quae id proxime praestet. Quoniam autem refractiones sunt inaequales, ut a Neutonio demonstratum est, hinc omni cura in id incumbendum, ut specula ad rem pertinentia elaborentur, eaque quod sufficere arbitror circularia. Inquirendum etiam an inaequalitas refractionis ad regulam revocari possit, et figura aliqua ei accomodari. Sed in haec alias inquiremus, nunc ad Methodum Tangentium inversam redeo; quam nemo hactenus tradidit; cum sit tamen apex Geometriae.

3 capitalis *(1)* ad methodum tangentium inversam reducendae *(2)* ad *L* 9 repererint *(1)* tanto magis *(2)* eo *L*

5 a Cartesio omissa: Descartes erwähnt innerhalb des Abschnittes über die Eigenschaften der Ovale und ihren Zusammenhang mit dem Kurvenverlauf u. a. an den folgenden Stellen Auslassungen seinerseits: „omitto multas alias refractiones“, „quod in Dioptricis omisi“, und „possem quoque ulterius progredi“ (*a. a. O.* S. 57, 59 u. 65). 6–10 Scilicet ... *aestiment*: vgl. R. Descartes, *a. a. O.*, S. 65. 15 a Neutonio: vgl. I. Newton, *New theory about light and colours*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 80 vom 19./29. Februar 1671/1672, S. 3075–3087, insbesondere S. 3079 und S. 3081.



[*Fig. 2*]

Exempli causa quaeritur figura, in qua c r e m e n t a sint in ratione ordinatarum reciproca seu $WL \sqcap \dfrac{\beta a}{y}$. $BL \sqcap y$. $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BP}{BL \sqcap y}$ sive $\dfrac{\frac{\beta a}{y}}{\beta} \sqcap \dfrac{BP}{y}$. unde $BP \sqcap a$. Quaerenda ergo est figura in qua BP sit semper constans; hoc per quadraturas nullo negotio fit, quia Methodus tangentium inversa reducitur ad quadraturas. Nam semiquadrata ipsarum BL sunt summae omnium BP. Sed ut sine quadraturis idem tentemus fiet jam $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Item: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Pro y^2 in posteriore substituatur ejus valor ex priore, nempe $s^2 - a^2$, et fiet, $v^2 - 2vx + x^2 \boxed{+s^2} - a^2 \sqcap \boxed{s^2}$. In qua cum s. destruatur, et hoc unum restet, esse scilicet $v - x$ aequale ipsi a. patet nihil hinc duci posse.

Ponatur ergo $WL \sqcap \gamma$. constans, erit $BP \sqcap \dfrac{WLy}{\beta} \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}y$.

Adeoque $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam etiam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Unde $y^2 \sqcap s^2 - v^2 +$

2 qva *(1)* diffe *(2)* c r e m e n t a *L* 3 seu *(1)* WL $\sqcap \dfrac{\beta a^2}{y}$. ponendo BL $\sqcap$ y. *(a)* W *(b)* $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BP}{BL \sqcap y}$, erit: $\dfrac{\frac{\beta a^2}{y^2}}{\beta} \sqcap \dfrac{BP}{y}$ sive $\dfrac{a^2}{y} \sqcap$ BP *(2)* WL *L*

2 f. figura ... reciproca: Es handelt sich um eine Parabel; vgl. auch VII, 3 N. 39 S. 560–562, Cc 2, Nr. 831, sowie im vorliegenden Band N. 3 und N. 5. 7 $v^2 \ldots \sqcap s^2$: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–41.

$2vx - x^2$ et supra $y^2 \sqcap \dfrac{s^2}{\dfrac{\gamma^2}{\beta^2} + 1} \sqcap \dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2}$ et aequatio fiet nova inter hos duos valores, nempe:

$$\begin{array}{llll} x^2 - 2vx & + & v^2 & \sqcap 0. \\ & & -s^2 & \\ & & +\dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2+\beta^2} & \end{array}$$

Sed haec quoque aequatio nondum ad duas aequales radices determinari, sive cum hac: $x^2 - 2ex + e^2$ comparari potest. Fieret enim $x^2 - 2vx + v^2 \sqcap 0$. Unde $-s^2 + \dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap 0$. Ergo $\gamma^2 + \beta^2 \sqcap \beta^2$. Quod est absurdum. Non ergo ita licet venire ad determinationem. Ergo pro x pone $z + d$. Fiet:

$$\begin{array}{lll} z^2 & +2dz & +d^2 \\ & -2v.. & -2vd \\ & & +v^2 \\ & & -s^2 \\ & & +\dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2+\beta^2} \end{array}$$

Sed inde sequetur idem.

Quid ergo si ab initio AL vocemus ω. et pro y^2 substituamus $\omega^2 - x^2$, unde ex aequatione $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $\gamma^2\omega^2 - \gamma^2x^2 + \beta^2\omega^2 - \beta^2x^2 \sqcap \beta^2s^2$, et ex altera $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $v^2 - 2vx\boxed{+x^2} + \omega^2\boxed{-x^2} \sqcap s^2$. Adeoque fiet:

$$x \sqcap \frac{-s^2 + \omega^2 + v^2}{2v} \text{ et } x^2 \sqcap \frac{s^4 - 2s^2\omega^2 - 2s^2v^2, +\omega^4 + 2\omega^2v^2 + v^4}{4v^2}.\text{ Unde}$$

$$\begin{array}{l} 2\,4\,\gamma^2v^2\omega^2 - \gamma^2 s^4 + 2\gamma^2 s^2\omega^2 + 2\gamma^2s^2v^2 - \gamma^2\omega^4 \boxed{-2\gamma^2v^2\omega^2} - \gamma^2v^4 + 2\,4\,\beta^2v^2\omega^2 \sqcap \boxed{2\,4\,\beta^2v^2s^2}. \\ \qquad -\beta^2.. \quad +..\beta^2 \qquad \boxed{+..\beta^2..} \quad -\beta^2.. \quad \boxed{-2\beta^2v^2\omega^2} - \beta^2.. \\ \qquad\qquad [\;] \quad -2\beta^2.. \end{array}$$

20–34,1 $\boxed{2\,4\,\beta^2 v^2 s^2}$ | et ord *streicht Hrsg.* | unde *L*

6 ad duas aequales radices: vgl. DESCARTES, *a. a. O.* S. 44–45. 1 $-2\beta^2$..: Der Ausdruck steht bei Leibniz über der Gleichung. Er ist das Resultat der Eliminierung von $2\beta^2v^2s^2$ auf der rechten Seite der Gleichung.

Unde ordinando:

$$\omega^4 \quad * \quad \left.\begin{array}{l} +2\gamma^2v^2 \\ +2\gamma^2s^2 \\ +2\beta^2s^2 \\ \underline{+2\beta^2v^2} \\ -\gamma^2 \\ -\beta^2 \end{array}\right\} \omega^2 \quad \left\{\begin{array}{l} -\gamma^2s^4 \\ -\beta^2s^4 \\ -2\beta^2s^2v^2 \\ +2\gamma^2s^2v^2 \\ -\gamma^2v^4 \\ \underline{-\beta^2v^4} \\ -\gamma^2 \\ -\beta^2 \end{array}\right. \quad \sqcap 0.$$

$$\text{sive} \quad \omega^4 \quad * \quad \begin{array}{l} -2v^2 \\ -2s^2 \end{array} \omega^2 \quad \begin{array}{l} +s^4 \\ +v^4 \\ +\dfrac{2\beta^2-2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2}s^2v^2 \end{array} \quad \sqcap 0.$$

Unde $\cancel{4}\omega^2 \sqcap \cancel{4}v^2 + \cancel{4}s^2$ multiplicando per numeros progressionis Arithmeticae methodo Huddeniana. Debebit esse $\omega^2 + s^2 \sqcap v^2$.

$$\begin{array}{rl} \text{Sumta jam aequatio} & \omega^2 + \quad 2e\omega + \quad e^2, \qquad \text{multiplicetur per } \omega^2 + l\omega + am \\ & \underline{\omega^2 + \qquad l \;..\; + am \qquad\quad} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} & +\, am\omega^2 + 2ame\omega + ame^2 \\ +\,\omega^4 + \quad l\omega^3 & +\; 2le.. + \quad le^2.. \\ +\, 2e... & +\quad e^2.. \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quam aequationem ut cum proposita conferamus, fiet: $l \sqcap -2e$. quia $l + 2e \sqcap 0$. Item $le^2 + 2ame \sqcap 0$. sive $-le \sqcap +2am$. sive $+\cancel{2}e^2 \sqcap \cancel{2}am$, sive $m \sqcap \dfrac{+e^2}{a}$. Unde $ame^2 \sqcap +e^4$. et $am + 2le + e^2$ erit $e^2\ -4e^2 + e^2\ \sqcap\ -2e^2$. Unde aequatio posterior correcta dabit: $\omega^4 \ * \ -2e^2\omega^2 \ * \ +e^4$. Quam conferendo priori, fiet: ex Terminis tertiis $v^2 \sqcap e^2 - s^2$. Unde

14 f. Unde ... v^2. *erg. L* 1 erit *(1)* $+e^2\boxed{-e^2}+2le\boxed{+e^2}$. et $2le \sqcap -4e^2$. unde aeqvatio posterior correcta erit: *(2)* $\sqcap e^2 \ldots \sqcap -2e^2$ *(a)* $\omega^4 * -4e^2 * -e^4$. *(b)* Unde *L* 2 fiet: *(1)* $e \sqcap \sqrt{v^2+s^2}$ *(2)* ex *L*

14 f. methodo Huddeniana: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 436–439 u. 507–516. Das Verfahren von Hudde wird auch S. 37 Z. 13 f., S. 37 Z. 19, S. 40 Z. 15–19 und S. 41 Z. 2 verwendet.

$v^4 \sqcap e^4 - 2e^2s^2 + s^4$. Unde ex ultimis: $s^4 \boxed{+e^4} - 2e^2s^2 + s^4 + \dfrac{2\beta^2 - 2\gamma^2, \frown e^2s^2 - s^4}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap \boxed{e^4}$.

Divisisque omnibus per s^2, multiplicatisque per $\gamma^2 + \beta^2$, et, pro e ponendo ω, fiet:

$$\begin{array}{ll} +\,2\gamma^2 s^2 & -2\gamma^2\omega^2 \quad \text{, fiet } 4\gamma^2 s^2 \sqcap 4\gamma^2\omega^2, \text{ sive } s \sqcap \omega. \\ +2\cancel{4}\beta^2.. & -2\beta^2 \\ -\ 2\beta^2.. & +2\beta^2 \\ +\ ..\gamma^2.. & -2\gamma^2 \end{array}$$

Quod significat AL. TL. PL. esse aequales, et ideo ipsam AL non curvam esse sed rectam. Imo error aliquis admissus dum adhibeo $\omega^2 + 2e\omega + e^2$, loco $\omega^2 - 2e\omega + e^2$.

$$\begin{array}{rrrrr} & \omega^2 - & 2e\omega + & e^2 & \\ & \omega^2 + & l\omega + & am & \\ \hline & +\,am\omega^2 & -\,ame\omega & +\,ame^2 & \\ +\,\omega^4 + & l\omega^3 - & 2le.. & + & le^2\,. \\ & -\,2e... & + & e^2.. & \end{array}$$

$$\text{conferenda cum}: \quad \begin{array}{lll} \omega^4 * & -\,2v^2\omega^2 * & +\,s^4 \\ & -\,2s^2 & +\,v^4 \\ & & +\,\dfrac{2\beta^2 - 2\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} s^2 v^2 \end{array}$$

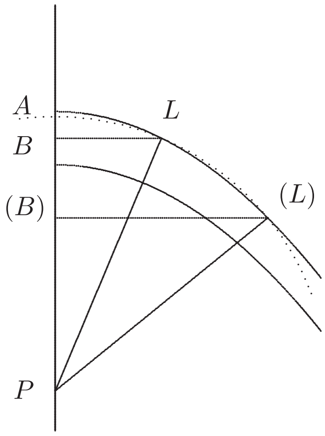
Unde $l \sqcap 2e$. $\quad ame \sqcap le^2$, sive $am \sqcap le$. sive $am \sqcap 2e^2$. Unde $ame^2 \sqcap 2e^4$.

$am - 2le + e^2 \sqcap 2e^2 - 4e^2 + e^2 \sqcap -e^2$. Unde $e^2 \sqcap 2v^2 + 2s^2$, et $v^2 \sqcap \dfrac{e^2 - 2s^2}{2}$.

20–36,3 $\sqcap \dfrac{\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{s}^2}{2}$ *(1)* BP $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$BL *(a)* $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$ *(b)* (B)P $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$(B)(L) *(2)* | Generalia *erg.* | BP $\sqcap$ AP $-$ AB | (B)P $\sqcap$ AP $-$ A *(B) gestr.* | AB $\sqcap \sqrt{\mathrm{AL}^2 - \mathrm{BL}^2}$. | A(B) $\sqcap \sqrt{\mathrm{A(L)}^2 - \mathrm{(B)(L)}^2}$ *gestr.* | itaqve *L*

13 $-ame\omega$: Richtig wäre $-2ame\omega$. Der fehlerhafte Term wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung in Z. 18 aus.

G e n e r a l i a



[*Fig. 3*]

$BP \sqcap AP - AB$. $AB \sqcap \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Itaque $BP \sqcap AP - \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Jam $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$. Pro PB substituatur ejus valor, fiet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 - BL^2 \sqcap BP^2$. Ergo $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$, faciet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 \boxed{-BL^2 + BL^2} \sqcap PL^2$ sive $AP^2 + AL^2 - PL^2 \sqcap 2AP \frown \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Unde $AP^4 \boxed{+2AP^2, AL^2} - 2AP^2, PL^2,, + AL^4 - 2AL^2, PL^2 + PL^4 \sqcap$ $2 \boxed{4} AP^2, AL^2 - 4AP^2, BL^2$, sive $v^4 - 2v^2s^2 + \omega^4 - 2\omega^2s^2 + s^4 - 2v^2\omega^2 + 4v^2y^2$ [$\sqcap 0$]. Et haec quidem aequatio omnibus curvis est communis. Nam $BP \sqcap v - AB$. $AB \sqcap \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Ergo $BP \sqcap v - \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Jam $BP^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo pro BP sumendo ejus valorem, erit $v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 \boxed{-y^2, +y^2} \sqcap s^2$. Adeoque $\omega^2 + v^2 - s^2 \sqcap 2v\sqrt{\omega^2 - y^2}$. sive

3 $-\sqrt{\mathrm{AL}^2 - \mathrm{BL}^2}$ | $\mathrm{(B)P} \sqcap \mathrm{AP} - \sqrt{\mathrm{A(L)}^2 - \mathrm{(B)(L)}^2}$ *gestr.* | Jam *L* 4 PL^2. *(1)* et $\mathrm{P(B)}^2 + \mathrm{(B)(L)}^2 \sqcap \mathrm{PL}^2$ Unde $\mathrm{AL}^2 - \mathrm{BL}^2 + \mathrm{BL}^2$ *(2)* Jam *(3)* pro *L* 9 aeqvatio | omnis *ändert Hrsg.* | curvis *L*

1 G e n e r a l i a : Der folgende Textabschnitt ist vom vorangehenden Abschnitt (S. 35 Z. 9–18) durch eine Linie getrennt.

$$\begin{array}{llllll} \omega^4 & \overset{-}{\boxed{+}}\, 2v^2\omega^2 & + v^4 & \sqcap & \boxed{4v^2\omega^2} & - 4v^2y^2 \\ & - \; 2s^2 .. & - 2v^2s^2 & & & \\ & & + s^4 & & & \end{array}$$

ut ante, ut de calculo possimus esse huc usque securi. Nunc praeter hanc aequationem alia quaerenda est, ex natura problematis dati, ut scilicet alterutra incognitarum capitalium, ω, vel y. elidatur. Ponamus ergo BP esse quantitatem constantem, fiet: $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo $y^2 \sqcap s^2 - a^2$, unde fiet aequatio

$$\begin{array}{llll} \omega^4 & - 2v^2\omega^2 & + v^4 & [\sqcap 0]. \\ & - 2s^2 \ldots & - 2v^2s^2 & \\ & & \underline{+ s^4} & \\ & & - 4s^2v^2 & \\ & & + 4a^2v^2 & \end{array}$$

Unde methodo Huddenii fiet: $\cancel{4}\omega^2 \sqcap \cancel{4}s^2 + \cancel{4}v^2$. Figura autem, ut aliunde constat, est parabola, et in parabola $v^2 \sqcap a^2 + 2ax + x^2$ et $s^2 \sqcap 2ax + a^2$. Ergo $s^2 + v^2 \sqcap 2a^2 + 4ax + x^2$ sed $\omega^2 \sqcap 2ax + x^2$. Fiet ergo aequatio absurda inter $2a^2 + 2\boxed{4}ax\boxed{+x^2}$, et $\boxed{2ax + x^2}$ seu $2a^2 + 2ax \sqcap 0$. Absurdum.

Causa absurditatis in arduo est et latet in abditissimis artis Analyticae recessibus. A posteriori sane video ideo quidem has solutiones non sufficere, quia patet, explicationem ipsius y non ingredi in totam aequationem, unde si Huddenii more multiplicetur, manifestum est nihil referre, qualis sit terminus ultimus; is enim semper destruetur, ideoque nihil quoque referet qualis sit y. Quodsi loco aequationis $a^2 + y^2 \sqcap s^2$, hanc adhibeas, $a^2 \sqcap v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 - y^2$. Sive $2\boxed{4}v^2\omega^2 - 2\boxed{4}v^2y^2 \sqcap \omega^2 + v^2 - a^2 - y^2, \square$.

$$\begin{array}{lllllll} \omega^4 & \boxed{+ 2v^2}\omega^2 & + v^4 & \boxed{- 2v^2y^2} & + y^4 & - 2y^2\omega^2 & \sqcap 0\,. \\ & - 2a^2 & - 2a^2v^2 & - 2a^2 .. & & & \\ & & + a^4 & & & & \\ & - 2v^2 .. & & + 2v^2 .. & & & \end{array}$$

8+13 v^4. *(1)* Sed hanc aeqvationem secundum ω ordinatam, conferendam cum *(2)* | $\sqcap 0$ *erg. Hrsg.* | unde *L* 21 adhibeas, *(1)* $a^2 + y^2$ *(2)* $a^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2$, aut etiam si duas has aeqvationes jungas inter se, fiet: $2a^2 + y^2 \sqcap s^2 + v^2 - 2vx + x^2$ *(3)* a^2 *L* 22 f. $-y^2, \square$. | $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | ω^4 *L*

13 methodo Huddenii: vgl. Erl. zu S. 34 Z. 13 f. 19 Huddenii more: vgl. Erl. zu S. 34 Z. 13 f.

Possumus ergo etiam ω destruere, relicto y si velimus.

An forte in locum literae capitalis seu duos habentis valores aequales non licet substituere literas ejusdem valoris, et tamen determinare ad duas radices aequales. Sane Cartesius ait duabus datis aequationibus una $x^2 + v^2 - 2vy + y^2 - s^2$, et altera naturam curvae exprimente, valorem $v - \sqrt{s^2 - x^2}$ pro y. substitui posse, sed hujus rei ratio est, quia idem est ac si valor alius ipsius y. ex altera aequatione sumtus substitueretur. Cartesio hoc vel artificiose, vel quod ita unam semper regulam dare posset pro valore x. vel y. dissimulante. Necesse est ergo unam minimum aequationem dari in qua vel nullae sunt literae duplicis valoris, vel non nisi literae duplicis valoris, (una cum cognitis seu datis) sed haec conjicio.

NB potest fieri ut circulo curvam secante aequatio inde orta duas habeat radices aequales, et tamen circulus curvam non tangat, ut si circulus centro cum centro Ellipseos vel Hyperbolae communi describatur.

Nota aequationes in quibus una tantum incognitarum capitalium adhiberi nequeunt, eo ipso enim incognita capitalis fit dependens ab incidente v. g. in aequatione $a^2+y^2 \sqcap s^2$. et cessat habere duos valores.

12 aeqvales, | et *streicht Hrsg.* | et *L* 13 f. describatur. *(1)* Sed tunc etiam ipsae x et *(2)* Nota *L*

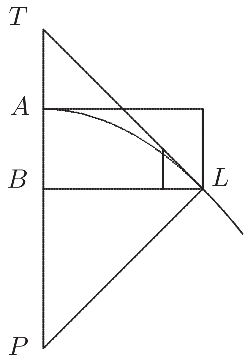
4 Cartesius ait: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 41.

[*Teil 2*]

Xb. 1674.

Pars II. inquisitionis in Methodum Cartesii qua invenit proprietates ovalium

Imo haec ratio nihili est, quia idem evenit in qualibet aequatione in methodo tangentium communi reducta ad unam incognitam capitalem. Praeclaro admodum consilio Cartesius adhibuit literam v.



[*Fig. 4*]

Nam cum opus habeat litera BP, manifestum est ipsam esse duplicem, nam in figura superiore habetur BP, et $(B)P$. Quod si ergo ei dedisset nomen, v. g. p. tunc habuisset tres literas duplicis valoris, p. x. y. At litera v, seu AP, est semper eadem, ergo $BP \sqcap v - x$. Patet non nisi duas esse literas duorum valorum. Nam v. et s. non nisi unum habent valorem, quando datur aequatio: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. quae est generalis. Et adhuc alia, $v - x \sqcap a$. Fit $x \sqcap v - a$. et $-2vx \sqcap -2v^2 + 2av$. et $x^2 \sqcap v^2 - 2av + a^2$. Unde $\boxed{v^2 - 2v^2 + 2av + v^2 - 2av} + a^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Quam patet amplius determinari non posse, tunc enim non nisi una incognita restaret.

Quod si elidere velis y. fiet $a + x - v. \sqcap 0$. Et haec si BP sit recta constans cum scilicet AL est parabola.

14 f. Qvam ... restaret *erg.* *L* 16 $\sqcap$ 0. *(1)* si eli *(2)* Si ponas BP $\sqcap \frac{\gamma}{\beta}$y $\sqcap$ v − x. *(3)* Et *L*

8 f. in figura superiore: s. *Fig. 3*.

Quodsi ponamus $BP \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}y$. tunc AL est linea recta; et fiet: $\dfrac{\gamma}{\beta}y \sqcap v - x$. Ergo $x \sqcap \dfrac{v\beta - \gamma y}{\beta}$. Unde $-2vx \sqcap \dfrac{-2v^2\beta + 2v\gamma y}{\beta}$, et $x^2 \sqcap \dfrac{v^2\beta^2 - 2v\beta\gamma y + \gamma^2 y^2}{\beta^2}$. Unde

$$\boxed{\beta^2 v^2}\ \boxed{-2\beta^2 v^2}\ \boxed{+2\gamma\beta v y}\ \boxed{+\beta^2 v^2}\ \boxed{-2\beta\gamma v y} + \gamma^2 y^2 + \beta^2 y^2 - s^2\beta^2 \sqcap 0.$$

Quae rursus non nisi duarum incognitarum[,] non ergo determinabilis.

Hinc ergo satis video hoc quidem casu elidendo x rediri in eadem, quae provenissent non adhibendo $v - x$.

Si sit $\sqrt{2ax} \sqcap v - x$. fiet: $2ax \sqcap v^2 - 2vx + x^2$. et fiet: $2ax + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Adeoque $x \sqcap \dfrac{s^2 - y^2}{2a}$, et $x^2 \sqcap \dfrac{s^4 - 2s^2y^2 + y^4}{4a^2}$. Et hunc valorem in aequationem generalem $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ inserendo, quia $-2vx \sqcap \dfrac{-\cancel{2}vs^2 + \cancel{2}vy^2}{\cancel{2}a}$, fiet:

$$4a^2v^2 - 4as^2v + 4avy^2 + s^4 - 2s^2y^2 + y^4 + 4a^2y^2 - 4a^2s^2. \sqcap 0.$$

et ordinando: $\odot$

$$\begin{array}{llll} y^4 & +\,4avy^2 & +\,4a^2v^2 & \sqcap 0. \\ & -\,2s^2.. & -\,4as^2v & \\ & +\,4a^2.. & +\,s^4 & \\ & & -\,4a^2s^2 & \\ \hline 4 & 2 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

multiplicando per 4.2.0. methodo Huddeniana, sequetur

$$\begin{array}{lll} 4y^2 & +\,8av & \sqcap 0. \\ & -\,4s^2 & \\ & +\,8a^2 & \end{array}$$

sive dividendo per 4, fiet: ☽

$$\begin{array}{lll} y^2 & +\,2av & \sqcap 0. \\ & -\,s^2 & \\ & +\,2a^2 & \end{array}$$

4 Qvae ... determinabilis *erg.* L 7 et *(1)* x $\sqcap$ *(2)* qvae aeqvatio jungatur *(a)* priori ge *(b)* generali: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. *(3)* fiet L 8 f. $v^2 \ldots \sqcap 0$ *erg.* L

16 methodo Huddeniana: vgl. Erl. zu S. 34 Z. 13 f.

ubi in locum ipsius v substituendo $\sqrt{2ax}+x$ fiet: $y^2+\sqrt{2ax}+x-s^2+2a^2 \sqcap 0$. Multiplicetur aequatio $\odot$ adhuc aliter per -2 $\boxed{*-1}$ 0 $\boxed{*+1}$ 2. et fiet:

$$\begin{array}{ll} 2y^4 & -\,8a^2v^2 \quad \sqcap 0 \;\text{ et fiet} \\ & +\,8as^2v \\ & -\,2s^4 \\ & +\,8a^2s^2 \end{array}$$

$$☿ \qquad \begin{array}{ll} y^4 & -\,4a^2v^2 \quad \sqcap 0, \\ & +\,4as^2v \\ & -\,s^4 \\ & +\,4a^2s^2 \end{array}$$

ubi pro $+4as^2v$, ponatur $4as^2\sqrt{2ax}+4as^2x$ et quia $v^2 \sqcap 2ax+2x\sqrt{2ax}+x^2$, erit $4a^2v^2 \sqcap 8a^3x+8a^2x\sqrt{2ax}+4a^2x^2$, porro ex aeq. ☽, multiplicando per s^2, fiet: $s^4 \sqcap s^2y^2+2avs^2+2a^2s^2$. Inseratur is valor in aeq. ☿ fiet:

$$\begin{array}{lll} y^4 \;-\, s^2y^2 & -\,2avs^2 \quad \sqcap 0 \;\text{ sive }\; y^4 - s^2y^2 & +\,2avs^2 \quad \sqcap 0 \qquad ♃ \\ & \underline{-\,2a^2s^2} & +\,2a^2s^2 \\ & -\,4a^2v^2 & -\,4a^2v^2 \\ & +\,4avs^2 & \\ & +\,4a^2s^2 & \end{array}$$

et pro s^2 substituendo $y^2+2av+2a^2$ ex aeq. ☽ fiet ex aeq. ♃ sequens:

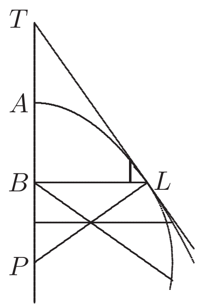
$$\begin{array}{llll} y^4 \;-\, 4a^2v^2,\; -\,y^2 & \frown\; y^2 \quad \sqcap 0 \qquad \text{sive} & +\,y^4 \;\; +\,2avy^2 & +\,4a^2v^2 \quad \sqcap 0. \\ \qquad\qquad +\,2av & \;\;\; 2av & -\,y^4 \;\; +\,2a^2.. & +\,4a^3v \\ \qquad\qquad +\,2a^2 & \;\;\; 2a^2 & \qquad\; -\,2av.. & +\,4a^3v \\ & & \qquad\; -\,2a^2.. & +\,4a^4 \end{array}$$

Quae aequatio est absurda, sequitur enim v, vel x unde v pendet cognitae seu determinatae quantitati aequari, quod est absurdum.

11 $+4\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$, *(1)* |et substitutione facta, erit *streicht Hrsg.*| aeqvatio: $\mathrm{y}^4 \sqcap$ *(2)* porro *L*

---

23 $\sqrt{2ax}+x$: Leibniz vergisst bei der Substitution den Faktor $2a$ vor dem Term. Der Fehler hat keine Auswirkungen auf die weiteren Rechnungen und Überlegungen. 19 sive: In der folgenden Gleichung fehlt der Term $-4a^2v^2$.



[*Fig. 5*]

Forte ergo error in calculo, quare elaborandus denuo: Figura in qua BP sint $\sqrt{2ax}$ applicatae parabolae, haberi potest Analytice. Nam summa omnium $\sqrt{2ax}$ est $\dfrac{2}{3}$ maximi $\sqrt{2ax}$ multiplicati per maximum x, seu $\dfrac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$. Cui aequale pone $\dfrac{y^2}{2}$ fiet $32ax^3 \sqcap 9y^4$, figura, cujus ordinatarum y, semiquadrata $\dfrac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$, sunt aequalia summis omnium BP. Nam figura $\dfrac{32}{9}ax^3, \sqcap\ y^4$, dabit: $\dfrac{32}{3}ax^2t \sqcap 4y^4$, unde $t \sqcap \dfrac{12y^4}{32ax^2} \sqcap \dfrac{12 \frown \dfrac{\cancel{32}}{9}\cancel{a}x^{\cancel{3}}}{\cancel{32}\cancel{a}\cancel{x}^2} \sqcap \dfrac{4}{3}x$ ponendo $t \sqcap BT$. Jam $\dfrac{y^2}{t} \sqcap BP$. Ergo $\dfrac{4\sqrt{2ax^3}}{3 \frown \dfrac{4x}{3}} \sqcap \sqrt{2ax}. \sqcap BP$. Ergo $PL^2 \sqcap s^2 \sqcap 2ax + \dfrac{4x\sqrt{2ax}}{3}$ et $v \sqcap AP \sqcap x + \sqrt{2ax}$. Unde statim dijudicari potest an vera sit aequatio ☽ paginae praecedentis: $y^2 + 2av - s^2 + 2a^2 \sqcap 0$. Inde enim fiet:

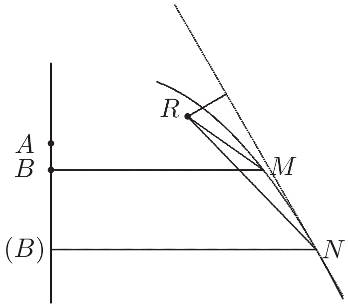
$$\underbrace{\frac{4x}{3}\sqrt{2ax},}_{+y^2} + \underbrace{2ax + 2a\sqrt{2ax}}_{+\,2av} -, - \underbrace{2ax - \frac{4x\sqrt{2ax}}{3}}_{-\,s^2} +2a^2 \sqcap 0.$$

Quae aequatio est absurda. Fiet enim $2a\sqrt{2ax} \sqcap -2a^2$. Itaque error qui si non est in calculo, erit in ratiocinatione, determinatione scilicet ad duas radices aequales.

13 *Nach* duas radices aequales: E r r o r.

13 in *(1)* calculo *(2)* ratiocinatione *L*

Problema: Curvam invenire in qua ipsa PL. relationem habeat cognitam ad AB. semper est in potestate. Omnes enim ejusmodi curvae sunt Trochoeides. Exempli causa quaeratur curva in qua ipsae PL. sint applicatae parabolae seu $\sqrt{2ax}$.



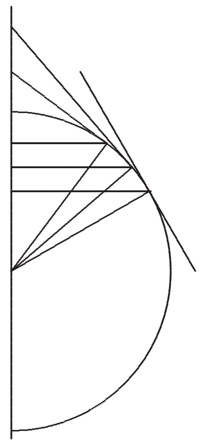
[*Fig. 6*]

Invenienda est alia curva ad quam ex puncto quodam dato seu fixo R ductae rectae RM sint semper applicatae parabolae. Seu sint $\sqrt{2ax}$ ponendo AB vel $A(B)$ esse x. Quod si punctum A et punctum R coincidant[,] curva MN est circumferentia circuli, unde sequitur Cycloeidem satisfacere proposito quod et verum est. Unde illud quoque manifestum plane, esse curvas a se invicem diversas proposito satisfacientes. Hinc sequitur semper inveniri posse curvam, cujus momentum ex dato quodam axe sit datae figurae cognitae homogeneum, quoniam omnes PL constituunt curvae momentum ex AB.

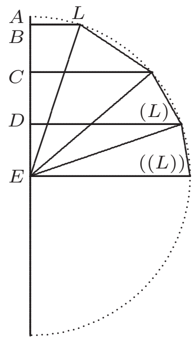
Ope hujus methodi, jam in spem erigor rem producendi longius, efficiendique, ut quadraturae reduci possint ad curvarum cognitarum dimensiones.

1 Problema: *erg. L* 5 seu fixo R *erg. L* 6 RM *erg. L*

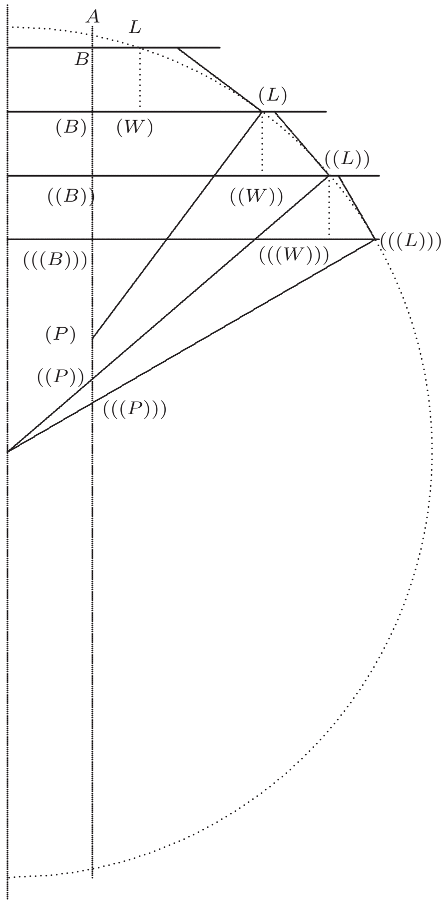
2 Omnes ... Trochoeides: Diese Behauptung, sowie die sich anschließenden Überlegungen bis S. 46 Z. 12 sind nicht einsichtig. Möglicherweise bezieht sich Leibniz' Bemerkung „Error" (zu S. 42 Z. 13) auch hierauf. Vgl. auch seine Bemerkungen S. 46 Z. 13 – S. 47 Z. 3. 11 omnes PL: **[noch]**



[*Fig. 7a, Blindzeichnung, verworfen*]



[*Fig. 7b, tlw. Blindzeichnung, verworfen*]



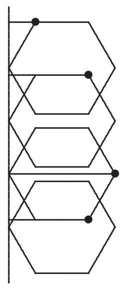
[*Fig. 7c, tlw. Blindzeichnung*]

Nimirum data AP. invenire curvam AL. idem est cum problemate quadraturarum, quae est data BP invenire curvam. Nam data $AP \sqcap v$. datur $BP \sqcap v - x$. Semper enim

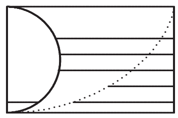
3 data *(1)* BL *(2)* BP *L*

1 *Fig. 7c*: In Leibniz' Skizze schneiden sich $(((P)))(((L)))$ und $((P))((L))$ links von der Zeichnung, die Kurve $A(((L)))$ ist aber ein Kreisbogen. 3 quae: Vielleicht ist quod (abhängig von problemate) von Leibniz intendiert.

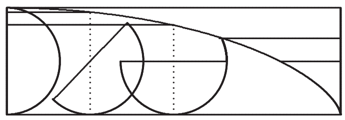
supponitur dari x. Jam si ponamus curvam quaesitam AL instar trochoeidis describi ab aliqua curva super AP incedente erunt puncta P, quibus tangit planum AP. et rectae $P(P)$ vel $(P)((P))$ et $((P))(((P)))$ intervalla ipsarum PL. in axe, seu differentiae ipsarum AP. seu latera polygoni infinitanguli id est curvae, provolutae. Ergo AP, erunt horum $(P)((P))$ summae, seu applicatae ipsae Retortarum Trochoeidalium.



[*Fig. 8*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

$\frac{a^2}{x}$. $\frown$ $x \sqcap a^2$. Hyperbola dat cycloeidem per centrum seu lineam rectam $\frac{a^2}{x} + b$, $\frown$ $x \sqcap a^2 + bx$. $a^4 - 2a^2bx + b^2x^2 - x^2$ est aequatio ad Hyperbolam vel Ellipsin, cujus revolutione describetur curva. Habemus ergo methodum figurae cuilibet exhibendi curvam proportionalem. Ergo ex datae Hyperbolae quadratura habetur curva Ellipseos et Hyperbolae.

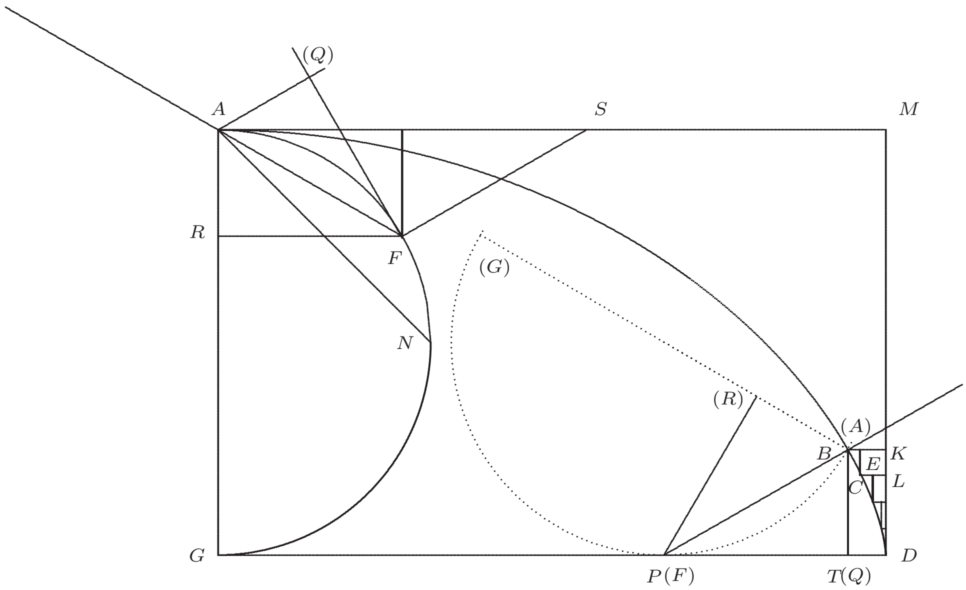
Imo jam video nondum me posse datis perpendicularibus invenire curvam; si datis

1 Jam *(1)* AP componi *(2)* si *L* 1 f. qvaesitam *(1)* describ *(2)* describi *(3)* AL. | instar trochoeidis *erg.* | describi ab aliqva *(a)* Trochoeide *(b)* curva *L*

7 *Fig. 8*: Eine ähnliche Figur mit Sechsecken findet sich in VII, 4 N. 2 **[noch]**, *Fig 5b* und N. 3 **[noch]**, *Fig. 4*. Zum Zusammenhang zwischen dem rollenden Sechseck und der Zykloide vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 264–270, insbesondere 267 f. Schooten verweist S. 264 auf einen Brief von Descartes an Mersenne (R. Descartes, *Lettres* III, 1667, S. 350–363, vgl. *DO* II S. 307–326).

7 *Fig. 10*: Der Kurvenbogen bei Leibniz entspricht in etwa einem Zykloidenbogen, der längs der x-Achse um den Faktor 2 gestreckt wurde; so wird er in Fig. 10 wiedergegeben.

perpendicularibus possem invenire curvam; possem etiam datis curvae laterum progressionibus invenire ejus descriptionem, et data curva invenire aliam cujus ipsa sit Trochoeides.



[*Fig. 11, tlw. Blindzeichnung*]

Esto enim curva data $ABCD$, Trochoeides curvae AFG ordinatim applicatae ad oppositam ipsi AG directricem nempe ad DM. sunto BK. CL. quarum habetur progressio, habetur ergo et progressio ipsarum BE differentiarum, quibus in x, seu DL, DK ductis habetur earum momentum ex DG. Ergo habetur progressio perpendicularium a curva ipsis BE homogenea ad DG ductarum. Quod si ergo datis perpendicularibus inveniri

5 data *erg. L*

4 *Fig. 11*: Aufgrund eines Verständnisfehlers ist die Strecke $(G)B$ in Leibniz' Zeichnung in die andere Richtung geneigt, obwohl $GF > FA$ gilt. PB schneidet infolgedessen in Leibniz' Skizze SM innerhalb des gegebenen Rechtecks. Oberhalb der Figur wird PB von einem Kurvenbogen geschnitten, und vom Schnittpunkt aus ist das Lot auf GD gezogen. Kurvenbogen und Lot finden im Text von N. 4 keine Verwendung und werden daher nicht wiedergegeben (vgl. aber N. 9 vom Januar 1675). Ein Vorentwurf zu Fig. 11 in Blindtechnik wies einen Halbkreis mit der richtigen Neigung auf.

potest curva, habebitur curva.

Ex puncto B ducatur perpendicularis quae erit aequalis AF. Erit $PD \sqcap$ curvae GNF. quia $GP \sqcap$ curvae AF. et $GD \sqcap$ curvae GFA. Ergo perpendiculares Trochoeidis BP sunt rectae ex puncto quodam fixo ut A. figurae describentis, ad quodlibet ejus punctum velut F ductae seu AF, et Reductae PD seu v. sunt portiones Curvae describentis retrorsum sumtae, restat tantum ut investigemus, quid sit BK.

Ut ergo omnia rectius procedant, ita faciemus: Curva describens esto $AFNG$. punctum fixum vel extra, vel si placet ut in figura intra curvam, nempe punctum A. abscissae AR, ordinatae RF, convergentes AF. quae eaedem et perpendiculares Trochoeidis, BP. demissae seu rectae ex puncto fixo ad tangentem curvae perpendiculares, AQ, eaedemque Trochoeidis ordinatae ad planum, $BT \sqcap DK$.

Porro PD semper aequatur Curvae GNF. Erit ergo DT abscissa ex plano $\sqcap PD - PT \sqcap GNF - PT$. Jam $PT \sqcap \sqrt{AF^2 - AQ^2}$. Ergo $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - AQ^2}$; et $DK \sqcap AQ$. Ergo $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$. Datur jam relatio inter AR et DK, item relatio inter AF et AR. Igitur habebitur valor ipsius AR per DK, et quoniam habetur valor ipsius AF. per AR. habebitur et valor ipsius AF per DK. Itaque habebitur aequatio trium incognitarum, nempe DT. GNF (curvae). DK. Oblata jam aliqua curva BCD, datur $BKDT$ datur DK vel contra; item ex DT inveniri potest AF vel BP perpendicularis, itemque ex DK inveniri potest BP, itaque habebuntur duae aequationes[,] una generalis, $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$, altera curvae naturam explicans, et valorem ipsarum duarum ex his tribus, DT, BP, (vel AF) DK, per tertiam. Ac proinde habebitur valor ipsarum GNF quarum differentiae seu ipsarum DP differentiae sunt homogeneae elementis curvae descriptricis ad portiones axis Trochoeidis seu datae curvae relatis. Videamus jam an haec sufficiant ad inveniendam curvam descriptricem, nimirum datur triangulum AQF. Quod Triangulum haberi potest pro characteristico majori, si

1 f. curva. *(1)* At curva illa est eadem cum ipsa AFG qvia BEK $\sqcap$ GNF, et EK $\sqcap$ CL $\sqcap$ GN ponendo enim BP perpendicularem *(a)* aeqvalem *(b)* aeqvalem AF, posito scilicet punctum A esse describens, erit GP. *(2)* Ex *L* 3 BP *erg. L* 5 seu . . . sunt *erg. L* 6 f. BK. *(1)*, in relatione ad *(2)* Ut *L* 8 vel *(1)* intra, vel si placet extra curvam *(2)* extra *L* 20 f. valorem *(1)* ips *(2)* ipsarum *(a)* incogni *(b)* trium incognitarum *(c)* duarum *L*

2 $PD \sqcap$ curvae: Es gilt aber $PD =$ Kurve FA, sowie (in der folgenden Zeile) $GP =$ Kurve GNF. Derselbe Fehler wiederholt sich beim zweiten Ansatz Z. 12; er wirkt sich auf die gesamte Überlegung bis zum Ende des Stücks aus.

scilicet AF convergens habeatur pro ordinata. Datur inquam, id est datur relatio laterum invicem: Datur praeterea relatio Elementorum curvae AFG, ad ipsam AF, imo et summae elementorum. Ideoque momentum curvae quaesitae, ergo et perpendicularium ad curvam, FS. in ipsarum RF differentias ductarum progressio.

Breviter data Trochoeide habetur describentis curvae portionum dimensio sive ejus elementum; elementa curvae; demissae; interceptae inter demissas et puncta curvae in tangente sumta; omnia ex supposita convergente data. Seu ex dato quadrato aequali quadratis ordinatae et abscissae; et per consequens ex datis ordinata et abscissa simul.

Contra si data sit describens datur utique ejus $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ AQF ergo et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BPT Trochoeidis. Quodsi ergo ex dato PBQ curva BCD haberi potest patet eo ipso et curvae $AFNG$ dimensionem haberi in Trochoeide et provoluta $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AQF et BPT coincidunt, in Evolutis et evolutione descriptis triangula BPT utrobique similia. Sed reciproce.

Alia vide Schediasmate *de descriptionibus curvarum*, ibi de modo describendi curvas per motuum compositiones.

5 sive *(1)* | momentum *streicht Hrsg.* | ipsorum *(2)* eius *L* 10 BCD *erg. L*

13 Schediasmate ... *curvarum*: Cc 2, Nr. 831, dat. Dez. 1674.

5. APPENDIX AD SCHEDAM IN METHODUM TANGENTIUM INVERSAM OVALIS
[Zweite Hälfte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 7. 1 Bl. 4°. Ränder beschnitten. Bl. 7 v° leer. 1 S. Cc 2, Nr. 833

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist ein Appendix zu N. 14. Wegen der Verwendung des Gleichheitszeichens $\sqcap$ ist es wohl auf die 2. Hälfte 1674 zu datieren. Es hängt thematisch mit einer Reihe von Texten von Dezember 1674/Januar 1675 zusammen vgl. N. 3, N. 4, N. 7, N. 8, N. 11, N. 11_4 [**noch**].

In Scheda ubi in Methodum Tangentium inversam Ovalis exemplo inquisivi (cujus fig. priorem inspice pag. 1) inveni posita MP. Reducta, $\sqcap m$, et $FM \sqcap x$. aequationem naturam reductae explicantem haberi:

$$x \sqcap -\ m + \frac{ad^2 - ae^2}{e^2} - \frac{2d^2a^2}{e^2m} + \frac{d^2a^3}{m^2}$$

$\bigtriangledown$ $\square$ Hyp. Hyperboloeid.

Unde sequitur figuram reductarum ejus ovalis esse hyperbolae σύγγνωτον, si nullus in calculo error. Is vero quam verus sit, ita experiemur. Cartesius lib. 2. *Geom.* lit. M. edit. Schot. p. 43. (cujus figuram ea pag. vide.) calculo invenit MA (: quam ille vocat y, quaeque aequivalet meae $FM - FA$, seu $x - c$, ponendo cum Cartesio $FA \sqcap c$:) esse

17 cum Cartesio *erg.* *L*

9 f. cujus fig.: Vgl. N. 14, Fig. 1 , S. 105 Z. 17. Vgl. auch R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43 [Marg.]. Auf diese Stelle und auf die dortige Figur verweist Leibniz unten S. 51 Z. 8. 12 f. Diese Gleichung leitet Leibniz in N. 14, S. 108 Z. 11–13 ab. 15 Cartesius: *a. a. O.* Auf S. 43 bestimmt Descartes in der Tat $MA = y = \dfrac{d^2z^2 + 2cd^2z - e^2z^2 + 2bdez}{2bd^2 + 2cd^2}$. Diese Gleichung übernimmt Leibniz Z. 17 und versucht, daraus einen Ansatz für das inverse Tangentenproblem zu entwickeln.

$$\sqcap \frac{d^2z^2+2cd^2z-eez^2+bdez}{2bdd+2cd^2}$$ posito ejus $GA \sqcap b$. $AF \sqcap c$. Ergo

$x-c \sqcap$ ...., vel

$x \sqcap$ .... $+\,c$. Hinc aequatio talis fiet:

$$z^2+\frac{2cd^2+bde}{d^2-e^2}z+\frac{2bd^2c+2c^2d^2-2bd^2x-2cd^2x}{d^2-e^2}\sqcap 0$$

seu $$z^2+\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{nz}+\frac{n^2}{4}\sqcap-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{n^2}{4}$$

fietque $$\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\sqcap z+\frac{n}{2}$$

Ponendoque brevitatis causa: $+2bd^2c+2c^2d^2+\frac{n^2r^2}{4}\sqcap q^4$, et $d^2-e^2\sqcap r^2$, et $2bd^2+2d^2\sqcap t^3$ habebimus: $-\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{q^4-t^3x}{r^2}}\sqcap z$. At Cartesius invenit pag. 48. *Geom.* lineam $AP \sqcap FP-\underset{c}{\underset{\wedge}{FA}}.\sqcap x+m-c$ esse $\sqcap \frac{w^4+h^3z}{l^3+r^2z}$. ponendo scilicet $w^4\sqcap bcd^2-bcde$, et $h^3\sqcap bd^2+ce^2$, et $l^3\sqcap cd^2+bde$. Ordinetur aequatio, fiet $l^3x+l^3m-l^3c+r^2xz+r^2mz-r^2cz\sqcap w^4+h^3z$ sive $-\sqrt{\frac{q^4-t^3x}{r^2}}\sqcap\frac{l^3x+l^3m-l^3c-w^4+nh^3-nr^2x-nr^2m+nr^2c}{+h^3-r^2x-r^2m+r^2c}$ quae contracta quantum fieri potest faciet $-\frac{\sqrt{q^4-t^3x}}{r^2}\sqcap\frac{f^3x+i^3m+g^4}{-r^2x-r^2m+\beta^3}$ quadratisque omnibus: $\frac{q^4-t^3x}{r^4}\sqcap\frac{f^6x^2+2f^3i^3xm+2f^3g^4x+i^6m^2+2i^3g^4m+g^8}{+r^4x^2+2r^4xm-2r^2\beta^3x+r^4m^2-2r^2\beta^3m+\beta^6}$. Quae facilitatis causa sic exprimi poterunt:

8 pag. 48. *Geom. erg. L* 11 bcde *(1)* substituendo ergo valorem z in ejus locum, fiet: *(2)* Reducatur *(3)* Ordinetur *L* 11 fiet *(1)* substituendo ergo $\mathrm{x}+\mathrm{m}-\mathrm{c}\sqcap \mathrm{w}^4+$ *(2)* $\mathrm{l}^3\mathrm{x}$ *L* 13 $\sqcap$ *(1)*, $\mathrm{t}^3, \frown \mathrm{x}+\mathrm{m}, -\mathrm{g}^4$ *(2)* $\frac{\mathrm{l}^3\mathrm{x}}{\mathrm{m}}-$ *(3)* $\frac{\mathrm{f}^3\mathrm{x}+\mathrm{i}^3\mathrm{m}+\mathrm{g}^4}{-\mathrm{r}^2\mathrm{x}-\mathrm{r}^2\mathrm{m}+\beta^3}$ *L*

6 $\sqrt{\cdots\cdots}$: Im folgenden schreibt Leibniz das Minuszeichen vor $\frac{2bd^2c+2c^2d^2-2bd^2x-2cd^2x}{d^2-e^2}$ vor die Wurzel und behält alle Rechenzeichen unter der Wurzel bei. Der daraus resultierende fehlerhafte Term $\sqrt{\frac{q^4-t^3x}{r^2}}$ beeinträchtigt die weitere Rechnung. 8 *AP*: In der Tat bestimmt Descartes *a. a. O.* $AP=v=\frac{bcd^2-bcde+bd^2z+cez^2}{cd^2+bde-e^2z+d^2z}$. 12 Auf der rechten Seite der Gleichung vergisst Leibniz den Faktor $\frac{1}{2}$ vor $(nh^3\ \ldots\ +nr^2c)$.

$$t^3r^4xm^2 - t^3r^4x^3 - 2t^3r^4x^2m + \gamma^8x^2 + \delta^8m^2 + \theta^8xm + \lambda^9x + \mu^9m + \xi^{10} \sqcap 0.$$

$$\text{vel} \;\; -\frac{t^3r^2x^3 + \gamma^8x^2 + \lambda^9x + \xi^{10}}{+t^3r^4x - \delta^8} \sqcap m^2 + \frac{\begin{array}{l} 2t^3r^4x^2m. \\ -\;\theta^8x \\ -\;\mu^9 \end{array}}{+\;t^3r^4x - \delta^8}$$

Ejus loco ponatur brevitatis causa: $-\frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^{10}}{\varrho^8} + \frac{\varphi^2}{4}} \sqcap m$. Unde patet valorem ipsius m componi ex $\frac{\varphi}{2}$, et radice adjecta. Ipsam $\frac{\varphi}{2}$ autem componi ex applicata $\bigtriangledown^{\mathrm{li}}$, applicata Rectanguli, applicataque Hyperbolae, si modo μ non alicui $\bigcirc$ aequivalet, quod jure vereor. Adjecta jam $-\frac{\varphi}{2}$, positoque $l^2 \sqcap \frac{\pi^{10}}{\varrho^8} + \frac{\varphi^2}{4}$, investigandum an valor ipsius l haberi possit. Pro $\frac{\varphi^2}{4}$, habemus $\frac{\psi^8}{4\varrho^{10}}$, fietque $\varrho^{18}l^2 - \pi^{10}\varrho^8 \sqcap \frac{\psi^8}{4}$. Explicatio ejus rursus dabit radicis extractionem quae locum in alios resolvet, donec reddatur simplicissimus.

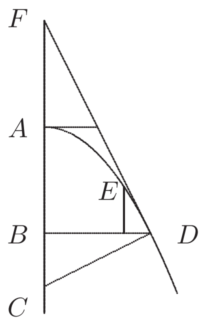
7 modo *(1)* m^2 non alicui *(2)* η *L*

7. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
[Dezember 1674/Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 6. 1 Bl. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 6 v° ist leer. 1 1/2 S. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 840

Datierungsgründe: [**noch** Das Stück setzt VII, 3, N. 39, datiert Dezember 1674, voraus (vgl. S. 54 Z. 4 – S. 55 Z. 3 mit Erl. zum gesamten Abschnitt). Es gehört inhaltlich zur Gruppe N. 3, 4, 5, 8, 11, 14. Im Januar 1675 erkennt Leibniz, dass sein Ansatz nicht zum Ziel führt.]

Methodus tangentium inversa



[*Fig. 1*]

Circa methodos Tangentium inversas notandum est, quando ex data BC. quaeritur BD. inquisitionem vel ideo satis difficilem esse, quia $BD \sqcap y$ habetur simpliciter ad quadratum ascendens, nam $BC^2 + y^2 \sqcap CD^2$

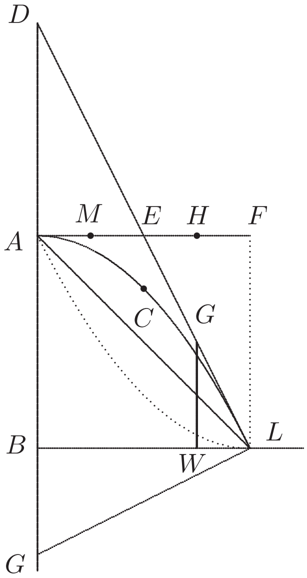
$$\begin{array}{lcl} \quad / \quad \backslash & & \\ x^2 \ \ldots\ x.\,a & \qquad & p^2{}_{[,]} \end{array}$$

atqui talis aequatio ordinata secundum y^2, non potest ad duas radices aequales determinari, quia nulla aequatio pura quadratica ad duas aequales radices determinari potest; sed contra ad duas oppositas, seu mole aequales, forma sive signo inaequales, jam deter-

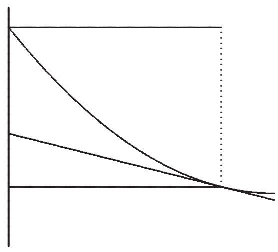
17 qvia *(1)* omnis pur *(2)* nulla *L* 18 duas *(1)* inaeqvales *(2)* oppositas *L*

minata est.

Cui malo videndum est an remedium quaeri possit, vel explicando quod experiemur, vel alia inquirendi ratione substituta:



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Nempe non tantum semper haberi potest summa omnium BG, vel Summa omnium WL; sed et summa omnium AH. vel FM. Nimirum summa omnium AE aequatur segmento $ALCA$ duplicato; summa omnium EF concavo $AFLCA$ duplicato. Jam concavum

1 f. est. *(1)* Esto aeqvatio: *(2)* Cui *L* 2 possit, *(1)* substituta alia inqvirendi ra *(2)* vel *L*
6 omnium *(1)* EF. *(2)* AH. *L*

4 *Fig. 2*: Die Punktbezeichnung G tritt zweimal auf. Im Text wird nur der auf der Geraden $DABG$ liegende Punkt verwendet. 6–55,3 summa ... ABL: vgl. VII, 3, N. 39, S. 566, mit Figur 4 (S. 564). Leibniz summiert die AE richtig, die folgende Summierung der EF ergibt jedoch die einfache, nicht die doppelte Fläche $AFLCA$. Der Fehler wirkt sich aus auf die Summierung der AH. Bei der Summierung der MF in S. 55 Z. 2 vergisst Leibniz den falschen Faktor 2 und erhält so das richtige Ergebnis.

simplex auctum segmento simplici aequatur Triangulo ABL. Ergo summa omnium AH, seu $AE + EH$ (ponendo $EH \sqcap \frac{EF}{2}$), vel summa omnium MF seu $EF + EM$ (ponendo $EM \sqcap \frac{AE}{2}$), aequatur Triangulo ABL. Appellando ergo AB, x, BL, y. $BD \sqcap l$. Erit $AD \sqcap +l + x$. vel si mavis $+l - x$ et $\frac{AE}{AD}$ erit: $\sqcap \frac{y}{l}$. Adeoque $AE \sqcap \frac{yAD}{l}$ sive $AE \sqcap \frac{+yl - yx}{l}$. Porro $EF \sqcap y - AE$, sive $EF \sqcap \frac{yl - yl + yx}{l}$, fiet: $EF \sqcap \frac{yx}{l}$ et $EH \sqcap \frac{yx}{2l}$, et $AH \sqcap AE + EH \sqcap \frac{2yl - 2yx + yx}{2l}$ sive $AH \sqcap \frac{2yl - yx}{2l}$.

Ponamus jam exempli causa AH esse applicatam parabolae quae valeat $\frac{x^2}{a}$, fiet $\frac{x^2}{a} \sqcap \frac{2yl - yx}{2l}$ sive $\underset{-}{+2lx^2} \underset{-}{+yxa} \underset{+}{-2yla} \sqcap 0$. et $l \sqcap \frac{yxa}{+2ya - 2x^2}$. Est autem $\frac{l}{y} \sqcap \frac{y}{BG}$ seu $\frac{BG}{y} \sqcap \frac{y}{l} \sqcap \dfrac{1}{\dfrac{xa}{2ya - 2x^2}} \sqcap \frac{2ya - 2x^2}{xa}$, fiet: $BG \sqcap \frac{2y^2a - 2x^2y}{xa}$[,] cujus quadratum: $\frac{4y^4a^2 - 4y^3ax^2, +4x^4y^2}{x^2a^2}$, addatur ei $BL^2 \sqcap y^2$, fiet: $\frac{4y^4a^2 - 4y^3ax^2 + 4x^4y^2 + y^2x^2a^2}{x^2a^2} \sqcap p^2$, ponendo $p \sqcap GL$. sive

$$y^4 \; - \; \frac{x^2}{a} \; y^3 [+] \; \begin{array}{c} \frac{x^4}{a^2} \\ \frac{x^2}{4} \end{array} \; y^2 \; * \; - \; \frac{x^2}{4} \; p^2 \; \sqcap \; 0.$$

4 AD ⊓ *(1)* ⟨∓⟩l ± x. vel si mavis ∓l ∓ x *(2)* +l + x *L* 5 AE ⊓ *(1)* ∓yl *(2)* $\frac{\mp yl \mp yx}{l}$ *(3)* $\frac{+yl - yx}{l}$ *L* 5 sive *(1)* AE ⊓ y *(2)* EF *L* 11 f. sive |sive *streicht Hrsg.*| y^4 *L*

4 $AD \sqcap +l + x$: Diese Aussage ist unrichtig. 9 quadratum: Im Zähler des folgenden Terms erscheint $-4y^3ax^2$. Richtig wäre $-8y^3ax^2$. Der fehlerhafte Term geht in die weiteren Rechnungen ein und wirkt sich bis zum Ende des Stücks aus.

$$\text{vel aliter ordinando:}\quad \begin{array}{llllll} x^4 & * & -\dfrac{a^2p^2}{4y^2} & x^2 & * & +\, y^2a^2 \sqcap 0. \\ & & -\quad ya & .. & & \\ & & +\quad \dfrac{a^2}{4} & .. & & \end{array}$$

Aequationem $y^2 \langle - \rangle 2ey + e^2$, multiplicemus per $\dfrac{l}{a}y^2 + my + an$, fiet:

$$\begin{array}{llllllllll} \dfrac{l}{a}\,y^4 & -\,2\dfrac{l}{a}e\,y^3 & + & \dfrac{l}{a}e^2\,y^2 & & & & & & \sqcap 0 \\ & +\quad m\;.. & - & 2em\;.. & + & e^2m\;y & & & & \\ & & + & an\;.. & - & 2ane\;.. & + & e^2an & & \text{sive} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} y^4 & -\;2e\;y^3 & + & e^2\;y^2 & + & \dfrac{e^2ma}{l}\;y & + & \dfrac{e^2a^2n}{l} \\ & +\;\dfrac{ma}{l}\;.. & - & \dfrac{2ema}{l}\;.. & - & \dfrac{2a^2ne}{l}\;.. & & \\ & & + & \dfrac{a^2n}{l}\;.. & & & & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Unde aequationes collatitiae: $-lx^2 \sqcap -2ela + ma^2$, et $m \sqcap \dfrac{2ela - lx^2}{a^2}$.

Et: $4x^4l + a^2x^2l \sqcap 4e^2a^2l - \underbrace{8em}_{\frac{2ela-lx^2}{a^2}}a^3 + 4a^4n$, sive $n \sqcap \dfrac{4x^4l + a^2x^2l \begin{array}{c} +12 \\ \boxed{-4} \\ \boxed{+16} \end{array} \begin{array}{c} e^2a^2l \\ \boxed{e^2a^2l} \end{array} - 8elx^2a}{4a^4}$.

Et $em \sqcap 2an$, sive $8e^2a^3\cancel{l} - 4a^2e\cancel{l}x^2 \sqcap 8ax^4\cancel{l} + 2a^3x^2\cancel{l} + 24e^2a^3\cancel{l} - 16e\cancel{l}x^2a^2$.

Sed displicet quod ita video $\underline{l}$ ubique evanescere et ipsius quod nolim, $\underline{e}$ valorem definiri. Cui malo nescio an mederi liceat explicando y per $z + q$.

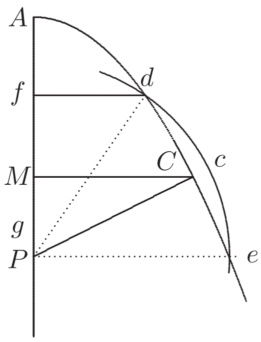
8. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PER AEQU. DUARUM RADICUM AEQUALIUM
[**noch**]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 162–163. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 839

Datierungsgründe: [**noch**, das Wasserzeichen ist vorwiegend für Ende 1675 belegt. Inhaltliche Gründe — namentlich die Auseinandersetzung mit Descartes' Tangentenmethode und der Versuch, über sie das inverse Tangentenproblem zu lösen — sprechen für eine Datierung auf Ende 1674 – Januar 1675. Vgl. N. 11 S. 000 Z. 000–000 **S. 4 Z. 20–22**. Für Überlegungen aus dem gleichen Zusammenhang vgl. auch N. 3, N. 4, N. 5, N. 7, N. 11 und N.14].

De Methodo Tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium

Multa proxime disserui de Analytica ratione inveniendi summas serierum, sive de methodo tangentium inversa, breviter ad intellectum necessaria repetam:



[*Fig. 1*]

Esto linea AC, cujus omnia puncta referantur certo quodam modo ad rectam AP,

14 inversa, *(1)* tota res *(a)* eo *(b)* scilicet *(2)* breviter *L*

13 disserui: vgl. z. B. VII, 3 N. 39 vom Dezember 1674.

sumto in ea puncto quolibet C, sit perpendicularis CP, ordinata MC. abscissa AM. Appellemus cum Cartesio $AM \sqcap y$. $MC \sqcap x$. $PC \sqcap s$. $PA \sqcap v$. Erit $PM \sqcap v - y$ et $s^2 - v^2 + 2vy - y^2 - x^2 \sqcap 0$. Ecce quatuor indeterminatas; quod si jam data Lineae AC, natura ac descriptione, sive data ordinatarum MC progressione[,] quaeratur modus ducendi ipsas PC. ad punctum datum C, seu si quaeratur punctum P. tunc utique dabitur aequatio alia duas tantum continens incognitas x. y quarum alterutra ex aequatione quatuor indeterminatarum eliminari poterit. Et residua x (aut y) erit duplicis valoris, ac per Methodum Tangentium conferendo cum simili duas habente radices aequales reperietur.

Si vero ex dato puncto P, quaeratur punctum C, seu si data sit progressio ipsarum MP, non vero ipsarum MC, item si data sit relatio ipsarum PM ad MC (id est ut aliqui ostendi, si datae cujusdam progressionis quaeratur progressio summatrix), quae est species methodi Tangentium inversae, tunc manifestum est, duas restare indeterminatas quarum utraque sit duplicis valoris, nempe x. et y.

Caeterum, quod dixi quatuor esse incognitas, sciendum est, tamen, reapse non nisi tres esse: quia si ex una harum x. y. s, vel x. y. v, sumta, duae reliquae inveniri possint, tunc etiam, quarta poterit inveniri. Notandum tamen quod non viceversa ex inventis x. s. v. sumta earum una, quarta y queat inveniri. Quare considerandum est, si data sit aequatio, in qua incognitae s, et v, vel y. s. v, vel y. v, vel y. s, vel x. y. s, aliisve combinationibus contineantur, an alteram indeterminatarum primariarum, y. et x. elidere liceat. Sane si PC non perpendicularis esset, sed curvam, descriptus circulus ex centro P, secaret in duobus punctis d. e. tunc si esset aequatio continens rectas x. y. s. v, in qua ex data s, aliisque aequationibus reliquae quaererentur, utique reliquae omnes prae-

1 sit *(1)* tangens C *(2)* perpendicularis *L* 4 descriptione, *(1)* sive data aeqvatione, qv *(2)* sive *L* 7 f. Et ... reperietur *erg. L* 10 MP, | id est relatio earum *erg. und gestr.* | non *L* 10 sit *(1)* ratio *(2)* relatio *L* 12 restare *(1)* incognitas *(2)* indeterminandas *L* 14 Caeterum, *(1)* qvod reliqvas duas attinet incognitas, s et v, tunc sciendum est, ex datis *(2)* qvod *L* 15 esse: *(1)* semper *(2)* reapse *(3)* qvia *(a)* inventa s *(b)* inventis x. *(c)* si *L* 16 inveniri *(1)*, non tamen *(2)* Notandum tamen | qvod non viceversa *erg.* | ex *L* 19 alteram *(1)* incognitarum primariarum *(2)* indeterminatarum *L* 19 y. et x. *erg. L* 21 si *(1)* ope rectae Pd $\sqcap$ Pe, una *(2)* esset *L*

2 cum Cartesio: Zu den Streckenbezeichnungen und der resultierenden Gleichung vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–41. Leibniz gibt hier in der Folge eine Zusammenfassung der cartesischen Tangenten- (bzw. Normalen-)bestimmung, vgl. Descartes, *a. a. O.* S. 40–49. Zu *Fig. 1* vgl. auch Descartes, *a. a. O.* S. 43. 10 f. ut ... ostendi: **[noch]** 20 *PC* non perpendicularis: vgl. Descartes, *a. a. O.* S. 43–45.

ter s. duos haberent valores, eosque inaequales; sed si circulus centro P, radio PC, vel PE descriptus tangeret in C. tunc duo valores indeterminatarum, x. y. v. futuri essent aequales: quod si jam detur aequatio duas tantum continens indeterminatas x. et y. ut in methodo tangentium ordinaria, tunc altera earum, v. g. x. eliminetur; restabit aequatio tres continens incognitas, y. v. s, ex quibus duae[,] y. et v, habent duos valores aequales; tertia non nisi unum. Sufficit tamen solam y, poni ut radicem aequationis incognitam, duorum valorum aequalium, et quaeri valorem ipsarum v, et s ope aequationum collatitiarum, tunc enim si ex sumta y. inveniatur s. vel v, distinguendum est: nam si ex sola y, invenitur, s, et supra, ex y. et s, habebatur x, tunc ex sola y, habetur x. Idem est si ex sola y habeatur v, et ex y. et v, ⟨ut⟩ supra habeatur x. Sed si aequationum collatitiarum una non det, s vel v ex sola y, sed s ex y et v, vel v ex s et y. vel si ea detur pure, quae tamen cum y ad x non concurrit, tunc exitus tamen semper apparebit ob duas aequationes collatitias, semper in promtu positas.

Etsi notabile sit, si quid maxime in hac materia duas aequationes collatitias sibi consentire et plerumque unam earum sufficere; casus tamen evenire posset, quo foret forsan opus utraque, si scilicet ut dixi neutra per unam pure haberi possit. Sufficit ergo unam y pro incognita sumi duos habente valores aequales, et hoc ipso alteram earum, nempe vel s. vel v. elidi, unde reliqua pure habebitur, quod sufficit ad x quoque pure habendam: resumamus ergo.

Aequatio est generalis quatuor indeterminatarum: $s^2 - v^2 + 2vy \; -2y^2 \; -x^2 \sqcap 0$.

Ponatur $\dfrac{v-y}{x} \sqcap \dfrac{\frac{a^2\beta}{y^2}}{\beta}$, $\dfrac{a^2}{y^2}$, posita scilicet β infinite parva, fiet $x \sqcap \dfrac{y^2v - y^3}{a^2}$. et $x^2 \sqcap \dfrac{y^4v^2 - 2y^5v + y^6}{a^4}$ fietque: $s^2a^4 - v^2a^4 + 2vya^4 - 2y^2a^4 - y^4v^2 \; +2y^5v \; -y^6 \sqcap 0$. vel

1 PC, | vel PE, *streicht Hrsg.* | vel *L* 2 valores *(1)* incognitarum *(2)* indeterminatarum *L* 2 f. essent | inaeqvales *ändert Hrsg.* |: qvod *L* 4 ordinaria | tunc *streicht Hrsg.* | tunc *L* 7 aeqvalium, *(1)* qvia ipsa y, inventa, etiam v, invenitur *(2)* et *L* 8 enim *(1)* inventa v datur et s *(2)* si *L* 8 vel v *(1)* non ideo habebitur *(a)* y *(b)* x ex sola y. qvia *(2)* distinguendum *L*

20 Aequatio est generalis: vgl. Erl. zu S. 58 Z. 2. 20 $-2y^2$: Richtig wäre $-y^2$. Die fehlerhafte Gleichung wird bis zum Ende des Stücks verwendet. 21 $\dfrac{v-y}{x} \ldots \dfrac{a^2}{y^2}$: $MP : MC = (v-y) : x = \dfrac{a^2}{y}$ vgl. S. 58 Z. 9 f.

$$y^6 - 2vy^5 + v^2y^4 \quad * + 2a^4y^2 - 2va^4y \quad \begin{matrix} + v^2a^4 \\ - s^2a^4 \end{matrix} \quad \sqcap 0.$$

Multiplicetur per numeros progressionis Arithm.

6 5 4 3 2 1 0 fiet

$$3y^5 - 5vy^4 + 2v^2y^3 \quad * + 2a^4y \quad - va^4 \quad \sqcap 0.$$

$$3y^2 - 5vy + 2v^2,, \frown y^3, \quad + \llcorner 2y \quad - v\lrcorner \frown a^4 \quad \sqcap 0. \text{ sive}$$

1–62,15 $\sqcap$ 0. | Multiplicetur ... Arithm. *erg.* | 6 ... 0 | fiet ... inqvisitione. *erg.* | Restabit *L*

3 per numeros: Zum Verfahren vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 436–439 u. S. 507 bis 516. Das Verfahren wird auch S. 61 Z. 2 – S. 62 Z. 1, S. 62 Z. 6 f., S. 64 Z. 3, S. 64 Z. 7 und S. 66 Z. 5 verwendet.

$$y^2 \quad - 4vy \quad + 2v^2, \frown y^3,, \qquad + 2y \qquad - v, \frown a^4, + 2y - v, \frown y^4, \sqcap 0.$$

Seu $s^2 - \llcorner\llcorner v - y\lrcorner\square\lrcorner - y^2 - \llcorner\llcorner v - y\lrcorner\square\lrcorner \frown \dfrac{y^4}{a^4} \sqcap 0$ unde post multiplicationem Arithmeticam

---

1 *Nebenbetrachtung*
$\dfrac{2y - v, \frown -2v + y^2}{2y - v}$ fiet: $-2v + \dfrac{y^2}{2y - v}$ unde divisione facta fiet: $-2v + \dfrac{y^2}{2y - v}, \frown y^3,, +$ $a^4 + y^4$ vel $\dfrac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v} + a^4 + y^4, \sqcap 0$ vel restitutis omnibus:

$$v^2 - 5y^4 v + \frac{25y^8 + 10a^4y^4 + a^8}{4y^6} \sqcap \frac{-y^5 - 2a^4y - 2y^5}{y^3}, + \frac{25y^8 \text{ etc.}}{\ldots.}$$
$$\frac{-\ a^4 \,..}{y^3}$$

fietque $v \ \boxed{\dfrac{-5y^4 - a^4}{2y^3}} \sqcap \dfrac{\sqrt{+22y^8 + 8a^4y^4 + a^8} + 5y^4 + a^4}{2y^3}$. Jam supra $v \sqcap \dfrac{xa^2 + y^3}{y^2}$.

Ergo $2xy \sqcap \sqrt{\ldots} + \underbrace{5y^4 - y^4}_{4y^4} + a^4$

$$\frac{16y^8 + 8a^4y^4 + a^8 + 6y^8}{4y^4 + a^4} \quad \text{[bricht ab]}$$

9 *(1)* $\quad - \mathrm{vy}$ $\quad$ *(2)* $\quad + \mathrm{vy}$

$\cancel{y^2} - 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2 \fint \dfrac{\mathrm{y}}{2}$ $\qquad$ $\cancel{y^2} - 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2 \fint \dfrac{\mathrm{y}}{2}$

$\cancel{2y} - \cancel{v}$ $\qquad$ $\cancel{2y} - \cancel{v}$

$\dfrac{\dfrac{10\mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2}{2} \text{ vel } \langle\text{—}\rangle\ \mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2 \fint}{2\mathrm{y} - \mathrm{v}}$ $\qquad$ $\dfrac{\dfrac{-8\mathrm{vy} + \mathrm{vy}}{2} \text{ seu } \dfrac{-7\mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2}{2} \fint - \dfrac{7}{4}\mathrm{v}}{2\mathrm{y} - \mathrm{v}}$ Ce qvi

fait: *(a)* y $\frown$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{y}^2}{2}$ *(3)* $\dfrac{\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2}{2\mathrm{y} - \mathrm{v})\ \dfrac{\mathrm{y}}{2}}$ *(4)* $\dfrac{2\mathrm{y} - \mathrm{v}, \frown -2\mathrm{v} + \mathrm{y}^2}{2\mathrm{y} + \mathrm{v}}$ *L*

---

9 $\dfrac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v}$: Der korrekte Ausdruck wäre $\dfrac{-4vy + 2v^2 + y^2 \frown y^3}{2y - v}$. Der fehlerhafte Term geht in die folgende Rechnung ein. Weitere Rechenfehler, die konstante Faktoren betreffen, kommen hinzu. Die abgebrochene Nebenrechnung hat keine Auswirkung auf die Überlegungen im Haupttext. 2–62,1 Seu … 0: Aus der ersten Gleichung müsste $-y^2$ gestrichen werden. Die von Leibniz versuchte Umformung mit Huddes Methode (vgl. Erl. zu S. 60 Z. 3) ist inkorrekt, und die weiteren Überlegungen auf dieser Basis sind unbrauchbar.

fit: $2va^4 - 2ya^4, - \llcorner\llcorner\llcorner\llcorner v - y \lrcorner \square \lrcorner\lrcorner \frown y^3 \lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap 0$ et divisis omnibus per $v - y$, fiet $2a^4 - vy^3 + y^4 \sqcap 0$. Ergo $v \sqcap \dfrac{2a^4 + y^4}{y^3}$. Jam supra $v \sqcap \dfrac{xa^2 + y^3}{y}$. Ergo $xy \sqcap 2a^2$. Quod praeclare perfecteque successit; constat enim et dudum a me via synthetica deprehensum est, differentias applicatarum hyperbolae esse homogeneas applicatis hyperbolae secundi gradus. Video ergo hac methodo exitum egregie reperiri.

Miror tamen id processere, cum sit neglectum a me aliquid nempe multiplicatio reliquorum terminorum per 1. 2. 3. 4. 5. 6. An forte quod aequatio quae jam continet duas radices aequales, ut est residua illa, (etiam ablato $v^2a^4 - s^2a^4$,) ut opinor, quia v, pariter et y, sunt duplicis valoris; sed res excutienda accuratius.

$\dfrac{2a^2}{y} - \dfrac{2a^2}{y+\beta} \sqcap \dfrac{2\beta a^2}{y^2 + \beta y}$. Forte priore illa via absolute habetur summa, ut numeris quoque applicari possit, fiat enim data series summanda $\dfrac{\beta a^2}{y^2}$ non $\dfrac{2\beta a^2}{y^2 + \beta y}$ etsi in Geometria $\dfrac{\beta a^2}{y^2}$ et $\dfrac{\beta a^2}{y^2 + \beta y}$ aequivaleant. Illud interim miror seriem summandam fuisse $\dfrac{\beta a^2}{y^2}$, et tamen neglectis multiplicationibus per arithmeticam progressionem reperiri quod fuisse deberet $\dfrac{2\beta a^2}{y^2}$ quae omnia opus habent exacta inquisitione.

Restabit aequatio in qua duae tantum supererunt incognitae v, et y, habebiturque valor ipsius v. absolutus, per y. Quo valore v, in aequatione $x \sqcap \dfrac{y^2v - y^3}{a^2}$ substituto habetur x ope solius y, id est descriptio curvae quaesita.

Eadem methodo sit aequatio: $\dfrac{2a^3}{a^2 + y^2}$ $\boxed{\text{vel } \dfrac{2y^2a}{a^2 + y^2}}$ cujus series si summari posset daretur Tetragonismus, ut alibi inveni:

---

5 *Am Rand:* (Error fuit)

---

3 f. dudum ... est: **[noch]** 19 inveni: Zur Entdeckung des Zusammenhangs zwischen der genannten Reihenentwicklung und der Kreisquadratur vgl. Cc 2, Nr. 1223 A und 563. Zur Aussage über den Zusammenhang vgl. auch III, 1 Nr. 39, insbesondere S. 154–157, sowie N. 35, insbes. S. 130 f. Zur Kreisquadratur siehe auch *LQK*.

Erit $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$, unde $x \sqcap \frac{va^2 - ya^2 + vy^2 - y^3}{2a^2}$, unde eodem modo, caetera investigari necessario possunt, semper enim s^2, statim tolli potest.

Videamus jam aliam calculi speciem, si scilicet ipsa $v-y$. simpliciter habeatur, ut si ponamus $v-y$ seu $PM \sqcap \frac{2a^3}{a^2+y^2}$ tunc pro $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$ substitui potest $s^2 - \frac{4a^6}{a^4+2a^2y^2+y^4} - y^2 - x^2$, nimirum pro $-v^2+2vy-y^2$, seu quadrato, $v-y$ substituendo ejus valorem, sed hoc modo aequatio difficilis resolutu est, idque vel inde judicari potest, quod multiplicando certo modo per arithmeticam progressionem sequitur absurdum et falsum, quod probe notandum et accurate excutiendum. Interea hinc observo, ad caetera investiganda ex datis MP, satis esse mutare quaestionis genus et aliam quaerere figuram, in qua data sint $\frac{MP}{MC}$, unde enim sequetur quaesita; ut alibi deprehendi.

Eadem ergo methodo summam ipsarum $\frac{2a^3}{a^2+y^2}$ investigare utile est; ponatur ergo $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$, fiet $x \sqcap \frac{v-y, \frown \llcorner a^2+y^2 \lrcorner}{2a^2}$ et $x^2 \sqcap \frac{v-y,\Box,, \frown a^2+y^2,\Box}{4a^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $s^2 - \llcorner\Box\, v-y\lrcorner - y^2, -\llcorner\Box\, v-y, \frown \frac{a^2-x^2}{4a^4}, \Box$. Unde abjectis cognitis etc.

Sed ut omnia fiant certiora utar exemplis facillimis ut parabolae. Quaeritur summa omnium $\frac{y^2}{a}$, ponatur ergo $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{y^2}{a^2}$. Ergo $x \sqcap \frac{a^2v - a^2y}{y^2}$ et $x^2 \sqcap v-y,\Box, \frown \frac{a^4}{y^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $s^2 - \llcorner v-y\lrcorner\Box - y^2,,, + \llcorner v-y\lrcorner\Box,, \frown -\frac{a^4}{y^4} \sqcap 0$. sive, $s^2y^4 - y^4v^2 + 2vy^5 - y^6 - y^6,, - v^2a^4 + 2vya^5 - y^2a^4 \sqcap 0$. et ordinando:

2 f. potest. *(1)* Facilior est calculus, opinior, *(2)* Videamus *L* 13 f. Eoqve ... $\Box$. *erg. L* 18 fiet: *(1)* $s^2 - v^2 + 2vy$| – *nicht gestr.* | *(2)* s^2 *L*

3 $v-y$. simpliciter: vgl. S. 58 Z. 9 f. 4 $s^2 \ldots 0$: Auch hier müsste $-y^2$ statt $-2y^2$ stehen. 11 deprehendi: **[noch]** 19 $+2vya^5$: Hier wäre a^4 statt a^5 richtig gewesen. Die Rechnung wird zwei Zeilen später abgebrochen.

$$\begin{array}{cccccccccccc} y^6 & - & vy^5 & + & \frac{s^2}{2}y^4 & + & \frac{a^4}{2}y^2 & - & va^5y & - & \frac{a^4v^2}{2} & \sqcap 0 \\ & & & + & \frac{v^2}{2} & & & & & & & \\ +\;2 & + & 1 & & 0 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & \end{array}$$

Unde Calculus satis prolixus, sed quid si ipsa v, sumta pro incognita ita fecissemus:

$$\begin{array}{ccc} v^2, & \left\{\begin{array}{l} +2y^5 \\ \underline{+2ya^5} \\ -y^4-a^4 \end{array}\right. v & + \text{ etc...} \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

fieret aequatio brevissima: $2v^2, \left\{\begin{array}{l} +2y^5 \\ \underline{+2ya^5} \\ -y^4-a^4 \end{array}\right. v \sqcap 0$

sive $v \sqcap +\frac{y^5+a^5}{y^4+a^4}$, eoque valore ipsius v in aequatione superiore substituto,

fiet: $x \sqcap \frac{\cancel{a^2y^5}+a^7-\cancel{a^2y^5}-a^6y}{y^6+a^4y^2}$ ponamus jam differentias ipsarum x, fiet: $\sqcap \dfrac{a^7 - a^6y + a^6e}{y^6 + 6ey^5 + a^4y^2 + 2a^4ey} - \dfrac{a^7 - a^6y}{y^6 + a^4y^2}$,

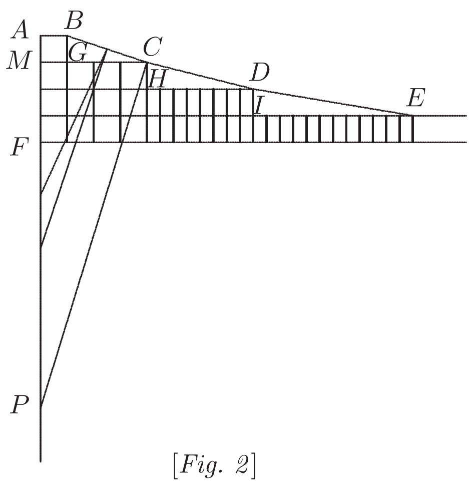
fiet: $\dfrac{a^6ey^6 + a^6ea^4y^2 - 6a^7ey^5 - 2a^{11}ey + 6ey^6a^6 + 2a^{10}ey^2}{y^{12} + 2y^8a^4 + a^8y^4}$

quod non video quaerendo priori aequationi consentiat, ut proinde necesse sit, subesse quendam in calculo paralogismum.

Experiendum an in methodo communi tangentium liceat non y tantum sed et v, sup-

---

4 Vide finem pag. sequentis, ubi vera denique et infallibilis methodus proposita est quae in eo praeterea excellit, quod transferri potest ad numeros.



[*Fig. 2*]

Nam si quaeritur summa omnium $\dfrac{a^2}{y^2}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$ exempli causa, in numeris tunc quaeritur series polygoni cujusdam seu figurae multilaterae, $ABCDEF$, certam regulam habentis, ita differentiae ordinatarum GC, HD, IE, sint progressionis $\dfrac{1}{y^2}$. Nam considerandum seriem ordinatarum, adjectitiis istis augendam ut polygonum compleatur ac tum demum perpendicularem posse duci PC. Ideoque ab inventa figura seu serie polygoni, seriem haberi triangulorum addititiorum postea subtrahendam, et ita habebitur perfecta numerorum et figurarum conciliatio.

ponere per incognita duarum radicum; Ex. grat. (Schoten. pag. 246) aequatio parabolae determinanda ad duas radices est: $y^2 + ry - 2vy + v^2 - s^2 \sqcap 0$. Ordinavit ille secundum indeterminatam y, ordinemus nos secundum indeterminatam v, fiet: $v^2 - 2vy \begin{array}{l} - s^2 \\ + y^2 \\ + ry \end{array}$ et componendo cum $v^2 - 2ev + e^2$, fiet $v \sqcap +y$. Quod constat esse falsum, idem eveniret multiplicata aequatione per 2. 1. 0. fiet enim $2v^2 - 2vy \sqcap 0$, sive $y \sqcap v$. Opus est proinde ut rationem cur ista non procedant investigemus. Imo jam invenio videoque ipsam v non esse duplicis valoris, considerata figura Cartesii pag. 44, est enim unica $AP \sqcap v$, at tam AQ quam $AM \sqcap y$.

Et hinc jam etiam videre mihi videor, cur non aequatione inventa duarum incognitarum quarum quaelibet duas habet radices aequales, ista forte methodus non procedat, ut determinetur velut si unam tantum haberet lineam unius significationis; videtur methodus determinandi aequationem trium incognitarum ad duas ex eo quod in ea duae sunt incognitae duas habentes radices aequales eadem esse cum methodo ducendi planum tangens superficiem curvam datam.

Et sed videtur altera incognitarum duos valores habentium eliminari posse, ope aequationis $\dfrac{y-v}{x} \sqcap \dfrac{...(x)}{...\ x}$. Sed difficultatem ex eo video, quod scilicet valor earum incognitarum quae duos habent valores aequales, cum valore earum quae tales non sunt, misceri non debeat. Quod si duas saltem v eliminari posse, tunc rursus dubito, est enim v unius valoris, at x et y duorum: calculus esset instituendus, perinde ac si problemata ejusmodi solvere vellemus, ponendo non radices esse aequales, sed habere differentiam quandam datam, quae postea cogitabitur aequalis $\sqcap 0$. Hac methodo res tota in plena luce collocari potest. Atque ita methodum tangentium inversam non minus ac directam hac ratione persequi licebit. Pone enim aequationem unam esse, primo $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2$, alteram: exempli causa, $v \sqcap \dfrac{a^2x + y^3}{a^2y^2}$, et v, atque s, esse unius valoris, sed y, et x, esse

20 ejusmodi *erg. L* 22 potest. *(1)* pono ut tam v + y, qvam x duos habeant valores aeqvales *(2)* Atque *L*

1 Schoten. pag. 246: Vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I. 5 per 2. 1. 0.: Vgl. die Erl. zu S. 60 Z. 3. 7 pag. 44: s. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44.

duorum valorum, eosque valores habere differentiam datam, ita ut differentia data inter duos valores ipsius y sit b, et inter duos valores ipsius x sit c. Sed ut v, quae unius est valoris, ope duarum incognitarum duorum valorum determinetur, id videtur impossibile, et est vero, nisi res ita constituta sit, ut quomodocumque duae illae quantitates quatuor, duae x, x et ξ, et duae y, seu y et $\cup$, inter se combinentur ex praescripto aequationis, nempe x, et y, vel x et $\cup$, vel ξ et $\cup$ vel y et ξ[,] ut nihilominus semper idem prodeat nempe v.

Sed de isto quidem non est necesse opinor, ut soliciti simus, nam cum impossibile sit errorem oriri, si pro aliqua quantitate substituatur ejus valor, eliminata v^2, habebimus aequationem hanc, e. g. $s^2 - \dfrac{a^4x^2 + 2a^2xy^3 + y^5}{y^4} + \dfrac{2a^2xv + y^3}{y} - 2y^2 - x^2 \sqcap 0.$ In qua duae sunt incognitae duas habentes radices; et tertia non nisi unam. Et huc scilicet veniendum est ad modum efficiendi, ut x et y, et x et $\cup$, et ξ et $\cup$, et y et ξ, ex praescripto aequationis propositae ultimae combinatae, semper producant idem et quis tunc debeat esse valor ipsius s. In methodo tangentium communi seu directa quaeritur tantum ratio efficiendi, ut una incognita duarum valorum ut y vel $\cup$ in aequatione posita semper proveniat idem. Problema autem in methodo quoque inversa non poterit opinor solvi melius quam per aequationum similium comparationem; nam ecce aequationem in qua x habet duos valores aequales, ergo similis est et est multipla hujus $x^2 - 2ex + e^2, \sqcap 0$. Eodem modo y in ea habet duos valores aequales, ergo similis est multiplae, hujus quoque $y^2 - 2\cup y + \cup^2, \sqcap 0$, ergo similis est multiplae actae ex utraque: $x^2y^2 - 2exy^2 + e^2y^2, -2x^2\cup y + 4ex\cup y - 2e^2\cup y, +x^2\cup^2 - 2ex\cup^2 + e^2\cup^2$ et ordinando: $x^2y^2 - 2exy^2 - 2\cup x^2y + \cup^2x^2 + e^2y^2 + 4ex\cup y - 2\cup^2ex - 2e^2\cup y + e^2\cup^2 \sqcap 0$. Erunt ergo aequationes collatitiae 8, at incognitarum tantum una est in data aequatione. Ergo data aequatio per aliam 7 indeterminatarum multiplicanda est, quae talis sit, ut ea multiplicatione factitiae similis fiat, quo facto conferendo tandem, omnesque incognitas elidendo, ultimae tandem valor invenietur. Possent quoque ambae partiales aequationes factitiae duarum radicum aequalium, per alias aequationes multiplicari, ita moderatis, ut ductis in se invicem productis fiat data, sed nullum inde compendium, satis est ergo productum multiplicari per aliam quandam, quae omnia aut pleraque loca repleat, adhibitis inco-

4 vero, *(1)* nisi vel differentiae *(2)* nisi *L* 14 et ... ipsius s. *erg. L* 18 qva *(1)* aeqvatione tam y *(2)* x *L* 18 est *(1)* et *(2)* | qvae *streicht Hrsg.* | sit *(3)* indeterminatae et *(4)* et *L* 24 7 *(1)* incognitarium *(2)* indeterminatarum *L*

gnitis, unde ponendo illas incognitas evanescere, seu ⊓ 0. Ubi termini scilicet nulli sunt tandem sponte sua aequatio similis fieret. Haec aequatio factitia dici potest habere omnia loca repleta, si scilicet neutra incognitarum dicatur ascendere debere ultra quadratum, revera tamen locus est quadrato — quadraticus, ob ductum in se incognitarum, et eo sensu loca vacari.

Etsi necesse sit tot esse aequationes collatitias quot incognitas, non ⟨ho⟩c necesse, ut quilibet terminus novam peculiariam habeat incognitarum.

Facillima res est, si factitia inventa per aliam repletam, si placet multiplicetur, in qua satis incognitarum, et inde collatitiae instituantur etiam cum terminis absentibus, ita enim etiam quaedam ex incognitis assumtis tolluntur. Si nimius indeterminatarum numerus, possunt superfluae mutari in cognitas.

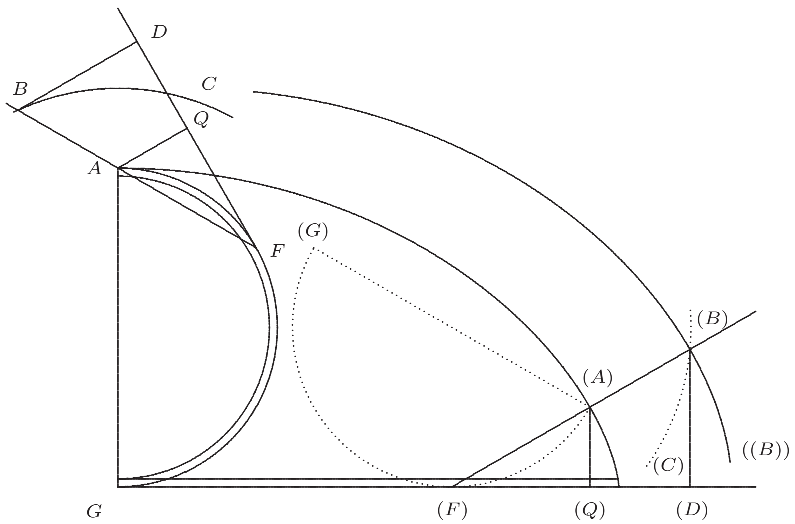
9. DE TROCHOEIDIBUS GENERIS COMPOSITI
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 11–12. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 11 r°. Bl. 11 v°, 12 r° u. 12 v° leer.
Cc 2, Nr. 902

Januar. 1675.

De Trochoeidibus generis compositi.

Trochoeidem voco quaecunque applicatione continua lineae cujusdam curvae rigidae ad aliam lineam (: neque enim hic de motu rotae per planum superficiemve excurrente loquor :), describitur. Linea autem cui applicatur describens, quam possis appellare sustinentem, est aut curva, aut recta; rectam autem nunc quidem supponemus. Rursus descriptio fiet aut ope puncti fixi, aut ope puncti mobilis. Ac primum descriptio per punctum fixum super recta verbo attingenda est, ut altera eo clarius intelligatur.



7 Trochoeidibus *(1)* a puncto variante descri *(2)* compositionibus *(3)* generis *L*
9 rigidae *erg. L* 9 f. (: neque . . . loqvor :) *erg. L* 11 f. supponemus. *(1)* Si recta est sustentans *(2)* Rursus *L* 13 super recta *erg. L*

[*Fig. 1*]

Esto linea describens FG. punctum fixum A. recta super qua fieri debet volutio, sive sustinens sit $G(F)$. Transferatur motu dicta figura AFG in situm $(A)(F)(G)$ eoque motu describetur curva Trochoeides $A(A)$. Ex puncto A ad rectam quae curvam describentem in puncto F tangit, demittatur perpendicularis AQ. Patet eam esse ordinatam Trochoeidis in basin seu rectam sustinentem.

Hinc posito curvam describentem esse analyticam, ex data AF, dabuntur AQ, FQ. Itaque Trochoeidis quoque inde descriptae trium rectarum perpendicularis $(A)(F)$, ordinatae $(A)(Q)$ et reductae $(Q)(F)$ nota invicem relatio erit, et aequatione analytica exprimi poterit; etsi ipsa Trochoeides non sit analytica, id est etsi ordinatarum $(A)(Q)$ ad abscissas $G(Q)$ relatio aequatione explicari non possit, nisi curvae GF magnitudine data. Haec autem qualiscunque et ut ita dicam s e m i a n a l y t i c a curvarum ejusmodi non analyticarum $A(A)$ explicatio in multis analyticam supplet. Nam si alia quaedam reperiatur curva, cujus eadem sit aequatio relationem explicans inter ordinatam et reductam, sequitur eam cum proposita esse eandem. Eodem modo et diversae curvae invicem similes agnosci possunt. Et si quidem ope diversarum curvarum describentium, ad eandem aequationem, qualem dixi relationem inter $(A)(F)$ et $(A)(Q)$ explicantem perveniri potest; hae duae curvae invicem dimensione pendebunt. Unde quam vastus aperiatur novae Geometriae campus Analyticus sagax facile judicabit, praesertim si eadem ope Trochoeidum compositi generis, ad quae nunc progrediar in immensum proferri cogitet.

Ostendam enim unius ejusdemque curvae analyticae ope tot alias decribi posse curvas semianalyticas ex Trochoeidum genere quot curvae analyticae sunt in rerum natura. In tanta autem multitudine infinitis utique modis evenire necesse est ut diversarum quarundam Curvarum describentium inter se coincidant Trochoeides. Satis tamen compertum habeo, impossibile esse, ut datis duabus quibuslibet curvis una utrique communis Trochoeides semianalytica reperiatur, alioquin enim omnes curvae ad unam reduci possent; et unius dimensione habita, uti certe habetur multorum, haberentur omnes: quod impossibile esse scio. Itaque impossibile est, ut exempli causa parabolae Heuratianae et Apollonianae communis Trochoeides semianalytica reperiatur.

Porro ut hoc Trochoeidum genus novum intelligatur sumto quolibet in curva descri-

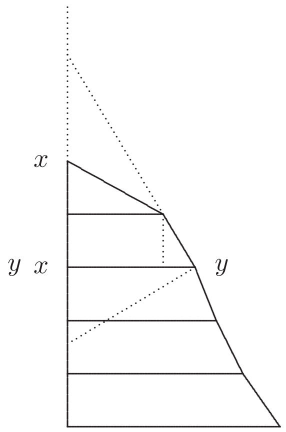
2 Esto *(1)* figura describens AFG. *(2)* linea *L* 3 GF *L ändert Hrsg.* 10 ipsa *1)* curva *(2)* Trochoeides *L* 11 f. nisi ... data *erg. L* 14 cuius *(1)* eadem sit proprietas *(2)* ea *(3)* eadem *L* 28 f. et *(1)* Archimedeae *(2)* Apollonianae *L*

bente puncto F, recta per punctum constans A trajecta producatur dum curvae cuidam BC, occurrat in B. Unde in tangentem curvae ad F, seu in r e c t a m v o l u t i o n i s demittatur perpendicularis $(B)(D)$ ea erit trochoeidis descriptae ordinata. Itaque quot diversae substitui possunt curvae excipientes BC, tot diversae trochoeides unius ejusdemque curvae volutione describi possunt. Imo et situs unius ejusdemque c u r v a e e x c i p i e n t i s diversus aliam atque aliam faciet Trochoeidem $(B)((B))$. Quoniam autem ipsa $(F)(B)$ non est perpendicularis ad curvam $(B)((B))$ superest, ut in eam inquiramus.

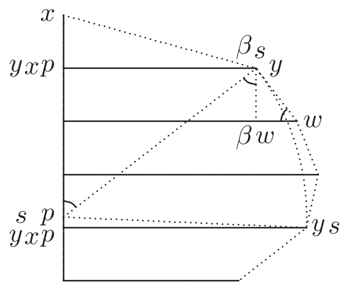
10. ANNOTATIO AD METHODUM TANGENTIUM
[Oktober 1974 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 62. 1/2 Bl. 4°. Ca. 1/2 S. auf Bl. 62 v° unten. Auf Bl. 62 r° VII, 3 N. 38_{16} tlw. sowie eine Aufzeichnung zur Pendelbewegung (Druck für Reihe VIII vorgesehen).
Cc 2, Nr. 543 tlw.

Datierungsgründe: Die Schrift der zu VII, 3 N. 38_{16}, dat. Oktober 1674, gehörigen Gleichungen auf Bl. 62 r° oben schlägt stark auf die Rückseite durch. Auf dieser ist Fig. 1 von N. 10 auf eine davon kaum beeinträchtigte Stelle der oberen Hälfte des Blattes geschrieben, Fig. 2 und der Text des Stückes auf die freie untere Hälfte, also wohl erst nach diesen Gleichungen. Die Aufzeichnung zur Pendelbewegung auf Bl. 62 r° ist weitgehend in den restlichen Freiraum geschrieben und dürfte zuletzt entstanden sein. Mit der Tangentenmethode von Descartes, die in N. 10 auftritt, beschäftigt sich Leibniz vorwiegend in der Zeit von Oktober 1674 bis Januar 1675. **[noch]**



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$p^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{p}{y}$, et posito w dari, seu esse v. g. $\sqcap \dfrac{a^3}{x^2 + \frac{1}{2}\beta x}$ fiet $p \sqcap$

$\dfrac{a^3y}{x^2\beta+\dfrac{1}{2}\beta^2x}$, et $p^2 \sqcap \dfrac{a^6y^2}{x^4\beta^2+x^3\beta^3+\dfrac{\beta^4x^2}{4}}$ et fiet:

$4a^6y^2+4x^4\beta^2y^2+4x^3\beta^3y^2+\beta^4x^2y^2 \sqcap 4x^4\beta^2s^2+4x^3\beta^3s^2+\beta^4x^2s^2$ quae determinanda est ad duas radices aequales.

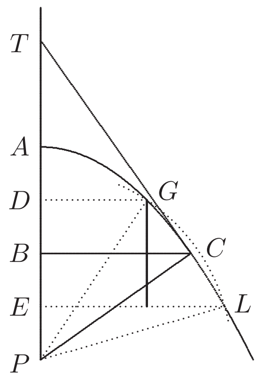
11. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA
Januar 1675

11_1. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. Schlussabschnitt (S. 79 Z. 9–21) auf den Rand von Bl. 1 v° geschrieben. Datum und Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 903 tlw.

Januar. 1675.

Methodus Tangentium inversa nunc tandem explicata



[*Fig. 1*]

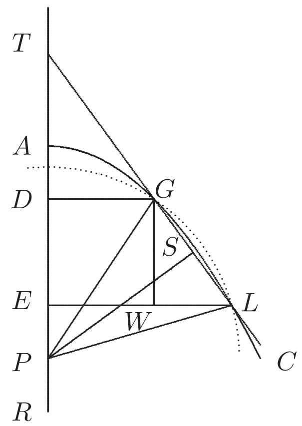
Esto AD vel $AE \sqcap x$, et DG vel $EL \sqcap y$ et $PC \sqcap s$. et $AP \sqcap v$. Erit $BP \sqcap v - x$. Jam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ ubi vero tam y, quam x duos habeat valores nempe y

11 nempe *(1)* AD, et AE *(2)* y *L*

9 *Fig. 1*: vgl. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44 f. Zu den Punkt- und Streckenbezeichnungen vgl. auch S. 40 f.

significat tam DG, quam EL, et x tam AD, quam AE.

Sit alia quaedam aequatio data; ea sane admitti potest, si non nisi relationem inter AD et DG vel AE, et EL. exprimat; sed regulariter admitti non potest, ut in ea ipsa aequatione rursus contineatur $\underline{v}$, vel $\underline{s.}$ Illud inprimis fieri non potest, ut in secunda aequatione data, una tantum contineatur ex indeterminatis; eo ipso enim quia valor ejus per ipsas s. et v. quae hoc loco pro determinatis habentur, explicari potest, illa ipsa indeterminata, fiet ex hac suppositione determinata. Ante omnia ergo necesse est ut in alteram illam aequationem duae ingrediantur indeterminatae, x et y. Insistamus huic methodo quantum licet. Reassumamus ergo.



[*Fig. 2*]

Esto curva quaelibet: GLC. referenda ad rectam AR a puncto fixo A indefinite progredientem. In qua sumta recta AP, quae data intelligatur, $\sqcap$ v, et intervallo PG etiam dato $\sqcap$ s. describatur arcus Circuli GL occurrens curvae in duobus punctis G et L. Jungatur LG arcus hujus chorda, quae producta ipsi AP occurrat in T. et ex P agatur in GL normalis PS. Ex punctis G. L. demittantur perpendiculares in directricem AR, nempe GD, LE. et ex G. demittatur GW, perpendicularis ad EL, aequalisque ipsi DE. Ipsas AD, vel AE, appellemus x, et ipsas DG vel EL appellemus y. cum sint ordinatae

4 ut *(1)* tam v *(2)* in ea sola ex incognitis contineatur una, v. g. x. *(3)* in *L* 5 ex *(1)* incognitis *(2)* indeterminatis *L* 13 f. L. *(1)* recta LG conti *(2)* jungatur *L* 17 x, *(1)* intelliga *(2)* cum sint ordinatae *(3)* et *L*

et abscissae unius ejusdemque curvae GLC. Et hoc quidem modo patet, si dentur AP, seu v, PG seu s. et curva praeterea positione, dari positione et puncta $G.L.$ adeoque problema esse definitum, et dari etiam rectas $AD, AE; DG, DP$.

Sed ponamus dari rectam AD vel DG, eo ipso si caetera omnia dantur dabitur et AE, vel EL. Attamen hac inquisitione numquam hic utemur, sed semper ponemus AD et AE, et DG, EL, unam eandemque incognitam, itaque sumendo AD vel AE, dataque positione curva, eo ipso invenientur AP, PL. Juncta enim GL et bisecta perpendicularis SP dabit punctum P. Quodsi punctum P. jam detur, necesse est ipsas DG et EL, non dari, neque adeo relationem inter x et y, seu AD et DG. Porro semper ex natura circuli dabitur haec aequatio ut supra: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$.

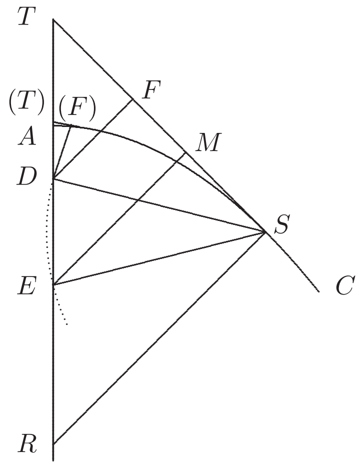
Jam si velimus dari DP, vel quod idem est dari AP, ex data AD, necesse est dari eodem modo ex data AE. Si volumus servare cöeptam characteristicam, ut scilicet x, significet aeque quamcunque abscissam quare cum eadem linea AP, componatur eodem modo ex duabus AD, et AE, componetur eodem modo ex omnibus, quemadmodum in aliqua figura latus rectum eodem modo componitur ex qualibet ordinata et abscissa. Cumque impossibile sit eodem modo componi ex omnibus abscissis, nisi et ingrediatur ordinata ut duae sint indeterminatae componentes unicam indeterminatam, ideo servato valore universali ipsius x vel y. necesse est s. non nisi ex ambabus simul componi. Sed hinc jam malum illud ingens, quod sit eadem AP, quae componitur eodem modo ex duabus, ergo erit et eadem quae componitur eodem modo ex omnibus. Quod est contra institutum, neque enim illud volumus eandem AP pro omnibus esse abscissis et ordinatis, sed eandem AP, pro duabus, et aliam AP esse pro aliis duabus.

Itaque ut servemus indeterminatas, non abscissis vel ordinatis; sed earum paribus aut independentibus imponenda essent haec nomina. Quod vero fieri non debet neque enim ita unquam veniemus ad aequationem determinandam ad duas radices aequales.

1 GLC. *(1)* Fingamus jam *(2)* Et *L* 3 definitum *(1)*; sed si qvid horum desit, pro *(2)*, et *L* 3 f. DP *(1)* qvoniam *(2)* Sed *(a)* et *(b)* ponamus aliqvid ex caeteris deesse; seu non dari, | et *streicht Hrsg.* | *(3)* Sed ponamus *(a)* eius loco *(b)* dari *L* 5 EL. *(1)* ideoqve non *(2)* sed *(3)* attamen *L* 8 P. *(1)* ex *(2)* aliunde non *(3)* jam *L* 17 sint *(1)* curvae, ideo *(2)* incognitae *(3)* indeterminatae *L* 24 aut independentibus *erg. L* 24 non *(1)* potest *(2)* debet *L*

10 haec aequatio: Die angeführte Gleichung ergibt sich für alle Kurven, wenn man die Bezeichnungen aus R. Descartes, *a. a. O.* S. 40 f. wählt.

Nam si exempli causa rem reducamus ad aequationem in qua v. g. e GL inquiratur AP. neque ullae aliae incognitae ingrediantur; nondum inde exitum video ullum etsi haec consideratio sit satis memorabilis.



[*Fig. 3*]

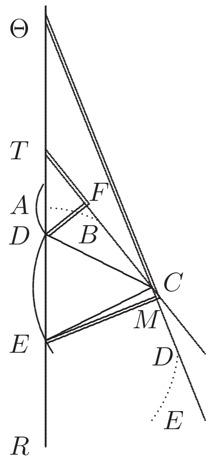
Fingamus curvam quamlibet SC ad quam Tangens TS. Nota TS hic respondet AP figurae superioris. Centro S. intervallo SD, vel SE, describatur circulus rectam AR secans in duobus punctis $D. E$. Unde in ipsam TS. ducentur perpendiculares DF, EM. Patet jam TF, TM respondere AD, AE, figurae superioris et DF, EM. ipsis DG, EL et SD vel SE ipsis PG, PL. Itaque TF vocetur $x, FD \sqcap y$. $TS \sqcap v$. $SD \sqcap s$. Hinc jam inveniri poterit aequatio determinanda ad duas radices aequales.

Sed considerandum id nihili esse, quoniam conditio illa non est ingressa calculum, quod TS sit alicujus curvae tangens. Nam si ingressa fuisset haec conditio, rem absolvissemus sane si $(T)(F)$ esset alia quaedam tangens (distincta a TM,) ad quam $D(F)$ perpendicularis; tunc equidem apparet lineam $(F)SC$ esse curvam, sed non potest veniri ad aequationem duarum radicum aequalium. Et certe frustra inquiritur in methodos, quae si succederent in omnibus Curvis succederent, quod est impossibile. Opus enim qua-

5 *(1)* | Si fingamus exempli causa *streicht Hrsg.* | *(2)* ponamus dari *(3)* fingamus *L* 5 TS *(1)* et perpendicularis PS. *(2)* nota *(a)* TS *(b)* T hic respondet puncto A, TS rectae *(c)* TS *L* 14 lineam | FSC *ändert Hrsg.* | esse *L*

dam particulari in quibusdam tantum curvis succedente methodo; sed quae in proposita qualibet ostendat an res succedat an non.

Et ita tandem inani spe inveniendi per duas radices aequales serierum summas, et figurarum quadraturas sum liberatus; rationemque detexi cur sic ratiocinari non liceat, quod me diu satis vexavit.



[*Fig. 4*]

An sic: sit curva $ABCDE$ duo ejus latera infinite parva BC, CD. duo tangentes in eodem puncto C secantes $TBC, \Theta CD$. Centro C, radio $CD \sqcap CE$ describatur circulus secans rectam AR in punctis $D. E$. Ponatur data relatio inter TF, et DF vel inter ΘM et $EM, \Theta M$ vel $TF \sqcap x$. et EM vel $DF \sqcap y$. $TC \sqcap v$. $\Theta C \sqcap (v)$. Sed TF vocabo $x, DF\, y$. Et $\Theta M\,(x)$ et $EM\,(y)$. $FC \sqcap v - x$. et $MC \sqcap (v) - (x)$. $DC \sqcap s$.

$$s^2 \sqcap \boxed{y^2} + v^2 - 2vx + x^2 \sqcap \boxed{y^2} + (v)^2 - 2(v)(x) + x^2$$

Malum in eo, quod non potest una obtineri aequatio, qua derivetur s. eodem modo

10 (v). *(1)* et FC $\sqcap$ *(2)* Sed *L*

6 *Fig. 4*: Die Punktbezeichnungen D und E werden doppelt verwendet. Für die Argumentation spielen nur die auf ΘR gelegenen Punkte eine Rolle. 12 s^2: In der folgenden Gleichung wäre nach dem 2. Gleichheitszeichen $(y^2) + (v)^2 - 2(v)(x) + (x)^2$ richtig gewesen.

ex TF, DF, quo ex $\Theta M, EM$. Nimirum hoc modo fit una praeterea incognita v, nempe aequatio est: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$ et unam ex his tribus, y. x. v. elidendo ope datae aequationis, restabit aequatio in qua duae sunt incognitae capitales, et utraque duas habet radices aequales, formula itaque inde proveniens ordinanda est utroque modo ad duas radices aequales, atque ita invenientur s, et v per x si (ablata jam ante y,) ordinentur omnia secundum x. Vicissim invenientur s. et x per v, si ordinentur omnia secundum v. Quod si ergo relationes duae inter x et v. inter se consentiant, possibile est problema, et habebitur relatio inter ordinatam et perpendicularem.

Sed si quaeramus relationem inter ordinatam et abscissam non ΘM, vel TF, sed ΘD, et ΘE adhibebimus quas ingredetur x, abscissa, quippe earum pars ex TD^2 vel ΘE^2 subtrahendo DF^2 vel EM^2, habebimus TF^2 vel ΘM^2, quibus addemus novam incognitam FC vel CM unde erunt incognitae ambiguae quatuor: ΘC vel TF, AD vel AE, DF vel EM, FC vel MC, et una fixa DC vel $EC \sqcap s$. Unde unam elidendo ex data problematis conditione restabunt incognitae ambiguae tres quarum quaelibet duos habet valores aequales, itaque secundum singulos ordinanda aequatio est, quod si consentiunt calculi provenientes solutum est problema; sin minus impossibilis habenda est aequatio quae naturam curvae quaesitae exhibeat.

Hic nota si duae datae essent conditiones, non ideo numerum ambiguarum deminui posse, sed proceden[dum] quasi duo essent problemata et videndum an calculus consentiat. Quia una conditione res est satis determinata.

Vide haec melius tradita schedula addita sub signo ♋.

11_2. APPENDIX METHODI TANGENTIUM INVERSAE NUNC TANDEM EXPLICATAE

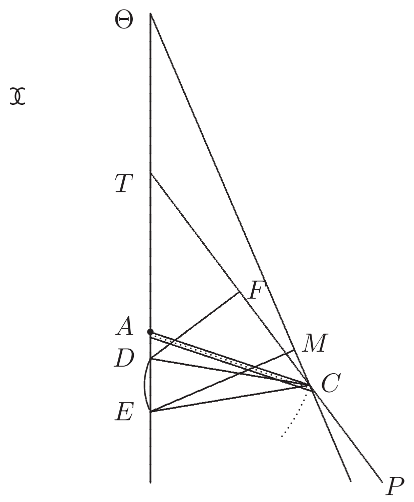
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. Papier unvollständig geschöpft, es fehlt ein halbmondförmiger Ausschnitt am rechten Rand. 1 S. auf Bl. 2 r°. Datum und Überschrift ergänzt. Am linken Rand Figur außerhalb des Textzusammenhangs (s. u. S. 81

6 f. v. *(1)* Reperitur ergo valor ipsius *(2)* qvod *L* 12 ΘC vel | TD *ändert Hrsg.* |, AD *L*

21 schedula addita: vgl. 11_2.

Z. 6). Auf Bl. 2 v° N. 11_3.
Cc 2, Nr. 903 tlw.

Appendix Januar. 1675. methodi Tangentium inversae nunc tandem explicatae



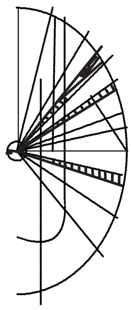
[*Fig. 1*]

TF vel $\Theta M \sqcap x$. DF vel $EM \sqcap y$. $CD \sqcap CE \sqcap s$. $AC \sqcap v$. FC vel $MC \sqcap t$. Ex datis TF. FD. AC quaeritur CD. Videndum an hoc satis determinatum. Quod ita patebit, centro A, radio AC, describatur circulus[,] inde datus angulus rectus TFD extremitati lineae rigidae PFT affixus circa quodlibet in circumferentia circuli sumtum punctum C tamdiu agatur, simulque et sursum ac deorsum moveatur, donec puncta T. et D. cadant in rectam ΘAE. directricem. Quod cum dato quolibet puncto C. obtineri possit, patet non esse problema determinatum, nisi alia accedat data v. g. FC. Itaque ex TF. FD. FC. AC. datis, quaeritur CD. Eodem autem modo quo ex his invenietur $CD\,(\sqcap CE)$ eodem modo etiam ex $\Theta M, ME, MC, AC$ invenietur CE, seu CD. Itaque habebitur aequatio ubi tres ambiguae seu duplicis valoris, nempe x. y. t. et duae simplicis valoris, nempe s et v. Una autem ex his tribus, nempe ex x. y. t. poterit eliminari,

6 CD. *(1)* centro A radio AC fingatur *(2)* videndum *L* 11 FC. *(1)* aut etiam qvaedam relatio *(2)* itaqve *L*

ex problemate scilicet dato; itaque restabit aequatio duarum ambiguarum, et duarum simplicium indeterminatarum. Quam secundum utramque ex ambiguis determinabimus ad duas radices aequales, ordinando nunc secundum unam, nunc secundum alteram; et secundum utramque ordinationem, arithmetica progressione (compendio Huddenii) multiplicando praeter datam ergo, habebuntur adhuc duae aequationes, ope harum multiplicationum; id est habebuntur aequationes tres. Ergo duae quantitates ambiguae tolli poterunt duobus modis; nam tollantur primum una ope unius aequationis, inde altera bis, ope reliquarum duarum, restabunt tantum duae, nempe v et s. idque duobus modis, necesse est ergo inter se consentire hos duos modos atque coincidere; quo facto solutum erit problema, — et habebitur modus describendi Geometrice curvam quaesitam. Sin vero non consentiant, pro certo habendum est, problema esse impossibile sive naturam curvae quaesitae nulla ejusmodi aequatione relationem s et v continente, exprimi posse. Experienda haec methodus in quibusdam problematis methodi tangentium inversae jam a posteriori notis. Hinc etiam semper haberi potest methodus inveniendi curvam quam proxime satisfacientem. Etiam forte ope hujus methodi inveniri possunt ejusmodi solutiones ex hypothesi cujusdam quadraturae.

6–16 *Am Rande Figur ohne Bezug zum Text:*



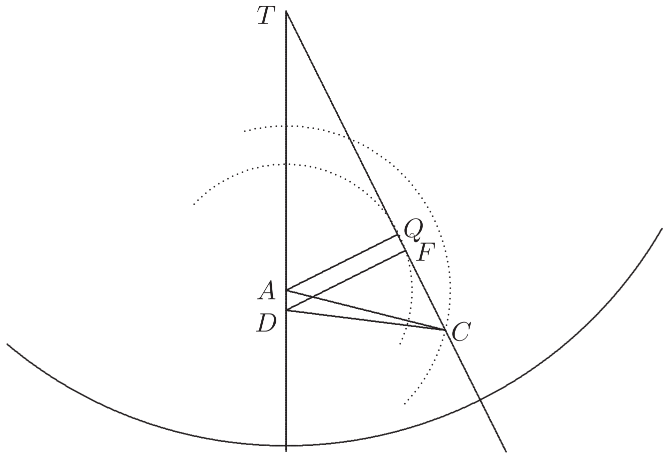
6 tres. *(1)* qvarum ope tollentur *(2)* Ergo *L* 7 primum *(1)* ope duarum aeqvationum, *(2)* una *L*

4 compendio Huddenii: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS I* S. 436–439 u. S. 507–516. Auch S. 83 Z. 15 wird auf dieses Verfahren Bezug genommen.

11_3. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA. JANUAR. 1675. PARS II[DA]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 2 v°. Auf Bl. 2 r° N. 11_2. Cc 2, Nr. 903 tlw.

De Methodo tangentium inversa. Januar. 1675. pars II[da]



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

$DC \sqcap s$. $AC \sqcap v$. Jam $TA^2 - AQ^2 \sqcap TQ^2$. $v^2 - AQ^2 \sqcap QC^2$. $\dfrac{TQ}{AQ} \sqcap \dfrac{TQ+QF}{DF}$ sive $\dfrac{TQ}{AQ} - \dfrac{TQ}{DF}, \frown\ DF \sqcap QF$. $FC \sqcap \dagger\sqrt{v^2 - AQ^2}(\dagger)\dfrac{TQ \frown DF - TQAQ}{AQ}$. et $DC^2 \sqcap s^2 \sqcap v^2 - AQ^2(\dagger\dagger)DF - AQ \frown \dfrac{TQ}{AQ}\, 2\sqrt{v^2 - AQ^2},, + DF^2 - 2DF, AQ, + AQ^2, \dfrac{TQ^2}{AQ^2},,, + DF^2$. In qua aequatione duae sunt simplicis valoris, nempe s et v, reliquae tres, AQ, DF, TQ.

9 sunt *(1)* fixae ac *(2)* simplicis valoris *(a)* indeterminatae *(b)*, nempe *L*

5 *Fig. 1*: Die gesuchte Kurve durch C (und A) ist nicht in der Figur enthalten. AQ und DF stehen senkrecht auf TC; TC ist als Tangente an die gesuchte Kurve zu verstehen.

duplicis, ut ex figura paginae praecedentis patet. Res eodem redit, si ut TQ elidamus, ingredi calculum malimus TA. Item si nolimus uti DF possumus uti AD. Fiet enim: $\dfrac{QF}{AD} \sqcap \dfrac{TQ}{TA}$. Ergo $QF \sqcap \dfrac{TQ, AD}{TA}$. Atque ita neque AQ, neque DF utemur. Ergo $AQ^2 \sqcap TA^2 - TQ^2$. et $QC^2 \sqcap AC^2 - AQ^2 \sqcap AC^2 - TA^2 + TQ^2$ et erit: $FC \sqcap \dfrac{\dagger\sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2}\; TA(\dagger) - TQ, AD}{TA}$ et $\dfrac{DF}{AQ \sqcap \sqrt{TA^2 - TQ^2}} \sqcap \dfrac{TA + AD}{TA}$. Ergo $DF \sqcap \dfrac{TA + AD, \sqrt{TA^2 - TQ^2}}{TA}$. Ergo $DC^2[, TA^2]$ seu $s^2TA^2 \sqcap +AC^2 - TA^2 + TQ^2,$ $TA^2,, \dagger\ (\dagger) - 2TA, TQ, AD, \sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2} + TQ^2, AD^2,,, + TA^2 + 2TA, AD, + AD^2,, \frown TA^2 - TQ^2$.

Unde cum rursus alia opus sit quadratione ad calculum purificandum; satis intelligi potest, posteriorem calculum priore nihilo esse compendiosiorem, imo fortasse priorem compendiosiorem esse. Obtenta ergo denique aequatione pura, et aliqua ex tribus ambiguis, AQ, DF, TQ vel TA, TQ, AD ope proprietatis tangentium datae ad curvam quaesitam, elisa; restabit aequatio duarum ambiguarum, determinanda ad duos utriusque ambiguae valores aequales. Itaque nunc secundum unam, nunc secundum alteram ordinata multiplicabitur ad duas radices aequales, methodo Huddeniana, itaque habebuntur aequationes tres, data, facta ex data secundum unam ordinationem, facta ex data secundum alteram ordinationem. Ope factae ex data secundum unam ordinationem, inveniatur unius ex ambiguis valor, et elidatur ambigua, illa ex data; ope factae ex data secundum alteram ordinationem elidatur altera ambigua; et habebitur aequatio in qua nulla restabit ambigua.

Inspice exempli causa has tres aequationes[:] $x+y+a \sqcap 0$. $x^2+y^2+b \sqcap 0$. $y^2+x+c \sqcap 0$. Ope primae aequationis habebitur valor ipsius x. Substituatur is in secunda et tertia, elisa erit x. Restabunt aequationes duae, in quibus non nisi una incognita erit y. Itaque quaerendo valorem ipsius y tam secundum unam, quam secundum alteram, necesse est oriri

12 AD *(1)* ope problematis dati particularis elisa, restat aeqvatio *(2)* ope *L* 15 ordinata *(1)* semper *(2)* multiplicabitur *L*

1 figura: s. *Fig. 1* in N. 11$_2$. 15 methodo Huddeniana: vgl. die Erl. zu S. 81 Z. 4.

aequationem identicam, sive coincidere hos duos valores; sin minus problema erit impossibile, non quidem absolute, attamen per calculum analyticum. Quod si aliquo casu felici fiat, ex natura problematis, ut ope conditionis sive proprietatis datae tollantur ex aequatione proposita ambiguae duae, tunc certum erit utique problema esse possibile. Itaque inquirendum subtilius, quaenam proprietates tangentium sint hujusmodi; item, an obliquato problemate, supposita aliqua quadratura aut dimensione curvae, veniri possit ad ejusmodi destructionem. Hoc enim jam superest maxime inquirendum quomodo problemata Tangentium inversa reducantur ad simplicissimas Quadraturas vel curvarum in rectum extensiones. Item videndum an ope quantitatum arbitrariarum effici possit, ut obtineatur sub finem duorum calculorum coincidentia. Denique ista ad numerorum quoque summas transferri possunt.

11_4. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PARS III$^{\text{TIA}}$

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°. 4 S.
Cc 2, Nr. 904

Januar. 1675.

De Methodo Tangentium inversa pars III$^{\text{tia}}$

Duabus prioribus schedulis rem antea desperatam effeci, ut problemata Tangentium inversa, seu modi inveniendi figuram, data tangentium proprietate, ad calculum analyticum revocarentur; secunda earum inprimis, ubi ostendi regulariter problemata methodi tangentium inversae revocari ad aequationem quam ingrediantur indeterminatae quatuor, ex quibus duae sunt capitales, duae vero incidentes. Et duae capitales sunt

1 *Über* valores: error

19 revocarentur; *(1)* ultima *(2)* posteriore *(3)* secunda *L* 21 sunt *(1)* incognitae *(2)* capitales *L*

17 prioribus schedulis: N. 11_{1-2} und N. 11_3.

ambiguae sive duos habent singulae valores aequales. Itaque aequatio primum secundum unam, deinde secundum alteram ordinanda, et semper Huddeniano more ad duas radices aequales multiplicanda est. Habebuntur aequationes tres, quarum unius ope ex duabus reliquis tolletur una indeterminatarum capitalium; restabunt aequationes duae, quarum cum quaelibet eandem habeat indeterminatam capitalem, ope unius ex ipsis valor ejus quae restat capitalis habebitur; et in altera in ipsius capitalis locum substituetur; atque ea aequatio in qua substitutus est valor, nullam amplius ex duabus illis incognitis capitalibus habebit, sed residua aequatio nullas habebit indeterminatas praeter incidentes, quae tamen eae ipsae sunt quas potissimum quaerebamus.

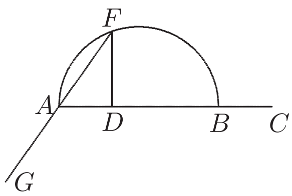
Et ita quidem videtur semper haberi posse quod desideramus, regulariterque solvi poterunt problemata tangentium inversa; nisi subsit aliquid quod nos turbet, quod quale sit nondum satis judico. Fieri equidem potest quibusdam casibus, ut una sola aequatio tollat duas incognitas; et ut duae incognitae reapse non nisi pro una haberi possint, et eo casu calculus exitum reperire sane non potest, ut si sit aequatio $y^2+2yx+x^2+bx+by-a^2 \sqcap 0$. Nam in hac aequatione duae sunt in speciem incognitae y et x, reapse non nisi una est: $y+x \sqcap z$. Perinde enim est ac si diceres: $z^2+bz-a^2 \sqcap 0$. Saepe nimirum fiet ut una quadam linea recta incognita sive quaesita sumta, fiat aequatio unius incognitae; cum alias sit duarum incognitarum apparentium, ut si sit aequatio: $+y^2 \begin{array}{l}+2y\sqrt{ax}\\ +\ b\ \ldots\end{array} + ax + by + a^2 \sqcap 0.$

Et adhuc ordinando: $y^2 + ax + by + a^2 \sqcap \begin{array}{l}-2y\sqrt{ax}\\ -\ b\ \ldots\end{array}$ sive quadrando:

$$y^4 \begin{array}{l}+2a\\ -4a\ \ldots\end{array} y^2x + 2by^3 + 2a^2y^2, + a^2x^2 \begin{array}{l}+2ab\\ -4ba\ \ldots\end{array} yx \begin{array}{l}+2a^3\\ -b^2a\ .\end{array} x, + 2b^2y^2 + 2ba^2y, + a^4 \sqcap 0$$

1 Itaqve *(1)* viden *(2)* multiplicando aeqvation *(3)* aeqvatio *L* 3 tres, *(1)* incognitarum *(2)* indeterminatarum *(3)* qvarum *L* 4 una *(1)* incognitarum, restabu *(2)* incog *(3)* indeterminatarum *L* 11 turbet *(1)* qvod non *(2)* idqve *(3)* qvod *L* 18 si *(1)* dicas $y + \sqrt{ax} \sqcap z$ *(2)* sit *L* 19 adhuc *(1)* tollendo *(a)* ra *(b)* irrationalem *(2)* ordinando *L*

2 Huddeniano more: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 436–439 u. S. 507–516. Auf Huddes Verfahren wird auch S. 98 Z. 7 f. Bezug genommen.



[*Fig. 1*]

Haec aequatio duarum in speciem incognitarum, non est revera nisi unius. Sint enim lineae, data $a \sqcap AB$. quaesitae $y \sqcap BC$, et $x \sqcap AD$. Circa AB diametrum describatur circulus AFB, ita ut FD sit perpendicularis ad AB. Juncta AF erit $\sqcap \sqrt{ax}$ et producta FAG, dum AG aequetur ipsi BC erit $GF \sqcap y + \sqrt{ax}$. Quae si appelletur z, et ipsa z seu GF velut incognita quaeratur, aequatio producta in speciem tam alta, duarum incognitarum, ad unam redibit incognitam valde simplicem: $z^2+bz+a^2 \sqcap 0$. Unde apparet saepe fieri, ut aequatio duarum appareat incognitarum, nec sit tamen, atque ita fiat, ut existentibus eo casu duabus aequationibus problema fiat impossibile. Oblata autem aequatione ejusmodi res ita apparebit, si ex ea unius incognitarum valorem extrahere laboremus, quaerendo aequationis radicem, ita enim eadem opera inveniemus duarum valorem: v.g. $y^2 + 2yx + x^2 + by + bx - a^2 \sqcap 0$.

$$\begin{array}{lllll} \text{Ergo}: & y^2 & +\ 2xy & +\ x^2 & \sqcap 0 \\ & & +\ b\ \ . & +\ bx & \\ & & & -\ a^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{Unde}: & y^2 & +\ 2xy & +\ 4x^2\ \sqcap & 4x^2 & -\ x^2 & \text{unde extrahi potest radix etc.} \\ & & +\ b\ \ . & +\ 4xb & +\ 4bx & -\ bx & \\ & & & +\ b^2 & +\ b^2 & -\ a^2 & \end{array}$$

Sed jam video hic lapsum me, dum credo certis casibus problema esse nimis deter-

3 AD. *(1)* Centro B radio BA describatur ci *(2)* circa *L* 19 credo *(1)* problema *(2)* duas tantum incognitas locum habere *(3)* certis *L*

1 *Fig. 1*: Leibniz hatte zunächst (vgl. Stufe 1 der Variante zu Z. 3) einen Halbkreis mit Radius BA gezeichnet, DF bis zum Schnittpunkt mit dem Halbkreis verlängert und die Verbindungsstrecke zu A gezogen. Anschließend hat er den Halbkreisbogen gestrichen. Es werden nur die gültigen Elemente der Figur wiedergegeben.

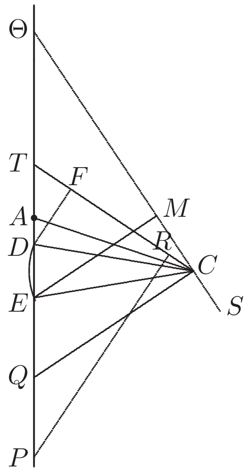
minatum, quando certo valore novae incognitae assumto, ex aequatione duarum incognitarum fieri potest una, jam enim video id semper fieri posse, semper scilicet posse lineam duci qua pro incognita assumta, ex aequatione duarum incognitarum fiat aequatio incognitae unius, nimirum unius illius incognitae ratione problema est determinatum; non vero ratione duarum ex quibus componitur ejus valor, quemadmodum fieri potest, ut duarum linearum ignotarum summa sit nota etc.

Hinc jam sequitur si sint aequationes duarum vel etiam plurium incognitarum (+ ita posset etiam methodus Tangentium inversa tractari methodo Fermatiana), quarum quaelibet duos habeat valores aequales; semper posse reduci aequationem ad unicam duos tantum valores aequales habentem, quia semper linea aliqua poterit duci, cujus solius duplex valor sufficiat. Itaque tum demum impossibilis reddi potest aequatio, cum unius aequationis ope tolli possunt incognitae duae.

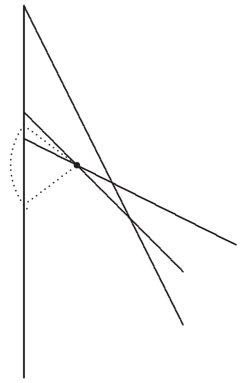
Caeterum in exempla inquiramus in quibus certum est aliunde exitum haberi: Quaeritur curva, in qua sit reducta semper constans.

2 video | id *streicht Hrsg.* | id *L* 5 valor *(1)* non itaqve *(2)* qvemadmodum *L* 7 f. (+ ita ... Fermatiana) *erg. L* 9 f. unicam *(1)* unius tantum valoris *(2)* duos *L*

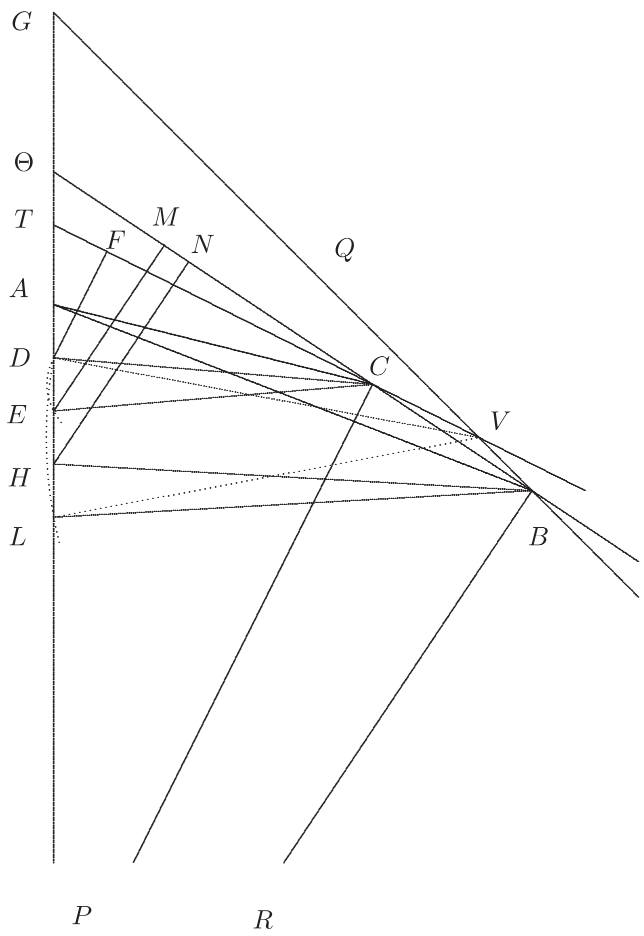
8 methodo Fermatiana: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die Darstellung der Tangentenmethode Fermats in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255. 14 reducta semper constans: Die zugehörige Kurve ist eine Parabel; vgl. VII, 3 N. 39, S. 560–562 sowie unten S. 97 Z. 13 ff.



[*Fig. 2a*]



[*Fig. 2b*]



[*Fig. 2c*]

Esto directrix $G\Theta TADEHLPR$, in qua punctum fixum A. Tres curvae quaesitae tangentes $TC, \Theta CB, GB$. latus unum infinite parvum CB determinantes. Jungantur rectae AC, AB. Centro C, radio quolibet CD. describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis D. E. Eodem modo centro B radio BH describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis, H, L. Quod si intervallum DE ponatur infinite parvum,

3 unum *(1)* indefinite *(2)* infinite *L*

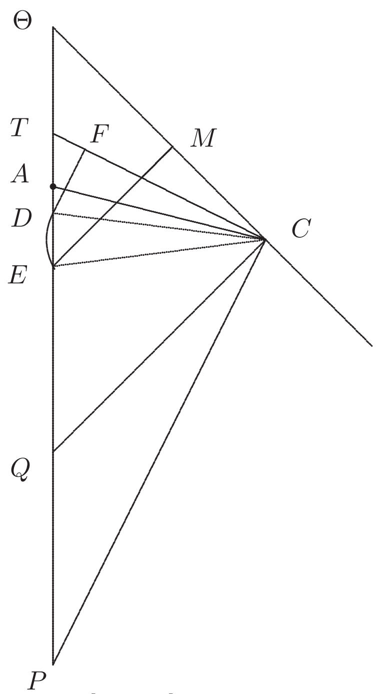
vel etiam HL. idem est ac si recta CD vel CE, item BH et BL esset ad directricem perpendicularis seu ordinatim applicata. Ipsi TC tangenti perpendicularis CP directrici occurrat in P, et ipsi ΘCB alteri tangenti perpendicularis BR, eidem occurrat in R, erunt reductae DP, et HR, inter se aequales.

Quo posito quaeritur natura hujus curvae, seu relatio ipsius CD, ad ipsam AC. Nimirum ducantur perpendiculares DF, EM, HN, LQ. Patet parallelas esse, DF, CP, item EM, HN, BR. Investigetur DC, ex DF, TF, TA (vel aliter,) habebitur CD, eodem modo ex EM, ΘM, ΘA fiet $CE \sqcap CD$. Unde aequatio trium incognitarum ambiguarum (quarum una elidi potest). Similiter rursus ex $HN, \Theta N, \Theta A$, investigetur BH, et eodem modo ex LQ, GQ, GA investigetur BL. Ita alia rursus aequatio.

Sed jam video Tribus istis Tangentibus, duobusque punctis curvae, non esse opus, nisi quando quaerimus progressiones illas in se continue reflexas, cum terminus sequens derivatur ex antecedente; ubi fieri potest etiam ut duobus sit opus lateribus, et tribus punctis et quatuor tangentibus ut cum laterum progressio explicatur dependentia unius ex altero. Hoc loco videntur puncta $G. Q. B. H. L. R.$ omitti posse. Nempe ipsa DF, valorem habet determinatum, et efficiendum, ut ipsa calculum cujus ope [*bricht ab*]

2 tangenti *erg. L* 4 et | HP *ändert Hrsg.* | inter *L* 5 f. AC. *(1)* sed sciend *(2)* | Nimirum *streicht Hrsg.* | *(3)* Nimirum *L* 7 ex *(1)* AC, TD, DF, *(2)* DF *L* 11 f. curvae *(1)* imo et pluribus *(2)* non *L* 14 f. ut ... progressio *(1)* pendet ex se invicem *(2)* explicatur ... altero *erg. L*

5 ad ipsam AC: Möglicherweise liegt ein Schreibfehler vor (AC für AD). Die gesuchte Kurve kann auch durch eine Relation in AC und CD charakterisiert werden.



[*Fig. 3*]

Sit per punctum datum A transiens recta indefinita positione data ΘAP, quam vocabo directricem, cui in punctis $T.\,\Theta$. occurrant duae rectae in puncto C. se secantes, CT, $C\Theta$. Centro C, radio, CD, describatur arcus circuli DE, secans rectam directricem, in punctis $D.\,E$. Ex puncto D ducatur perpendicularis DF ad rectam TC, et ex puncto E perpendicularis EM ad rectam $C\Theta$. Datum intelligatur punctum A, et rectae AC magnitudo, ac proinde circulus in cujus circumferentiam incidit punctum C. Data etiam intelligatur AP. rectaque indefinita circa punctum C gyrata, secabit alicubi circulum centro A radio AC descriptum. Quod si praeterea daretur etiam AT, determinatum erit punctum C, idem est si alia quaedam ejusmodi linea detur: Denique data recta DF, dabitur etiam punctum D.

Jam ex rectis AT, AP, DF; AC; datur recta DC. et eodem plane modo, ex datis $A\Theta$, $AQ, EM; AC$; datur recta $CE \sqcap DC$. Itaque litera una eademque, sed duplicis valoris repraesentari possunt AT et $A\Theta$, item AP et AQ; ac denique DF, et EM. Ex

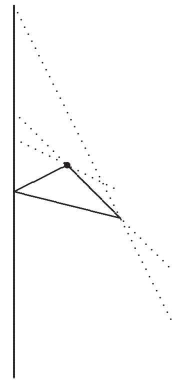
2 f. qvam ... directricem *erg. L* 10 C, *(1)* qvia angulo | recto *erg.* | TCP circa centrum P gyrato *(2)* idem *L* 14 EM. *(1)* Et qvoniam ponen *(2)* Ex *L*

his ambigua AP, vel AQ elidi potest, quia valor ejus hoc loco supponitur esse datus et constans; restant incognitae duae, AT vel $A\Theta$, et DF vel EM. Aequatio autem per quam ex datis AT, AP, DF, AC; invenitur DC, ordinetur tum secundum ambiguam AT vel $A\Theta$, tum secundum ambiguam DF vel EM, et multiplicetur secundum utramque ordinationem ad effectum duarum Radicum aequalium, et praeter inventam habebuntur duae aliae aequationes, quarum ope elidentur duae illae ambiguae, nec aliae restabunt indeterminatae quam AC, et DC. Recte ista quidem et intelligi potest sumta alia AC, et alio quolibet puncto C. etc. eundem calculum valere; sed una tamen difficultas superest, quod hac ratione exprimitur quidem puncta C. omnia cadere in curvam quaesitam; et quod miror, determinatur natura Curvae; sed non determinatur rectam TC ejus curvae esse tangentem; unde cum infinitis modis ductae intelligi possint rectae $TC, \Theta C$, ut si jungantur tangentes alterius cujusdam curvae datae ipsam curvam quaesitam in eo loco secantis; manifestum est problema non debere determinatum esse. Et miror tamen, ut dixi curvam fieri determinatam, seu restare duas tantum incognitas.

Nisi scilicet dicamus non exprimi magnitudinem ipsius DE. Quod ita videbimus: posita TQ infinite parva coincident puncta T et Q. ergo et rectae CT et CM. Rectae autem DF, et EM sunt aequales, seu differentiae infinite parvae, sed hinc non potest probari eas coincidere. Itaque patet nullo modo exprimi naturam curvae, quia prout DE alia atque alia assumitur alia atque alia fit curva, et si sumatur infinite parva, tum demum habetur curva determinata.

Itaque ejusmodi inquisitione nihil agitur. Ac proinde etsi nondum desperem, video tamen alia ratione opus esse.

1 AP, *(1)* |et *streicht Hrsg.*| *(2)* vel *L* 12 qvaesitam *erg. L* 14 tantum *(1)* ambiguas *(2)* incognitas *L* 15 DE. *(1)* Neqve enim ex datis TQ, et EM. DF. *(2)* Imo exprimitur *(3)* nam posita, TQ *(4)* TQ, infinite parva *(a)* erit *(b)* erunt et TC et CΘ linea eadem; *(5)* Qvod *L* 17 seu ... parvae *erg. L*



[*Fig. 4*]

Quod si duabus ad unam eandemque aequationem ordinatis vel abscissis opus est, non veniemus profecto ad aequationem, sed semper ad calculos illos mirabiles in se reflexos, quos tamen fateor, valde operae pretium est persequi, cum profundas contineant et miras speculationes, quae apparent, cum duo diversissimis istis viis quaeruntur. Venit tamen in mentem aliqua observatio, cujus ope fortasse evitari potest duplicitas incognitarum earundem. Inspice figuram ☉. Ibi tres sunt tangentes TCV, ΘCB, et GVB. Sive si mavis polygoni ordinati circumscripti latera producta TCV, GVB curvam in punctis C. B. tangentia; latus unum polygoni inscripti productum ΘCB. Appello enim polygona ordinata, quaecunque curvae alicubi certa regula constanti, inscribuntur aut circumscribuntur. Centro V. radio VD vel VL describatur arcus circuli LD, secans directricem in punctis D, L. Unde posita recta DL. infinite parva, poterit VD. censeri ordinata curvae quaesitae. Jungatur AV. Videndum jam est, an ope ipsarum ductarum TC, ΘCB; eodem calculo inveniri possit DV, quomodo ope ductarum GB, et ΘCB inveniri potest VL. Adhibitis scilicet AT vel AC una ambigua expressis, et perpendicularibus tam ex D quam ex L in ipsam ΘCB. ductis rursus una ambigua expressis. Ita enim si postea ea ambigua

8 polygoni *(1)* regul *(2)* ordinati *(a)* intra curvam *(b)* circumscripti *L* 14 GB, | et *streicht Hrsg.* | et *L*

---

7 figuram ☉: S. o., Fig. 2c. Im folgenden wird der Punkt *V* eingeführt. Die Punkte *D* und *L* aus ☉ erhalten im vorliegenden Argument eine neue Funktion. (Vgl. Z. 11).

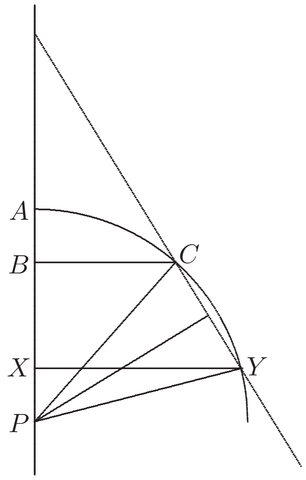
dicatur habere duos valores aequales eo ipso dicetur puncta D. et L. coincidere. Ipsam autem CB. esse infinite parvam (quoniam ambigua non est) reapse assumetur. Quod si jam ita eodem modo habebitur valor ipsius DV vel LV. ex his ambiguis, etiamsi signa varientur forte, modo ulteriori multiplicatione ad altiorem gradum, signa reddi possint eadem, (: ecce usum methodi meae, quam voco universalium :) habebitur aequatio in qua ambiguae duos habent valores aequales; et determinando veniri poterit ad solutionem.

Sed et aliud jam succurrit remedium, ponamus duo ejusdem curvae puncta, et duas AC, item AB, simul in eundem calculum intrare; vitato solum, ne duae simul ambiguae eaedem intrent eundem calculum, quoniam AC et AB pono non esse ambiguas, nec litera exprimi duplicis valoris. Hoc posito calculus absolvitur, et ambiguis caeteroquin, si licet, ope duarum radicum aequalium exterminatis, restabit denique aequatio trium indeterminatarum, AB, AC, et DC (vel DE). Ubi in locum alterutrius ex his AB, AC substituendo valorem alterius quantitate infinite parva auctum vel minutum verbi gratia in locum AB ponendo. $AC + o$. et quae per o. multiplicantur abjiciendo sive quod idem est in locum AB. simpliciter substituendo ubique AC. restabunt incognitae tantum duae. Sed ut hoc fieri possit, necesse est ut ipsa DC, ex ambiguis quae adhibentur, una cum ipsa AC et AC. eodem modo oriatur, quod tamen difficile. Sin vero plures calculum necesse sit intrare ejusdem denominationis rectas seu ejusdem progressionis terminos; tunc remedium hoc locum non habet.

16 ut *(1)* caeterae ambiguae easd *(2)* ipsa L

---

5 methodi meae: Verweis auf Cc 2, Nr. 862 u. Nr. 863. 14 $AC + o$: Das Verfahren erinnert an Fermats Methode. Schooten verwendet *a. a. O.* S. 254 e als Bezeichnung der unendlich kleinen Größe und gibt an, dass letztendlich $e = 0$ gesetzt werden muss.



[*Fig. 5*]

AP $\sqcap$ *v*. *PC*. $\sqcap$ *s*. *AB* $\sqcap$ *x*. $s^2 \sqcap y^2 + v^2 + 2vx + x^2$ Pone *s*. esse quantitatem constantem seu determinatam, $\sqcap$ *a*, fiet: $y^2 + x^2 + 2vx + v^2 - a^2 \sqcap 0$. Quod cum fiat in circulo, videndum est an hinc derivari possit, talem curvam esse circumferentiam circuli. Nimirum tantum haec aequatio ad duas utriusque incognitae radices aequales determinanda est, quod per Slusii regulam ita fiet: $-2y^2 \sqcap 2xl + 2vl$; sive $l \sqcap \dfrac{-\cancel{2}y^2}{\cancel{2}x + \cancel{2}v}$. Jam $l \sqcap \dfrac{y^2}{x - v}$. ut constat aliunde. Ergo hinc nulla obtineri potest aequatio: Quandocunque *s*.

2 $\sqcap$ s. *(1)* AC *(2)* AB *L* 7 aeqvatio: *(1)* Sumamus aliam qvaestionem, in qva: s $\sqcap \dfrac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{a}}$. et *(2)* qvandocunqve *L*

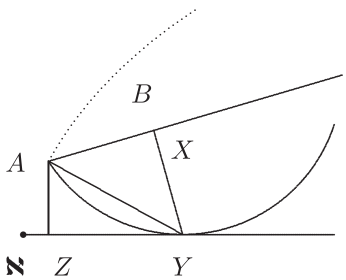
---

1 *Fig. 5*: Die Kurve *ACY* war zunächst nicht als Kreis konzipiert. Die zugehörige Vorstufe enthielt einen Kreisbogen durch *C* und *Y*. 2 *AB* $\sqcap$ *x*: In der folgenden Gleichung müsste $-2vx$ stehen. Leibniz operiert mit der fehlerhaften Gleichung bis Z. 7. Dort stellt er fest, dass sein Wert für *l* nicht mit dem erwarteten Resultat übereinstimmt, bemerkt die Ursache aber nicht. S. 96 Z. 6 benutzt er die Gleichung mit $-2vx$. 6 Slusii regulam: Zur Sluseschen Regel zur Bestimmung der Subtangente vgl. *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059). Leibniz' Annahme hinsichtlich eines direkten Zusammenhangs zwischen der Sluseschen Regel und Doppelwurzeln ist unrichtig. Gegen Ende des Stücks gibt er sie auf (vgl. S. 98 Z. 6 f.).

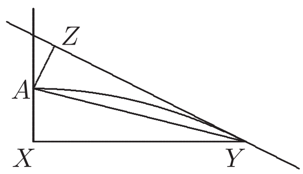
vel v, ita explicari possunt ut in eorum valorem non ingrediatur neque x, neque y. sequitur aequatio identica v. g. quaeritur curva, in qua sit $s \sqcap \dfrac{v^2}{a}$. Fiet: $v^4 \sqcap y^2a^2 + a^2v^2 + 2a^2vx + a^2x^2$, sive ordinando ad duas radices aequales: $-2y^2 \sqcap 2vl + 2xl$. Unde rursus aequatio identica seu valor ipsius l. dudum notus. Semper enim valor ille destruetur.

Ponamus jam valorem esse alium, v. g. $v - x \sqcap a$. vel $v - x - \beta \sqcap a$. Substituendo hunc valorem in aequatione $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + a^2$. Et alia: $s^2 \sqcap y^2 + a^2 + 2a\beta + \beta^2$. Quae duae aequationes sunt aequivalentes, sed nihil hinc duci potest.

Video jam semper videri posse inveniri curvam data relatione inter $\underline{s}$. et $\underline{v}$. nempe explicando non s per v, sed v per s. Ita ponendo $v \sqcap \dfrac{s^2}{a}$, ex aequatione generali: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + \dfrac{s^4}{a^2} - 2\dfrac{s^2x}{a} + x^2$, et ordinando ad duas radices aequales: $-\cancel{2}y \sqcap -\dfrac{\cancel{2}s^2}{a}l + \cancel{2}xl$, sive $l \sqcap \dfrac{-y^2}{\dfrac{s^2}{a} + x}$. Jam $l \sqcap \dfrac{y^2}{-v - x}$. Ergo $-\dfrac{s^2}{a} - x \sqcap -v - x$, unde redit aequatio supposita $\dfrac{s^2}{a} \sqcap v$. neque quicquam hinc duci potest.



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*]

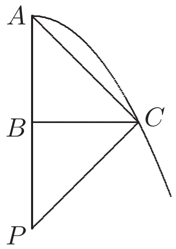
Sit planum rigidum ZY super quo volvitur curva AY, et puncto A describitur alia

1 y. *(1)* poterit semper solvi problema Methodi Tangentium inversae. *(2)* seqvitur *L* 6 $+v^2$ *(1)* $+2vx$ *(2)* $-2vx$ *L* 10 $+v^2$ *(1)* $+2vx$ *(2)* $-2vx$ *L*

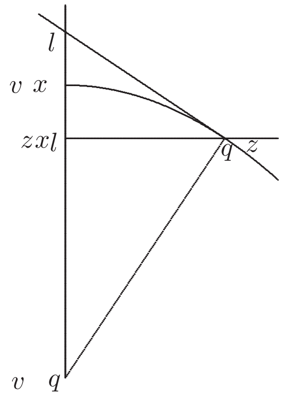
9 ex aequatione generali: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40 f.

curva AB. quam pono dari. Directrix incipit in ZY ex $\aleph$. Data Analytice curva AB dabitur et relatio inter $\aleph\, Y$ et AY item inter AZ et ZY. Quaeritur an modus habeatur semper ducendi rectam AX in fig. 2. Is vero ex his solis datis non habetur. Si detur curva AY. ejusque in rectum extensio, eo ipso dabitur descriptio Trochoeidis AB. Datur autem curvae in rectum extensio si detur [relatio] inter $\aleph\, Y \sqcap$ curvae AY et inter AY, ergo ex his datis datur curvae AB. descriptio.

Videndum an liceat mutare non nihil calculum methodi tangentium inversae, utendo una tantum indeterminata simplici s, et non utendo ipsa v. sed ejus loco adhibendo ambiguas, ut scilicet valor per ambiguas substituatur in ambiguae locum, non vero valor simplicis in locum ambiguae.



[*Fig. 7a*]



[*Fig. 7b*]

Sit $AB \sqcap x$. $AC \sqcap z$. $BP \sqcap p$. et $CP \sqcap s$. fiet: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - p^2$, ubi patet etiam p esse ambiguam, solam s. non esse. Jam ponamus ut in parabola, p. esse fixam seu substituamus, a, fiet: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$. aequatio ad Hyperbolam; quae ad duas radices aequales ordinabitur inveniendo Hyperbolae hujus tangentes, nempe ordinando ad duas radices aequales: $z^2 \sqcap xl$. $l \sqcap \dfrac{z^2}{x}$. $\sqcap \dfrac{z^2}{v-x}$. $v \sqcap 2x$. Substituantur hi valores in

1 Data *(1)* Geometrice *(2)* Analytice *L* 5 inter | $\aleph$ Z *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ curvae *L* 14 $-\mathrm{a}^2$ *(1)* ordinando ad duas radices aeqvales: $\cancel{2}\mathrm{z}^2 \sqcap \cancel{2}\mathrm{xl}$ seu $\dfrac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{x}} \sqcap \mathrm{l}. \sqcap$ *(a)* x^2 *(b)* $\dfrac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{v}-\mathrm{x}}$. fiet: $2\mathrm{x} = \mathrm{v}$ *(2)* aeqvatio *L*

3 fig. 2: s. *Fig. 6b*. 13 p. esse fixam: s. o. Erl. zu S. 87 Z. 14.

aequatione $q^2 \sqcap z^2 + v^2 - 2vx + x^2$ unde explicando $q^2 \sqcap z^2 + x^2$. Sed ex his nihil habeo. Quaerenda scilicet ratio, cujus ope aequatio aliqua ita ad duas radices aequales ordinetur ut nulla tamen inde oriatur nova litera nempe haec: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$; si ita ordinari posset, ut nova haberetur aequatio in qua nulla esset alia litera nova, et in qua esset s. collatione duarum tolli posset s. et haberetur aequatio, in qua non nisi z et x extarent. Quae est quaesita. Sed regula Slusiana aequatio proposita non ordinatur ad duas radices aequales nisi nova adhibita incognita $\underline{l}$, credo Huddeniana id aliter posse. Mira dubia quomodo regula Huddenii de multiplicatione aequationis duas radices aequales habentes per progressionem Arithmeticam, vera et universaliter esse possit cum tamen non habeat locum quando duae sunt ambiguae, v. g. cum quaeritur modus ad duas radices aequales determinandi aequationem ad circulum: $x^2+y^2 \sqcap a^2$. Deinde videndum an si sit aequatio: $x^2 - a^2 + ba \sqcap 0$. determinanda ad duas radices aequales, ubi simpliciter fieret $x \sqcap 0$. an liceat mederi explicando: $2z^2 + 2cz + c^2 - a^2 + ba \sqcap 0$ unde $z + 2c \sqcap 0$. seu $z + c \sqcap 0$. Ergo nihil facit explicatio.

Si potuissent conferri $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$ cum $z^2 + v^2 - 2vx + x^2 - q^2$ fuisset aliquid.

15 $z^2 +$ | x^2 *ändert Hrsg.* | $-2vx$ *L*

6 regula Slusiana: s. Erl. zu S. 95 Z. 6.

13. DE FIGURIS ANALYTICIS FIGURAE ANALYTICAE QUADRATRICIS CAPACIBUS

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 282–283. 1 Bog. 2°. Unteres Drittel von Bl. 283 r° und Bl. 283 v° leer. 2 2/3 S. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 906

Januarii. 1675.

De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus

Figuras Analyticas appello, in quibus relatio ordinatae ad abscissam aequatione explicari potest.

Figuram Quadratricem voco, qua semel descripta cuilibet portioni figurae propositae spatium rectilineum aequale una generali constructione exhiberi potest.

Scholion.

Figuras malim vocare Analyticas, quas alii post Cartesium Geometricas. Nam Cycloeidem exempli [gratia] non video quid prohibeat. appellari Geometricam, cum uno continuo motu eoque admodum simplici exacte describi possit,

8 figuris *(1)* Qvadrabilibus *(2)* analytice *(3)* analyticis *L* 10 Figuras *(1)* Qvadrabiles *(2)* Analyticas *L* 11 f. potest. | Figuras | Analyticas *(1)* analytice *(2)* universaliter *erg.* | Qvadrabiles voco in qvibus relatio *(a)* segmentorum *(b)* portionum sub abscissa ordinata et curva comprehensarum ad Parallelogrammum *(aa)* ipsarum *(bb)* eiusdem basis et altitudinis analytice haberi, sive aeqvatione qvadam explicari potest Demonstrari potest circulum et Hyperbolam, et alias figuras ab harum dimensione pendentes non esse universaliter qvadrabiles *gestr.* | Figuras *(aaa)* Qvadratices *(!)* voco, *(aaaa)* qvarum ordinatae sunt portionibus sub abscissa ordinata, et curva figurae datae comprehensis, proportionales *(bbbb)* qvibus descriptis *(bbb)* Figuram *L* 12 descripta *(1)* qvaelibet *(2)* cuilibet *L* 14 f. | Scholion. *erg. L* | *(1)* Figurarum *(2)* Figuras *L* 16 exempli *erg. L* 17 exacte *erg. L*

---

15 post Cartesium: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 21 17 uno continuo motu: Descartes definiert *a. a. O.* S. 18 alle Kurven als geometrisch, die „per motum continuum aut per plures, qui se mutuo consequantur . . . imaginari possumus“.

et proprietates habeat admirandas; Analyticam autem esse nego, quoniam relatio inter ordinatas et abscissas nulla aequatione explicari potest.

Lineae Quadratricis nomine jam et Veteres Geometrae usi sunt; nam si exacte et per omnia puncta sive continuo motu describi posset, Circuli omniumque ejus portionum dimensio haberetur. Prorsus quemadmodum Linea Logarithmica est quadratrix Hyperbolae.

Hinc facile demonstrari potest Circulum et Hyperbolam nullam habere Quadratricem Analyticam; quoniam impossibile est Quadratricem Veterum, et lineam Logarithmicam Analyticas esse.

Unde porro colligitur: impossibilem esse Circuli et Hyperbolae quadraturam, per quam portionum quarumlibet abscissa ordinata et curva comprehensarum relatio ad parallelogrammum inscriptum et circumscriptum aequatione quadam exprimatur.

Hinc illud porro sequitur inutiles esse omnes vias, quae si succederint una eademque regula quorumlibet Circuli Segmentorum dimensionem darent. Unde judicare possum problemata quaedam methodi tangentium inversae esse impossibilia; exempli gratia, lineam exhibere analyticam, in qua reductae ad abscissas eandem habeant relationem quam sinus recti ad versos.

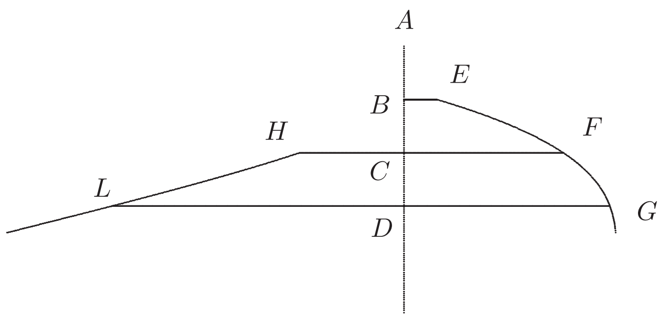


fig. 1.

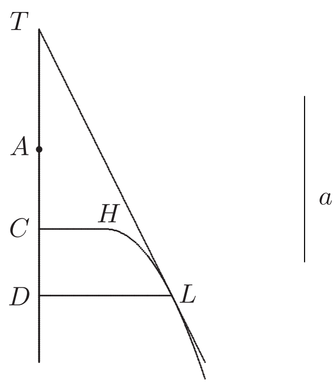
[*Fig. 1*]

2 f. potest. *(1)* Figurae *(2)* Lineae *L* 14 darent. *(1)* Unde illud didici methodum Tangentium inversam non *(2)* Unde *L* 15 inversae *erg. L*

4 f. Circuli ... dimensio: vgl. Pappus, *Collectio* IV, Prop. 26 u. 27.

Porro varia sunt Linearum Quadratricium genera, sed ex omnibus eligam unum Simplicissimum, et ex quo alia derivari, aut ad quod alia reduci possint, nimirum pone rectam directricem AD, ad quam ex curva EFG, ordinatae BE, CF, DG. Sit alia curva, HL, ad eandem directricem relata, ita ut ordinatae ejus, HC, LD, sint portionibus prioris $EBCFE, EBDGE$. proportionales; ajo curvam HL esse curvae EFG [quadratricem]. Unde sequitur c r e m e n t a ipsarum CH, DL, ipsis ordinatis datae, BE, CF, DG. proportionalia esse.

Quod si ergo proposita figura Analytica, inveniri potest alia etiam Analytica, cujus crementa sint ordinatis datae proportionalia quadratura omnium portionum figurae propositae generali constructione haberi potest.



[*Fig. 2*]

Jam alibi a me demonstratum est, rectas crementis proportionales quales sunt ipsae BE, CF figurae 1. esse ad rectam quandam constantem, quam vocabimus a, ut ordinata DL ad ipsam DT productam ipsius curvae HL, seu portionem axis inter ordinatam DL,

2 aut *(1)* ex qvo *(2)* ad *L* 5 EBCFE, | FCDGF *ändert Hrsg.* |. | etc. *gestr.* | proportionales *L* 13 ut *(1)* ipsa *(2)* ordinata *L* 14 seu *(1)* portio inter *(a)* ax *(b)* ordinatam DL, et tangentem LT, in axe DT *(2)* portionem *L*

12 alibi: Die Aussage $\frac{BE}{a} = \frac{DL}{DT}$ folgt sofort aus $BE \sim \frac{DL}{DT}$. Dass $\frac{DL}{DT} = \frac{dy}{dx}$ (crementa) gilt, folgt zum Beispiel aus Leibniz' Betrachtungen zum charakteristischen Dreieck **[Cc 544?, noch]**.

et tangentem LT, interceptam.

Proposita ergo qualibet figura cujus ordinatae CF, DG, quaerenda est alia figura cujus ordinatae CH, DL, in qua ratio DL ad DT, sit perpetuo ut DG ad a.

Hoc problema per Analysin communem solvere nondum satis est in nostra potestate; advocanda est ergo Synthesis, et datis figuris seu DL, inquirendae sunt DT. quod ordine faciendo et de gradibus ad gradus figurarum procedendo, condi poterit velut Tabula in qua constantem quandam progressionem mox detectum iri pro certo habendum est quam facile sit continuare in infinitum, etiam sine calculo in singulis repetito; quo facto facile detegi poterit, oblata figura qualibet an sit ex numero quadrabilium per Quadratricem Analyticam.

Calculus autem investigandarum DT, ex datis DL. non est difficilis post publicatam a Slusio methodum tangentium. Ut ergo ordine procedamus, per omnes aequationum, quae duas incognitas continent, gradus assurgemus ac primum: ponendo $AD \sqcap x$, DL [$\sqcap$] y, vel contra $AD \sqcap y$, $DL \sqcap x$. $DT \sqcap t$. ex aequationibus sequentibus ita habebitur valor ipsius t, et hujus ope valor ipsius $\dfrac{DL}{t}a \sqcap z \sqcap DG$.

(I) $b+\dfrac{c}{a}y+\dfrac{d}{a}x \sqcap 0$. Ergo ponendo $CD \sqcap y$, $DL \sqcap x$, $t \sqcap \dfrac{-dx}{c}$. et pro x substituendo $\dfrac{-cy-ab}{d}$, erit $t \sqcap \dfrac{+cy+ab}{c}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{-cy-ab}{d} \frown a \smile \dfrac{+cy+ab}{c} \sqcap \dfrac{-ac}{d}$.

Ponendo vero $CD \sqcap x$. $DL \sqcap y$. fiet: $\underline{\underline{t}} \sqcap \dfrac{-cy}{d}$. et pro $\underline{\underline{y}}$ substituendo ejus valorem, $\dfrac{-dx-ba}{c}$ fiet: $t \sqcap \dfrac{+dx+ba}{d}$, et erit $z \sqcap \dfrac{-dx-ab}{c} \frown a \smile dx+ba \frown d \sqcap \dfrac{-ad}{c}$.

(II) $a^2b+acy+adx+ey^2+fyx+gx^2 \sqcap 0$.

2 f. alia figura, | *(1)* HL *(2)* cuius ordinatae CH, DL *erg.* | in *L* 4 communem *erg. L* 9 poterit, | an *streicht Hrsg.* | oblata *L* 12 omnes *(1)* aeqvationes duarum *(a)* aeqva *(b)* du *(c)* incognitarum *(2)* aeqvationes qvae duas incognitas continent, *(3)* aeqvationum *L* 13 primum: *(1)* (I) $x+\dfrac{b}{a}y+c \sqcap 0$. *(a)* Unde $t \sqcap -b$ *(b)* ponendo $AD \sqcap x$, $CD \sqcap y$, vel contra; $DT \sqcap t$. Unde ope regulae Slusianae, fiet: si $AD \sqcap x$ fiet $t \sqcap \dfrac{-b}{a}y$. sin $CD \sqcap x$, fiet: $t \sqcap \dfrac{-ax}{b}$. Jam prior aeqvatio multiplicetur per x (II) $x^2+\dfrac{b}{a}yx$ *(2)* ponendo *L* 13 f. $AD \sqcap x$, $CD\, y$ *ändert Hrsg.* |, vel contra $AD \sqcap y$, | CD *ändert Hrsg.* | $\sqcap x$ *L*

11 f. publicatam a Slusio: vgl. R.-F. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

Ponendo $CD \sqcap y$, $DL \sqcap x$. fiet: $act + 2eyt + fxt \sqcap -adx - fyx - 2gx^2$. Adeoque $t \sqcap \dfrac{-adx - fyx - 2gx^2}{ac + 2ey + fx}$. Pro $-2gx^2$ ponatur ejus valor, $+2a^2b + 2acy + 2adx + 2ey^2 + 2fyx$. Unde $t \sqcap \dfrac{+adx + fyx + 2acy + 2ey^2}{ac + 2ey + fx}$, sive $-act - 2eyt + 2acy + 2ey^2 \begin{array}{l} - ft\,x \\ +ad\ .. \\ +fy\ .. \end{array} \sqcap 0$. Sive

$gx^2 \sqcap \dfrac{+actgx + 2eytgx - 2acygx - 2ey^2gx}{-ft + ad + fy}$ adeoque $a^2b + acy + adx + ey^2 + fyx + \dfrac{actgx + 2eytgx - 2acygx - 2ey^2gx}{-ft + ad + fy} \sqcap 0$

$$\text{sive}\quad \begin{array}{lllll} -ft\,adx & -ft\,fyx & +\ act\,gx & -ft \frown & a^2b \quad \sqcap 0 \\ +ad\ ... & +ad\ ... & +2eyt\,g\ . & +ad & +acy \\ +fy\ ... & +fy\ ... & -2acy\,g\ . & +fy & \\ & & -\ 2ey^2g\ . & & \end{array}$$

et pro x substituendo: $\dfrac{act + 2eyt - 2acy - 2ey^2}{-ft + ad + fy}$, fiet:

$$act + 2eyt - 2acy - 2ey^2\ ,, \frown \left(\begin{array}{ll} -ft \frown & -ft \\ +ad & +ad \\ +fy & +fy \end{array}\right) \begin{array}{l} +actg \\ +2eytg \\ -2acyg \\ -2ey^2g \end{array} \ ,,, \begin{array}{llll} -ft \frown & -ft \frown & & a^2b \sqcap 0. \\ +ad & +ad & +acy & \\ +fy & +fy & & \end{array}$$

Sed quoniam reductio hujus calculi nimis prolixa est, satis est, opinor[,] ire per casus simpliciores, et paulatim assurgere ad altiores, ut appareat, an ad progressionem pervenire liceat:

1) $a^2b + acy + gx^2 \sqcap 0$. Unde ex y $t \sqcap \dfrac{-2gx^2}{ac} \sqcap \dfrac{2a\cancel{^2}b + 2\cancel{a}cy}{\cancel{a}c} \sqcap \dfrac{2ab + 2cy}{c}$ et $x \sqcap \sqrt{\dfrac{-a^2b - acy}{c}}$ adeoque $z \sqcap \dfrac{xa}{t}$ erit $\sqcap \dfrac{xa}{\dfrac{2gx^2}{ac}} \sqcap \dfrac{a^2c}{2gx} \sqcap \dfrac{a^2c}{2g\sqrt{\dfrac{-a^2b - acy}{c}}}$ sive $z \sqcap$

3 t: Im folgenden Term für t fehlt $+2a^2b$ im Zähler. Der Fehler wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung Z. 16 aus. 8 sive: In der folgenden Gleichung fehlt auf der linken Seite $+ey^2(-ft+ad+fy)$. Der Fehler wirkt sich zusammen mit einem weiteren Rechenfehler auf die Gleichung Z. 13–16 aus.

21 $x \sqcap \sqrt{\dfrac{-a^2b - acy}{c}}$: Der Nenner unter der Wurzel müsste g lauten. In der anschließenden Berechnung von z kommen weitere Fehler hinzu.

$\sqrt{\dfrac{a^{\cancel{4}3}c^3}{-4g^2a^{\cancel{2}}b-4g^2\cancel{a}cy}}$, quod si ponatur $b \sqcap 0$. fiet $z \sqcap \dfrac{ca\sqrt{a}}{2g\sqrt{y}} \sqcap \dfrac{ca}{2g}\sqrt{\dfrac{a}{y}}$. Et haec colligendo t ex y. sed si colligatur t ex x, fiet:

$2gxt \sqcap -acy$, sive $t \sqcap \dfrac{-acy}{2gx}$, et pro y ponendo $\dfrac{-gx^2-a^2b}{ac}$ fiet: $t \sqcap \dfrac{gx^2+a^2b}{2gx}$,

adeoque $\dfrac{ya}{t} \sqcap z$ erit $\dfrac{\dfrac{-gx^2-a^2b}{ac}}{\dfrac{gx^2+a^2b}{2gx}}a \sqcap \dfrac{-2gx}{c}$.

2) $a^2b+acy+adx+gx^2. \sqcap 0$. Ex y fiet $t \sqcap \dfrac{-2gx^2-adx}{ac}$, et ut vero eliminetur x, pro $-2gx^2$, ponatur $2a^2b+2acy+2adx$. fiet:

$t \sqcap \dfrac{2a^2b+2acy+2adx-adx}{ac} \sqcap \dfrac{2a^{\cancel{2}}b+2\cancel{a}cy+\cancel{a}dx}{\cancel{a}c}$, unde $x \sqcap \dfrac{ct-2ab-2cy}{d}$

et $x^2 \sqcap \dfrac{c^2t^2-4cabt-4c^2ty+4a^2b^2+8abcy+4c^2y^2}{d^2}$, unde ex aequatione initio proposita eliminando x, fiet: $\overset{-}{+}a^2bd^2\,\overset{-}{+}acyd^2+ad^2ct\,\boxed{-ad^22ab}\,\boxed{-ad^2zcy}+gc^2t^2-4cabgt-4c^2tgy+4ga^2b^2+8abcgy+4c^2gy^2 \sqcap 0$ et pro t substituendo $\dfrac{ya}{z}$ habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z, et y.

Sed calculus hic prolixus longe facilius expediri poterat, considerando locum esse ad parabolam, atque ita ipsam $\underline{t}$, ac proinde et ipsam $\underline{z}$ aequationis $a^2b+acy+adx+gx^2 \sqcap 0$ facile derivari ex habita $\underline{t}$ vel $\underline{z}$ aequationis $acy+gx^2 \sqcap 0$ adhibita methodo generali ad exemplum Schotenii, quemadmodum abscissae ordinataeque unius directricis ex aliis alterius derivantur.

10 substituendo *(1)* ya *(2)* $\frac{\text{ya}}{\text{z}}$ *L* 13 +ad *L ändert Hrsg.* 15 exemplum *(1)* Slusii, ubi *(2)* Schotenii *L*

---

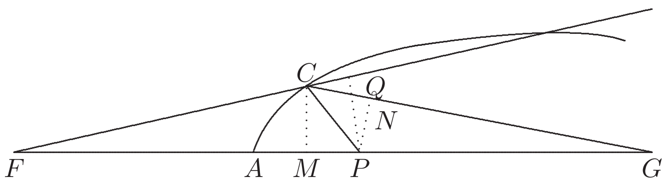
10 $\frac{ya}{z}$: Die Substitution ist nicht zulässig, denn als Voraussetzung der Überlegung war $\frac{z}{a}=\frac{x}{t}$ gesetzt worden. 14 f. methodo ... Schotenii: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178 [Marg.]. Auf S. 177 hat Leibniz Eintragungen am Rand und in der Zeichnung angebracht.

14. [PROBLEMA CARTESII METHODI TANGENTIUM INVERSAE]
[Vor Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. Textfolge: Bl. 9 v°, 10 r°, 10 v°, 9 r°. 4 S. Auf Bl. 9 v° Seitenzählung: pag. 1, auf Bl. 10 r° Seitenzählung: pag. 2. Cc 2, Nr. 845

Datierungsgründe: **[noch]** Wegen der Verwendung von = als Gleichheitszeichen ist das Stück vor Sommer 1674 zu datieren. Es hängt inhaltlich besonders eng N. 33 zusammen. Bezüge bestehen auch zu N. 5, wo die Gleichung für die Subnormale aus dem vorliegenden Stück verwendet wird, sowie zu einer Gruppe von Stücken aus dem Zeitraum Oktober 1674 – Januar 1675, die sich konkret mit Descartes' Untersuchung der Ovale in *Geometria* II auseinandersetzen und daraus eine inverse Tangentenmethode abzuleiten versuchen (vgl. N. 3, N. 4, N. 5, N. 7, N. 8 und N. 11, sowie zu N. 28).

Cartesius lib. 2. *Geometriae* resolvit problemata quaedam Methodi Tangentium inversae, eorumque dedit demonstrationem, sed inveniendi methodum non explicuit, quaedam etiam aliis quaerenda reliquit, *ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum reperiant, eo pluris rerum illic demonstratarum inventionem aestiment*. Illud cujus solutionem dedit, supressa tamen inveniendi ratione, huc redit.



[*Fig. 1*]

12 *(1) Mons. (2)* Cartesius *L* 14 aliis *(1)* invenienda *(2)* qvaerenda *L*

12 problemata quaedam: Zur Behandlung der Ovale und ihrer Eigenschaften vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 42–44, 48 f., 50–65 [Marg.]. 14 f. *ut ... aestiment*: Vgl. Descartes, *a. a. O.* S. 65. Dieselbe Passage wird in N. 4 S. 31 Z. 6–10 ausführlich zitiert. 17 *Fig. 1*: Weder Leibniz' Vorlage in Descartes (S. 43, S. 48) noch seine eigene Skizze entsprechen vollständig den algebraischen Gegebenheiten. Die abgedruckte Zeichnung gibt die Skizze der Leiniz-Handschrift angenähert wieder.

Invenire Curvam AEC, ejus ad rectam datam FG habitudinis, ut sumtis in ea recta punctis certis G. et F. a diversis curvae partibus, et sumto quolibet in curva puncto C, ad quam perpendicularis sit recta PC, rectae datae FG occurrens in P. et si opus est productis junctisque rectis FC. GC. ductae ad eas perpendiculares PQ. et PN. rationem habeant datam $\frac{d}{e}$.

Cartesius ipse observat Triangula PQF et CMF esse similia, ideoque $\frac{CF}{CM} = \frac{FP}{PQ}$. Item Triangula rectangula PNG et CMG esse similia, ideoque $\frac{GP \frown CM}{CG} = PN$.

Nunc ad calculum veniamus: Esto $FM = x$. $GF = a$. $CM = y$. $GM = a - x$. $CF = \sqrt{x^2 + y^2}$. $CG = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$. $GP = p$. Ergo $PN = \frac{py}{\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$. $FP = a - p$. Ergo $PQ = \frac{FP \frown CM}{CF} = \frac{a - p \frown (y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dp(y)}{e\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$. Ergo $\frac{dp}{a-p} = e\sqrt{\frac{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}{x^2 + y^2}} = e\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ax}{x^2 + y^2}}$ et invertendo: $\frac{1}{e}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2 + a^2 - 2ax + x}}$

10 *Am Rande:* $\frac{PQ}{PN} = \frac{d}{e}$. Ergo $PQ = \frac{d}{e}PN$.

1 AEC, *(1)* talis naturae, ut recta qvaedam duci possit *(2)* eius *L* 1 f. ut *(1)* sumto in ea | recta *erg.* data *erg. u. gestr.* | puncto *(2)* sumtis ... recta *(a)* certis *(b)* punctis *L* 2 F. *(1)* ab una curvae parte *(2)* a *L* 3 qvam *(1)* ex a *(2)* perpendiculariter incidat *(3)* perpendicularis *L* 3 f. et ... productis *erg. L* 4 GC. *(1)* ad qvas perpendiculares ducantur *(2)* ductae *L* 8 veniamus *(1)* AM = x. FA = a GA = b. CM = y. ideoqve FM = *(2)* imo su *(3)* Esto *L* 8 CM = y *erg. L* 11 $\mathrm{e}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}}$ *(1)* $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{a}} - \mathrm{d} = \mathrm{e}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}}$. Ergo p– *(2)* Ergo $\mathrm{p} = \frac{1}{\mathrm{d}}\mathrm{e}\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} + \mathrm{a}$ Nihil aliud ergo restat qvam ut inveniatur summa sive qvadratura omnium $\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} =$ *(3)* Jam p = *(4)* Jam GP(= p) + MP(= m) + FM(x) = GF(a) Ergo m = a– *(5)* Jam *(a)* GA *(b)* PM(= m) = GM(a − x) − GP $\left(\frac{\mathrm{ae}}{\mathrm{d}}\sqrt{\mathrm{y}^2 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}\right)$ *(6)* et *L*

1 *AEC*: Leibniz' Bezeichnungen, sowie die Ähnlichkeitsbetrachtung bis Z. 6 f. entstammen den Überlegungen Descartes' *a. a. O.* S. 57–59 Die umgekehrte Tangentenaufgabe bei Descartes benutzt andere Daten (vgl. *a. a. O.* S. 60–65). 6 Cartesius ipse observat: *a. a. O.* S. 58.

$= \frac{a-p}{dp}$ seu $\frac{a}{dp} - \frac{1}{d}$. Ideoque $\frac{CF}{e,CG} + \frac{1}{d} = \frac{a}{dp}$, vel $\frac{dCF}{ae,CG} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p}$, et invertendo $\frac{ea^2,CG}{adCF+aeCG} = p$.

Habito $p = \frac{ea^2CG}{aeCG+adCF}$, inde fieri potest: $a - \frac{adCF}{eCG,+dCF} = p$. Ideo $MP = GM(a-x) - GP(=p)$ erit $\frac{ad \frown CF}{eCG+dCF} - x$.

Sed placet eundem valorem aliter investigare: ponendo $\frac{dp}{a-p} = \beta e$. Seu $\beta = \frac{CG}{CF}$. fiet $\frac{a-p}{\cancel{d}p} = \frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p} - 1 = \frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p} = \left(\frac{d}{\beta e}+1\right)\ \frac{d+\beta e}{\beta e}$.

Ergo $p = \frac{\beta ea}{d+\beta e}$ sive $a - \frac{ad}{d+\beta e}$. Unde $MP = \frac{ad}{d+\beta e} - x$. Qui valor idem cum priore, et potest ita explicari:

$\underset{\substack{\wedge \\ m}}{MP} = \frac{ad}{d+e\sqrt{1+\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}}}$. Igitur $\frac{1}{m} = \frac{d+e\sqrt{....}}{ad}$, et $\frac{1}{me} - \left(\frac{d}{ad}\right)\ \frac{1}{ae} = \frac{\cancel{e}\sqrt{.....}}{ad}$

ideoque $\frac{da^2\cancel{e} - m\cancel{e}ad}{ame^{\cancel{2}}} = \sqrt{.....}$. Igitur $\frac{d^2a^4 - 2d^2a^3m + m^2a^2d^2}{a^2m^2e^2} = 1 + \frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ vel $\frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots}{\ldots.} - 1 = \frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$, ideoque $\frac{d^2a^4 - 2d^2a^3m + m^2a^2d^2 - m^2a^2e^2}{m^2a^2e^2} =$

---

3 *Nebenrechnung:* $\frac{a}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b} \cancel{f} 1 - \frac{b}{d+b}$

3 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}}$ = *(1)* |1+ *streicht Hrsg.*| *(2)* $\frac{\mathrm{a+b-b}}{\mathrm{a+b}}$ *L* 8 priore. *(1)* Habemus jam m *(2)* , et *L*
9 $\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{d+e}\sqrt{1+\frac{\mathrm{a^2-2ax}}{\mathrm{y^2+x^2}}}}$. *(1)* Jam ex aliunde inventis constat *(2)* Tunc *(3)* Igitur *L*

---

9 MP: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $-x$. Im weiteren Verlauf der Rechnung kommen weitere Fehler hinzu, die die Überlegungen bis S. 108 Z. 16 beeinträchtigen. Insbesondere ist die Gleichung S. 108 Z. 11 falsch.

$\dfrac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ et invertendo $\dfrac{y^2+x^2}{a^2-2ax}=\dfrac{d^2a^4\text{ etc.}\ldots}{\ldots.}$, ideoque $\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{d^2a^4\text{ etc.}\ldots}{2\ldots.}\frown a^2-2ax-\dfrac{x^2}{2}$.

Jam quia differentia inter duo proxima $\dfrac{y^2}{2}$ ipsi m aequalis est, per alibi demonstrata[,] ideo omissa $\dfrac{y^2}{2}$, atque jam ex aequatione eliminata, conferamus duos ejus valores, sumendo nempe (x) majoris $=x+\gamma$. Unde fiet:

$$\frac{d^2a^4\text{ etc. . . }\frown a^2-2ax-2a\gamma}{2\ldots}-\frac{x^2+\gamma^2+2x\gamma}{2},\ -\frac{d^2a^4\text{ etc. . . }\frown a^2-2ax}{2\ldots}+\frac{x^2}{2}=m$$

ideoque $\dfrac{d^2a^4\text{ etc. . . }\frown 2a\gamma}{2\ldots}-\dfrac{2x\gamma}{2}=m$, sive $\dfrac{d^2a^5-2d^2a^4m+m^2a^3d^2-m^2a^3e^2}{m^2a^2e^2}-x=m$,

ac proinde $d^2a^{\cancel{5}3}-2d^2a^{\cancel{4}2}m+m^2a^{\cancel{3}}d^2-m^2a^{\cancel{3}}e^2-m^2\cancel{a^2}e^2x-m^3\cancel{a^2}e^2=0$

seu $-e^2m^3-e^2m^2x+\begin{matrix}ad^2m^2\\-ae^2\end{matrix}-2d^2a^2m+d^2a^3=0.$

$$\begin{array}{cccccc}\text{Unde } x= & -m & + & \dfrac{ad^2-ae^2}{e^2} & -\dfrac{2d^2a^2}{e^2m} & +\dfrac{d^2a^3}{m^2}.\\ & \bigtriangledown & & \square & \text{Hyper-bola} & \text{Hyperbo-loeides}\end{array}$$

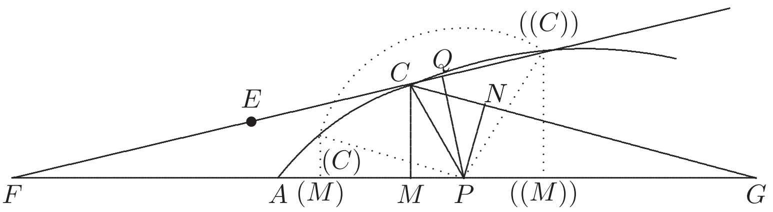
Unde cum data summa omnium m detur summa omnium x, et dato valore ipsius y, detur summa omnium $\underline{m}$, sequetur dato valore ipsius $\underline{y}$. dari quadraturam Hyperbolae, nisi error calculo insit.

Jam in aequatione ipsius y^2 valorem exprimente, pro $2ax$ et x^2, substituatur ejus valor, habebitur aequatio in qua non nisi y et m reperientur, ut aequationem in qua non nisi x et m, jam habuimus. Sed et m puto eliminari tandem poterit. Sed haec methodus si succederet non est universalis, non enim semper valor y^2 absolute habetur. Opus est arte tollendi semper unam ex tribus incognitis, pluribusque quando problema est determinatum. Sed hinc videretur sequi posse semper tolli etiam unam quando duae sunt incognitae et problema est determinatum, fingendo scilicet adhuc plures incognitas

20 valor *erg.* *L*

3 f. alibi demonstrata: **[noch]**. 11 Unde: Die nachfolgende inkorrekte Gleichung für FM wird in N. 5 S. 50 Z. 12 f. zitiert.

et tollendo.



[*Fig. 2*]

Ut Cartesii literas retineamus esto $AG = b$. $AF = FE = c$. $FC = c + z$. $A(M) = y$. Ponatur jam C. in (C), erit $C(M)^2 = c^2 + 2z + z^2 + c^2 + 2cy + y^2$. $FP = c + y + m$. Jam $\dfrac{FP \frown CM}{CF} = PQ$, et $\dfrac{GP \frown \cancel{CM}}{CG} = PN$. Jam $PQ = \dfrac{d}{e}PN$. Ergo $\dfrac{FP \frown \cancel{CM}}{CF} = \dfrac{\cancel{d}GP \frown \cancel{CM}}{\frac{e}{d}CG}$. Jam $FP + GP = a$.

Item $CF^2 = FM^2 + CM^2$, et $CG^2 = CM^2 + a^2 - 2aFM + FM^2$. Ergo fuit $\dfrac{FP^2}{CF^2} = \dfrac{GP^2}{\frac{e^2}{d^2}CG^2}$. Ergo $\dfrac{FP^2}{FM^2 + CM^2} = \dfrac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$. Ergo $\dfrac{a^2 - 2aFP}{FP^2} + \cancel{1} = \dfrac{a^2 + 2aFM}{FM^2 + CM^2} + \cancel{1}$ et ponendo $a - 2FP = r$, fiet $-FP = \dfrac{r - a}{2}$, et $FP = \dfrac{a - r}{2}$, et $FP^2 = \dfrac{a^2 - 2ar + r^2}{4}$. Eodem modo $a + 2FM = s$. fiet $FM = \dfrac{s - a}{2}$, et $FM^2 =$

1 *Dahinter:* NB.

3 Cartesii literas: Vgl. *a. a. O.* S. 57. Leibniz' Bezeichnungen stimmen nur teilweise mit denen Descartes' überein. 4 $C(M)^2$: Vermutlich ist $(CM)^2$ (oder: $(C)(M)^2$) gemeint. Die nachfolgende Gleichung ist in jedem Fall inkorrekt. Sie wird nicht weiterverwendet. 8 $\dfrac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$: Im Nenner müsste vor $2aFM$ ein $-$ stehen; der Nenner wäre überdies mit $\dfrac{d^2}{e^2}$ zu multiplizieren. Zusammen mit einer weiteren Unrichtigkeit gehen diese Fehler in die Gleichung in r und s in S. 110 Z. 1 f. ein und beeinträchtigen die Richtigkeit aller weiteren Überlegungen. Im Verlauf der Argumentation unterlaufen Leibniz außerdem noch weitere Fehler.

$\dfrac{s^2 - 2sa + a^2}{4}$ ideoque, invertendo superiorem rationem habebimus: $\dfrac{a^2 - 2ar + r^2}{\cancel{4}r} = \dfrac{s^2 - 2sa + a^2 + CM^2}{\cancel{4}s}$, unde $\dfrac{a^2}{r} - \cancel{2a} + r = s - \cancel{2a} + \dfrac{a^2}{s} + \dfrac{CM^2}{s}$ sive $\dfrac{a^2}{r} + r - s - \dfrac{a^2}{s} - \dfrac{CM^2}{s} = 0$. Unde fiet melius esse non imponere nomina lineis, et calculum per lineas potius quam per literas transigere, donec ad extremum appareat quae commodius elidantur. Jam ponamus $CM = y$. Fiet: $a^2s + r^2s - s^2r - a^2r - y^2r = 0$. Jam si lineam FP aut ex ea pendentem r velut cognitam sumamus, et pro arbitrio assumtum punctum V, eadem erit aequatio cujus radices, vel s et y dupliciter assumi possunt. Eadem proveniente aequatione, modo eadem maneat r, et a. Sed in nostro casu eas radices cogitandum est esse aequales, et $(C)M =$ ipsi $((C))((M))$. Ac quaerenda proinde aequatio ejusdem formae, in qua duae sint incognitae, duarum quaelibet significationum aequalium: cum ad simplicem methodum tangentium aequatio duas habens radices aequales non nisi unius sit incognitae. Forma nostra est

$$\begin{array}{lllll} -\,r\,y^2 & -\,r\,s^2 & +\,r^2\,s & & = 0. \\ & & +\,a^2 & -\,a^2\,r & \end{array}$$

$y - e$, $\square = y^2 - 2ey + e^2$. vel ducamus in se invicem $y - e \frown s - f$ fiet $ys - yf - es + ef$. Sed deest y^2 et s^2. Ideo quaeratur quantitas arbitraria quae in hoc productum multiplicata faciat $\ldots y^2 \ldots s^2 \ldots s \ldots$ eaque tot arbitrariarum literarum diversarum, ut si superiori aequationi datae comparetur, determinatio obtineatur. Utile foret Bartholiniana

15 *Gestrichene Nebenrechnung am Rande:*

$$\begin{array}{l} s - x \\ s + x \\ \hline s^2 - x^2 \end{array}$$

5 0. *(1)* Sumta ergo recta r, velut cognita, *(2)* Sed investigemus *(3)* Jam *L* 5 f. aut ... r *erg. L* 10 qva *(1)* tres sint indeterminatae *(2)* duae *L* 13–15 0. $\left|\begin{array}{l} \mathrm{s - x} \\ \mathrm{s + x} \\ \hline \mathrm{s^2 - x^2} \end{array}\right.$ *streicht L* | y − e, *L* 15 e^2. *(1)* s − p, $\mathrm{s^2 - 2ps}$ *(2)* | s − q, $\mathrm{s^2 - 2qs + s^2}$ *streicht Hrsg.* | $= \mathrm{e}^2$, fiet aeqvatio y^2 *(3)* vel *L* 15 y − e $\frown$ *(1)* s − q *(2)* s − f *L*

18 Bartholiniana: Gemeint ist das von E. Bartholinus herausgegebene Fl. Debeaune, *De aequationum natura, constitutione et limitibus*, 1659, *DGS* II S. 49–152.

de constitutione aequationum ad eas usque, producta quae sunt duarum, et plurium incognitarum, ut cum aliis ejusdem formae, comparentur.

$y - e \frown s - f$ seu $ys - yf - es + ef = \ldots\ y^2 + s^2 \ldots\ vs.\ w$. Inveniendus ergo valor ipsarum e. et f.

Est autem $e = \dfrac{-ys + yf + y^2 + s^2 + vs + w}{-s + f}$ et $f = \dfrac{-ys + es + y^2 + s^2 + vs + w}{-y + e}$, et substituendo pro e ejus valorem, habebitur valor ipsius f. sine, e et valor quoque utriusque sine f, et e. et, quia ubilibet licet substituere f pro s, et e pro y, facile inde fieri potest valor qui libuerit. Hoc autem modo habebitur aequatio formam habens similem datae, eaque duarum radicum aequalium. Sed artis foret ista breviter atque eleganter consequi posse. Beaune non tradidit modum inveniendi quae de constitutione aequationum prodidit, sed hoc modo videtur id semper fieri, et datae aequationi alia ejusdem formae constitui posse. Caeterum hic facilitas eo major, quod signa pro arbitrio assumi possunt seu breviter $ys - yf = ny^2$. Ergo $s - f = ny$. Et quia $f = s - ny$. $es = ts^2 + vs$. Ergo $e = ts + v$. Ergo $y - ts + v, \frown, s - \llcorner s + ny \lrcorner$. Multiplicando fiet: $sy - ts^2 + vs - s \frown y + ts^2 - vs + ny^2 - tsny + vny$. Error in calculo, resumatur: $ys - yf = ny^2$. Ergo $s - f = ny$. $(= 0.)$ $- es = ts^2 + vs$. Ergo $e = -ts - v$, tandemque $ef = w$. Ergo $f = \dfrac{w}{e} = s - ny$. Sed $s = \dfrac{e + v}{-t}$ Ergo $\dfrac{w}{e} = \dfrac{e + v}{-t} - ny$.

Unde ex ipsius e valor facile habetur. Et per valorem e valor ipsius f. sola ex incognitis y. tantum concurrente. Valoribus illis substitutis in eorum locum factaque multiplicatione produci debet $ny + s^2\ vs.\ w$. sed et si in aequatione illa $\dfrac{w}{e} = \dfrac{e + v}{t} - ny$

13 f. *Zum gestrichenen und wieder gültig gemachten:* seu ... ny⌟: Maneat

1 constitutione *(1)* ac limitibus *(2)* aeqvationum *L* 3 seu ... ef *erg. L* 3 w. *(1)* Ergo $\mathrm{ys - yt - es + et} = \ldots$ *(2)* Ergo $\mathrm{y^2 - ys + yf} =$ *(3)* Ergo $\mathrm{y^2 \overset{-sy}{\underset{+f}{}} + s^2 - 2st + f^2} =$ *(4)* Inveniendus *L* 6 f. et *(1)* per conseqvens *(2)* forte *(3)* valor qvoqve *(a)* ipsius e, sine f et *(b)* utriusqve *L* 10 posse. *(1)* Bartholinus non tradidit *(2)* Beaune *L* 10 f. de *(1)* limitibus *(2)* constitutione *L* 13 f. possunt |seu ... ny⌟ *gestr. und wieder gültig gemacht*| *(1)* Ergo y *(2)* Multiplicando *L* 17 f. ny. *(1)* et $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{e + v}}{\mathrm{tn}} - \dfrac{\mathrm{w}}{\mathrm{en}}$ *(2)* Unde *L*

10 Beaune: vgl. die Erl. zu S. 110 Z. 18.

pro ny poneretur ne uti certe fieri potest; ob aequalitatem, tunc patet e, pariter et f. absolute haberi. Ac proinde radicum y et s. valorem purum. Indeque institui potest aequationis hujus arbitrariae cum data comparatio, quae necessario solvet problema. Imo melius mox:

Cartesius tradidit methodum complendi omnia loca aequationis cum una est incognita. Tradenda methodus complendi cum sunt plures.

$ys - yf - es + ef \frown y + ts - w$, dabit:

$$\boxed{y^2s} - y^2f - \boxed{eys} + \overset{\overset{e}{\vee}}{eyf} + (tys^2) - \overset{\overset{e}{\vee}}{tysf} - (ts^2e) + \underset{\underset{s}{\wedge}}{tesf}$$

$$- \underset{\underset{e}{\wedge}}{ysw} \qquad + \qquad \underset{\underset{e}{\wedge}}{wyf} + \underset{\underset{f}{\wedge}}{wes} - wef,$$

$$\text{Unde} \quad \begin{array}{l} y^2s + tys^2 - fy^2 + tes^2 - tfes \;\; + wef \\ \quad - eys - tes^2 \qquad\qquad\qquad - \;we \;\;\; + e^2f \end{array}$$

$$\text{sive} - fay^2 - tes^2 - \begin{array}{l} tfe \\ wea \end{array} s + \begin{array}{l} wefa \\ e^2fa \end{array} = 0, \quad \text{comparanda cum } ray^2 - ars^2 + \begin{array}{l} r^2as \\ a^3 \end{array} - a^3r.$$

$f = -r$. $t = \dfrac{ar}{y}$. $r^2 - wy = r^2 + a^2$. Ergo $w = \dfrac{a^2}{y}$.

Ecce aequationem identicam ejusdem secum ipso.

Quamquam autem de calculo non responderim, methodum tamen detectam arbitror plenam et accuratam, quam in jam cognitis experiri placet.

16 f. *Darunter:* Locus Ellipsis.

3 f. Imo . . . mox *erg. L* 14 a^2. *(1)* Ergo $w = \dfrac{r^2 - ra - a^2}{y}$ Tandem $-r^3a + r^2a^2 + ra^3 - y^2ra = -a^3r$ *(a)* fiet $r^2a| = a^2r$. *streicht Hrsg.* | *(b)* fiet $-r^3\cancel{a} + r^2a^{\cancel{2}}, 2ra^{\cancel{3}2} - y^2r\cancel{a} = 0.7$ et $s = -r$. Unde *(aa)* + sr *(bb)* $s^{\cancel{3}2} - s^{\cancel{2}}a - 2\cancel{s}a^2 + y^2\cancel{s} = 0$. *(2)* Ergo *L* 16 f. Locus *(1)* Hyperbolae. ⟨tamen⟩ non curva quaesita *(2)* Ellipsis *L*

5 Cartesius: **[noch]**.

15. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLA

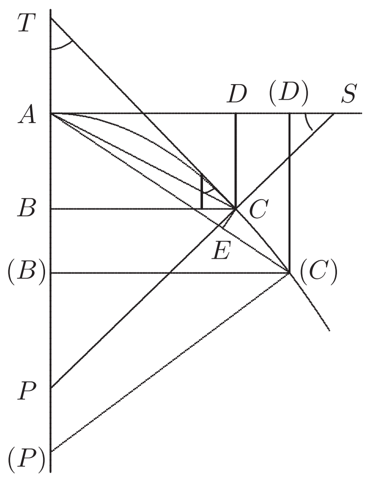
11. November [1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 9 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S. Untere Hälfte von Bl. 2 v° leer. Überschrift und Datum ergänzt. Das Datum wurde nachträglich auf 1673 geändert. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Differentialrechnung*, 1848, S. 32–40; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 132–139; 3. *LBG*, 1899, S. 161–167; 4. (englische Übersetzung von 1.) Child, *Early mathematical Manuscripts*, 1920, S. 93–103.
Cc 2, Nr. 1120

11. Novemb. 1673.

M e t h o d i   t a n g e n t i u m   i n v e r s a e   e x e m p l a.

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae: Ejus hodie solutionem reperi cujus analysin dabo.



[*Fig. 1*]

9 Novemb. *(1)* 1675 *(2)* 1673 *L*   12 f. Eius ... dabo *erg. L*

11 superiore anno: vgl. z. B. N. 18, dat. Dez. 1674.

Nimirum quaeritur curva $C(C)$ in qua ipsae BP intervalla ordinatarum BC, et perpendicularium ad curvam, PC, in axe $AB(B)$ sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta $AD(D)$ ad ipsam $AB(B)$ axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD ita ut ipsae AD abscissae ex axe $AD(D)$ sint ipsis BC ordinatis ad axem $AB(B)$ aequales. Erunt et CD ordinatae ad axem $AD(D)$ aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$. Appellemus $AD \sqcap BC \sqcap y$. et $AB \sqcap DC \sqcap x$. Ipsam BP vocemus ω et ipsam $B(B)$ vocemus z.

Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int \overline{\omega z} \sqcap \dfrac{y^2}{2}$. sive esse $\omega z \sqcap \dfrac{y^2}{2d}$. At ex quadratura Trianguli patet esse $\dfrac{y^2}{2d} \sqcap y$. Ergo $\omega z \sqcap y$. Jam ex hypothesi est $\omega \sqcap \dfrac{b}{y}$. Ita enim erunt ipsae ω ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\dfrac{bz}{y} \sqcap y$. Adeoque $z \sqcap \dfrac{y^2}{b}$. Jam $\int z \sqcap x$. Ergo $x \sqcap \displaystyle\int \frac{y^2}{b}$. At $\displaystyle\int \frac{y^2}{b} \sqcap \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x \sqcap \dfrac{y^3}{3ba}$. quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x, curvae quaesitae $C(C)$. Inventam ergo habemus curvam, quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A.

Videbimus ergo an verum sit hoc Theorema sane memorabile:

---

9 *Am Rand:* $\underline{\int}$ summa $\underline{d}$ differentia

1 ipsae BP *erg. L* 7 $\sqcap$ x. *(1)* Constat ex alibi *(a)* ex a me demonstratis *(b)* ex omn *(2)* ipsam *L* 8 ω *(1)* Constat ex alibi a me demonstratis, esse $\overline{\text{omn } \omega} \sqcap \frac{\text{y}^2}{2}$. Ergo $\omega \sqcap \frac{\text{y}^2}{2\text{d}}$. $\int \omega \sqcap$ *(2)* et *L* 9 esse *(1)* omn *(2)* $\int \overline{\omega\text{z}}$ *L* 9 $\frac{\text{y}^2}{2\text{d}}$. *(1)* porro ex hypothesi debet esse *(2)* At *L* 10 qvadratura *(1)* parabolae patet *(2)* Trianguli *L* 14 est *(1)* Geometrica *(2)* Analytica *L* 15 f. A. *(1)* et ponendo *(2)* Videbimus *L*

---

9 alibi: vgl. z. B. N. 38 [**noch**]. 9 $\frac{y^2}{2d}$: Im vorliegenden Stück benutzt Leibniz zunächst noch $\frac{x}{d}$ für „Differenz der x“ und wechselt dann S. 116 Z. 16 zu dx.

„ In Parabola Cubica $C(C)$ sunt BP intervalla perpendicularium ad curvam PC
„ et ordinatarum BC ad axem, in axe ABP sumta ipsis ordinatis. BC reciproce
„ proportionalia.

Hoc calculus tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 \sqcap y^3$. ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c \sqcap \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba \sqcap y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t \sqcap \frac{\cancel{3}y^3}{\cancel{3}ba}$. ponendo $BT \sqcap t$ intervallo inter tangentem et ordinatam in axe: Jam $BP \sqcap \omega$ est $\sqcap \frac{y^2}{t}$. Ergo $\varpi \sqcap \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} \sqcap \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae ω ipsis y. reciproce proportionales quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus; cujus stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur Curva in qua ipsae BP intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $\omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. Jam $\int \omega \sqcap \frac{y^2}{2}$. Ergo $y \sqcap \sqrt{2\int\overline{\varpi}}$ vel $\sqrt{2\int\overline{\frac{a^2}{x}}}$. Jam $\int\omega$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura, quae satisfaciat est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura est ex numero Transcendentium.

At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciproce proportionales. Nempe $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\int z \sqcap x$ sive $z \sqcap \frac{x}{d}$ sive fiet: $\omega\frac{\overline{x}}{d} \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\omega \sqcap \frac{y^2}{2d} \smile, \frac{x}{d}$. Et fiet: $x, +\frac{y^2}{2d} \smile, \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas,

1 f. Cubica | C(C) *erg.* | sunt *(1)* interceptae *(2)* | BP *erg.* | intervalla ... curvam | PC *erg.* | et ordinatarum | BC *erg.* | ad axem | AB(B) *erg. u. gestr.* |, in *L* 1 f. *Streckenbezeichnungen* C(C), BP, PC und BC *erg. L* 10 mentem. *(1)* difficilior paulo videtur *(2)* Non *L* 12 vel $\sqrt{2\int\overline{\frac{a^2}{x}}}$ *erg. L* 14 est *(1)* logarithmorum seu in subduplicata ratione logarithmorum ab *(2)* in *L* 16 BC *(1)* abscissis reciproce *(2)* ordinatis *L*

6 methodo tangentium Slusii: Sluse's Regel zur Bestimmung der Subtangente findet sich in den *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

erit $\frac{x}{d} \sqcap z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\int x \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{y}} - \frac{y^2}{2}$. et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{y}}$. sive $d\overline{x^2 + y^2} \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae $AC, A(C)$ sunt $\sqcap \sqrt{x^2 + y^2}$. Centro A, radio AC, describatur arcus CE, ita ut E cadat in rectam $AE(C)$, erunt ipsae $E(C)$ differentiae inter AC et $A(C)$, sive $EC \sqcap e \sqcap d\overline{x^2 + y^2}$. Ergo $e \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis haberemus quaesitum, videtur tamen nihil referre etsi x progressionis arithmeticae sumserimus.

Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsis AD sive y, ipsas EC sive e reciproce proportionales esse. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium, habentur quacunque sint progressione ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est, sed Summa linearum, omnium scilicet $E(C)$ initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium $\underline{e}$ summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur. Quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae non ipsas y.

Sin jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2d}, \smile \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ faciamus y. progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{d\overline{x}} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. Imo generaliter neutri assignando progressionem,

---

16 Nota idem est dx. et $\frac{x}{d}$. id est differentia inter duas x proximas.

1 $\int \overline{\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}}$. *(1)* sive qvaeritur figura in qva momentum ordinataram ex axe, et abscissarum ex vertice *(2)* sive *(3)* sive *L*   4 e $\sqcap$ *(1)* $\sqrt{\mathrm{x}}$ *(2)* $\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$. *L*   7 seqvitur *(1)* ipsas AD *(a)* ipsis *(b)* sive *(aa)* e *(bb)* y, | esse *streicht Hrsg.* | ipsis AC *(2)* ipsis *L*   16 fiet: *(1)* $\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{}$ *(2)* $\mathrm{x} + \mathrm{y}\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$. et $\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \mathrm{a}^2$. Imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $\mathrm{xy} + \mathrm{y}\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}\mathrm{d}\overline{\frac{\mathrm{y}^2}{2}} \sqcap \mathrm{a}^2$. *(2)* x *L*

---

4 $d\overline{x^2 + y^2}$: Leibniz vergisst das Wurzelzeichen. Dadurch wird die nachfolgende Gleichung für e inkorrekt; der fehlerhafte Ausdruck für e wird bis Z. 14 beibehalten.   4 liceret: Dies ist nicht zulässig, vgl. auch Leibniz' Bemerkung Z. 11–14.

fiet: $xy + \dfrac{yd\overline{\dfrac{y^2}{2}}}{dx} \sqcap a^2$. $\odot$

Sed nondum quicquam praestitimus, considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS. dum ipsi AD occurrat in S. esse summam omnium AP applicatarum ad AB, aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD. id est vocando $DS, \sqcap v$. fiet $dy \int y + dy \int v \sqcap dx \int x + dx \int \omega$. sive $dy \int y + dy \int v \sqcap dx \int \dfrac{a^2}{y}$. ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y. progressionis Arithmeticae, fiet: $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} \sqcap dx \, \overline{\mathrm{Log}\, y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \dfrac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. fiet: $dx \sqcap \dfrac{y^2}{a^2 - yx}$ et nunc: $dx \sqcap \dfrac{y^2 + x^2}{2\,\overline{\mathrm{Log}\, y}}$. Ergo habemus denique aequationem in qua solae supersunt x. et y. extra vincula, nempe: $\overline{y^2 + x^2}$, $a^2 - yx \sqcap 2y^2\,\overline{\mathrm{Log}\, y}$. Quae aequatio cum sit determinata locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit hic in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $d\overline{x}$. Quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant quaestionis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facilia hactenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit.

Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans.

3 S. *(1)* AP ad *(a)* basin *(b)* axem, S *(2)* esse *(a)* omnes AP applicatas *(b)* summam *L* 5 dx $\int \omega$. *(1)* Jam dy $\int$ y $\sqcap \dfrac{y^2}{2}$. et *(2)* sive *L* 5 f. ex ... qvaestionis *erg. L* 6 progressionis *(1)* Geom *(2)* Arithmeticae *L* 6 $+\dfrac{x^2}{2} \sqcap$ *(1)* dx $\overline{\mathrm{Log}\, y^2}$ *(2)* dx $\overline{\mathrm{Log}\, 2y}$ *(3)* dx $\overline{\mathrm{Log}\, y}$ *L* 7 f. xy+ *(1)* $y^2 d\overline{x} \sqcap a^2$ fiet: $d\overline{x} \sqcap \dfrac{a^2 - xy}{y^2}$ at *(a)* supra *(b)* paulo ante *(2)* $\dfrac{y^2}{dx}$ *L* 9 nempe: *(1)* $2\,\overline{\mathrm{Log}\, y}\, a^2 - 2\,\overline{\mathrm{Log}\, y}\, xy \sqcap y^4 + y^2x^2$ *(2)* $\overline{y^2 + x^2}$, *L*

5 f. ex hypothesi quaestionis: Es gilt $x + \omega = \dfrac{a^2}{y}$, vgl. oben S. 115 Z. 17. 6 fiet: Die nachfolgende Gleichung ist falsch. Leibniz benutzt sie konsequent weiter bis Z. 9. Die Überlegungen zum Ansatz, durch Heranziehen einer weiteren Differentialgleichung und Anwendung eines Eliminationsverfahrens bei der Lösung der inversen Tangentenaufgabe weiterzukommen, werden davon jedoch nicht beeinträchtigt.

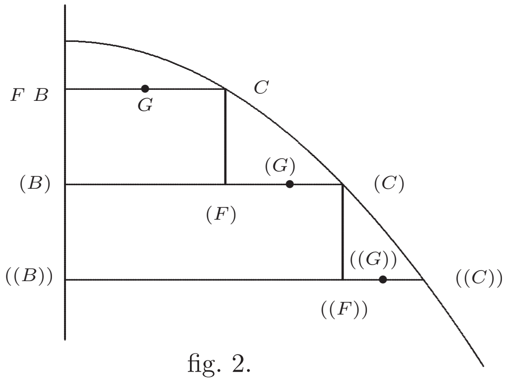


fig. 2.

In fig. 2. est $BC \sqcap y$. $FC \sqcap d\overline{y}$. Sit punctum G medium ipsius FC. Patet momentum ipsius FC, esse rectangulum sub FC et BG, id est rectangulum BFC. Nam cum sit $BFC + GFC$. posterius quippe prioris ratione inifinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int \overline{yd\overline{y}} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Sive momentum omnium differentiarum FC, aequabitur ultimi termini momento. Et $ydy \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{2}$ et $y^2dy \sqcap \frac{y\,d\overline{y^2}}{2}$. Porro supra in aeq. ⊙ faciendo x arithmeticam, fuit $\frac{yd\overline{y^2}}{2} \sqcap a^2 - xy$ sive $\frac{\overline{dy^2}}{2} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$ at idem $\sqcap yd\overline{y}$. Fiet ergo $yd\overline{y} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$. et erit $\int \overline{yd\overline{y}} \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{y}} - \boxed{\int x}\, \frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int \overline{yd\overline{y}} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Fiet ergo $y^2 + x^2 \sqcap 2\int \overline{\frac{a^2}{y}}$. ut ante, vel $dy^2 + 2x \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$. et d. ubi jam una, v. g. hic x. pro arithmetice procedente sumta est, non posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x \sqcap \frac{2a^2}{y} - d\overline{y^2}$. quia $d\overline{y^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura, ipsius y. Ipsius y. autem progressio, ut $d\overline{y^2}$ serviat[,] talis sumi debet, ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo

6 f. arithmeticam, *(1)* fiet: $\int \overline{y\frac{d\overline{y^2}}{2}} \sqcap \int a^2 - \int xy$ *(2)* fuit *L* 9 vel | $d\overline{y^2}$+x *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{2a^2}{y}$ *L* 13 sumi *(1)* potest, *(2)* debet *L*

6 aeq. ⊙: vgl. S. 117 Z. 1.

ipsae $d\overline{y}$ supponunt ipsas x, non ergo per ipsas invenietur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujusmodi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores utile erit adhuc unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales. Fiet: $x+\omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $z\omega \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{2}$. et $z \sqcap dx$. Adeoque fiet: $\omega \sqcap \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{z} \sqcap \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{dx}$. et denique $x + \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \overline{\text{Log}\, y}$ sive $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap AC \sqcap \sqrt{2\,\overline{\text{Log}\, AD}}$. Quae expressio curvae satis est simplex. Requiruntur autem ipsae AP. progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae fieret: $x + \frac{y}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. Sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva in qua ipsae AC ipsis BP aequales, fiet: $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap \omega$. et $\omega \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{2d\overline{x}}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet: $(\int \overline{\sqrt{x^2+y^2} \sqcap})$ $\int AC \sqcap y^2$ sed hoc non sufficit nisi ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. Ut sit $x \sqcap 1$. sit $BC \sqcap (y)$ erit $\sqrt{1+(y^2)} \sqcap (y^2)$. sive $1+(y^2) \sqcap (y^4)$. Unde habetur (y) nempe $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$ sive $(y^2) \sqcap \frac{\sqrt{5}}{2}$. et $(y) \sqcap \frac{\sqrt{\;}4\,5}{\sqrt{2}}$. Porro eodem modo

$$\underset{AC}{\sqrt{4+((y^2))}} + \underset{A(C)}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}} \sqcap ((y^2)).$$

4 simus *(1)* accuratiores, *(2)* exercitatiores *L* 6 zω $\sqcap$ *(1)* y^2 *(2)* | 2 *gestr.* dy^2 *ändert Hrsg.* | et *L* 6 fiet: *(1)* x + d$\overline{\text{x}}$, $\frac{d\overline{y^2}}{2}$ *(2)* ω *L* 9 progressionis *(1)* Geometricae *(2)* arithmeticae *L* 10 $\frac{a^2}{x}$. *(1)* Nota autem dx in x esse *(2)* sed *L* 14 ad *(1)* infinita *(2)* curvam *L* 16 eodem modo *erg. L*

8 $\overline{\text{Log}\, y}$: Dieser Term ist falsch, ebenso der sich daraus direkt ergebende Ausdruck $\sqrt{2\,\overline{\text{Log}\, AD}}$ in der folgenden Gleichungskette. Für AP (Z. 9) wäre AB zu setzen. 13 $\sqcap y^2$: Richtig wäre $\frac{y^2}{2}$. Der Rechenfehler wirkt sich, zusammen mit weiteren Versehen, bis S. 120 Z. 2 aus, ohne die Überlegung grundsätzlich zu beeinträchtigen.

Ita rursus poterit inveniri $((y))$. Et hujus ope reperietur tertia AC, et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similius, quo minor assumta est unitas.

x. esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB. esse uniformem. Descriptiones autem quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.

Videndum an $dxdy$ idem sit quod $d\overline{xy}$ et an $\dfrac{dx}{dy}$ idem quod $d\dfrac{x}{y}$ et videtur ut sit. Sit $y \sqcap z^2 + bz$. et x. sit $cz + d$. fiet $dy \sqcap \boxed{z^2} + 2\beta z \boxed{+\beta^2}, \boxed{+bz} + b\beta, \boxed{-z^2}\ \boxed{-bz}$ et fiet $dy \sqcap \overline{2z + \overline{b}}\beta$. Eodem modo $dx \sqcap +c\beta$. Et ita erit $dydx \sqcap \overline{2z + bc}\beta^2$. At idem produces si statim facias $d\overline{xy}$. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente. Idem est de divisoribus. Sed jam cum earum Summae quaeruntur discrimen an sit videndum est, $\int \overline{dx} \sqcap x$. $\int \overline{dy} \sqcap y$. $\int \overline{dxy} \sqcap xy$. Si jam sit aequatio v. g. $dxdy \sqcap x$. erit $\int \overline{dxdy} \sqcap \int x$. Jam $\int x \sqcap \dfrac{x^2}{2}$. Ergo $\int \overline{dxdy} \sqcap \dfrac{x^2}{2}$. sive $xy \sqcap \dfrac{x^2}{2}$. sive $\dfrac{x}{2} \sqcap y$. Quod satisfacit aequationi $dxdy \sqcap x$. Nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx\, d\dfrac{x}{2} \sqcap x$. sive $\dfrac{dx^2}{2} \sqcap x$. Quod verum esse constat.

In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$. non est idem quod $\int \overline{xy}$. Ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium, invenire summas productorum, nondum analytice, certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit

7–15 *Am Rand:* Error vide infra

9 ita *(1)* patet esse idem *(2)* erit | dzdx *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ $\overline{2\mathrm{z} + \mathrm{bc}}\beta^2$ *L* 10 separatim *(1)* qvaerenda qvae destruunt, idem in divisoribus *(2)* destructio *L* 11 f. qvaeruntur *(1)* differentiam video *(2)* discrimen *(a)* video, aliud enim est S *(b)* an *L*

7–15 infra: vgl. S. 122 Z. 6. 13 xy: Die Ersetzung von $\int \overline{dxdy}$ durch xy setzt die Regel $dxdy = dxy$ voraus. Dasselbe gilt für die Gleichsetzung von $dx\, d\dfrac{x}{2}$ mit $d\dfrac{x^2}{2}$ in Z. 14 f..

Wallisius non demonstratione, sed felici inductione nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$ quae quaeruntur. Ponatur $\int \overline{zy} \sqcap \omega$. Erit $zy \sqcap d\varpi$, et $y \sqcap \dfrac{d\varpi}{z}$ et $\int y \sqcap \displaystyle\int \frac{d\varpi}{z}$. Eodem modo $\int z \sqcap \displaystyle\int \frac{d\varpi}{y}$. Ponatur $\int y$ nota $\sqcap v$. et $\int z$ nota $\sqcap \psi$. Fiet $y \sqcap dv \sqcap \dfrac{d\varpi}{z}$ et $z \sqcap d\psi \sqcap \dfrac{d\varpi}{y}$. et $\dfrac{dv}{d\psi} \sqcap \dfrac{z}{y}$. Unde sequi videtur $d\dfrac{v}{\psi} \sqcap \dfrac{z}{y}$. Adeoque $\dfrac{v}{\psi} \sqcap \displaystyle\int \frac{z}{y}$. Ergo foret $\displaystyle\int \frac{z}{y} \sqcap \frac{\int z}{\int y}$. Quod est absurdum. Unde sequitur $\int \dfrac{dv}{d\psi}$ non esse $\dfrac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v, divisa per differentiarum ipsarum ψ. summanda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ. Non inquam, quia singulae tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int \dfrac{dv}{d\psi}$. quam $\dfrac{\int dv \sqcap v}{\int d\psi \sqcap \psi}$.

Ergone aliud erit $d\dfrac{v}{\psi}$ quam $\dfrac{dv}{d\psi}$? Si idem est etiam $\int d\dfrac{v}{\psi}$ erit $\sqcap \int \dfrac{dv}{d\psi}$ sive $\dfrac{v}{\psi} \sqcap \displaystyle\int \frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{\int dv}{\int d\psi}$. Quod absurdum est. Eodem modo an $d\overline{v\psi} \sqcap dvd\psi$. Ergo $\int \overline{dv\psi}$ sive $v\psi \sqcap \int \overline{dvd\psi}$.

Jam $v\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. Ergo $\int \overline{dvd\psi} \sqcap \int dv \int d\psi$. Quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dvd\psi$. idem esse quod $d\overline{v\psi}$, itemque $\dfrac{dv}{d\psi} \sqcap d\dfrac{v}{\psi}$. Quod tamen paulo ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus.

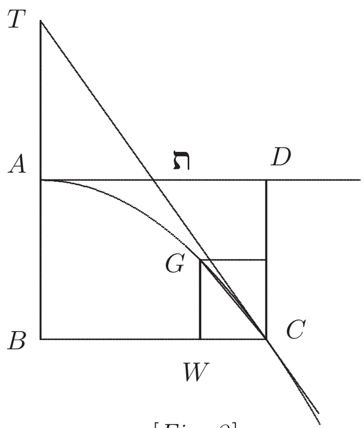
Sed jam distinguendum video: si sit v. et ψ. et faciant $v\psi$ vel $\dfrac{v}{\psi}$ quantitatem ali-

2 Sint *(1)* $\int$ z $\int$ y qvae qvaerun *(2)* $\int \overline{\mathrm{zy}}$ *L* 2 f. $\sqcap \omega$. *(1)* porro si $\int$ z $\sqcap$ *(2)* Erit *L* 5 $\dfrac{\int \mathrm{z}}{\int \mathrm{y}}$. *(1)* Unde seqvi *(2)* qvod *L* 6 erit? *(1)* qvid nisi *(2)* differentia *L* 7 est. *(1)* qvaelibet | ergo *streicht Hrsg.* | *(2)* Non *L* 10 $\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}\psi}$? *(1)* Non puto sed est idem. Ergo *(2)* Si *L* 12 f. $\int \overline{\mathrm{dvd}\psi}$. *(1)* | Ergo *streicht Hrsg.* | *(2)* Ergo *(a)* v *(b)* $\int$ *(3)* Jam *L*

1 Wallisius: vgl. J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478). 4 $\dfrac{z}{y}$: Hier sind Zähler und Nenner vertauscht. Der fehlerhafte Term wird bei der Herleitung eines Widerspruchs (Z. 5) verwendet; der Rechenfehler beeinträchtigt die Richtigkeit von Leibniz' Schlussfolgerung nicht. 4 sequi videtur: Bei Annahme von $d\dfrac{x}{y} = \dfrac{dx}{dy}$ als Regel ergibt sich die von Leibniz angeführte Folgerung.

quam v. g. $\aleph \sqcap v\psi$ vel $\dfrac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v. quam ipsius ψ rationales per unam quandam, v. g. abscissam x. expressi tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore $d\aleph$ et $dvd\psi$ vel $\dfrac{dv}{d\psi}$.

Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x+\beta, {}^\frown\, x+\beta,, -x, x$, fiet $2\beta x$. Quod longe aliud est quam $x+\beta,-x,, {}^\frown\, x+\beta,-x$. quod daret β^2. Concludendum ergo aliud esse $d\overline{v\psi}$ quam $dvd\psi$, aliudque $d\dfrac{v}{\psi}$ quam $\dfrac{dv}{d\psi}$.



[*Fig. 3*]

*D*ת $\sqcap \theta$. $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $TB \sqcap t$.

Primus gradus[:] $a+bx+cy \sqcap 0$. Ordinando et accommodando ad tangentes, fiet: $bt \sqcap -cy$. et $t \sqcap \dfrac{-cy}{b}$. Eodem modo: $\theta \sqcap \dfrac{-bx}{c}$. Sit $WC \sqcap \omega$ et $GW \sqcap \beta$. Patet esse: $\dfrac{t}{y} \sqcap \dfrac{\beta}{\omega}$. et fiet: $\omega \sqcap \dfrac{-\beta b}{c}$. Eodem modo $\beta \sqcap \dfrac{-\omega c}{b}$.

Secundus gradus: $a+bx+cy+dx^2+ey^2+fyx \sqcap 0$. Ordinando ad tangentes, fiet: $bt+2dxt+fyt \sqcap -cy-2ey^2-fyx$. Adeoque $t \sqcap \dfrac{-cy-2ey^2-fyx}{b+2dx+fy}$. Unde facile patet semper t per y, (et θ per x) dividi posse et quoniam $\omega \sqcap \dfrac{\beta y}{t}$. ideo fiet hic $\omega \sqcap \dfrac{\beta\overline{b+2dx+fy}}{-c-2ey-fx}$.

6–9 $\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}\psi}$ | Dת ... t *erg.* | *(1)* Sit $\mathrm{ax}^2+\mathrm{by}^2+\mathrm{cy}$ *(2)* primus *L*   10 et | GC *ändert Hrsg.* | $\sqcap \beta$ *L*

Adeoque fiet: $y \sqcap \dfrac{-\omega\overline{c+fx},\frown -\beta\overline{b+2dx}}{f+2e}$. At paulo ante $y \sqcap \dfrac{-a-bx-dx^2}{c+ey+fx}$ et fiet:

$$y \sqcap \frac{-\omega,\overline{c+fx},\frown -\beta\overline{b+2dx},x,\frown \overline{c+fx},,,+\overline{f+2e}\frown\overline{a+bx+dx^2}}{-\omega\overline{c+f}x,\frown -\beta\overline{b+2dx},\frown -e}$$

$$\sqcap \frac{-\omega\overline{c+fx},\frown -\beta\overline{b+2dx}}{f+2e}.$$

Habemus ergo aequationem in qua nulla est amplius y. Et omnes figurae, quarum aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest, quadrari possunt. Illae item quae ipsi per methodos alias ostendi possunt συγνωτοι.

3 f. $\dfrac{-\omega\overline{\mathrm{c+fx}},\frown -\beta\overline{\mathrm{b+2dx}}}{\mathrm{f+2e}}$. *(1)* qvem valorem inventum inserendo in *(a)* ω *(b)* valore ipsius ω, habebimus aeqvationem in qva nulla y. qvod ut fiat commodius, qvaeramus rursus per partes in exiguis: yx $\sqcap$ a. differentia erit yt $\sqcap$ −yx. et t $\sqcap$ −x. et $\theta \sqcap$ −y Jam *(aa)* $\langle\omega\rangle \sqcap$ *(bb)* y $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$. Erit: $\omega \sqcap \dfrac{-\beta\mathrm{a}}{\mathrm{x}^2}$. et $\beta \sqcap \dfrac{-\mathrm{a}\omega}{\mathrm{y}^2}$. *(2)* Habemus *L*

1 fiet: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite müsste $\beta f + 2e\omega$ lauten. Im Zähler wäre das Multiplikationszeichen zu streichen. Die Fehler wirken sich auf die Rechenausdrücke bis Z. 3 aus.

16. PRO METHODO TANGENTIUM INVERSA ET ALIIS TETRAGONISTICIS
27. November 1675

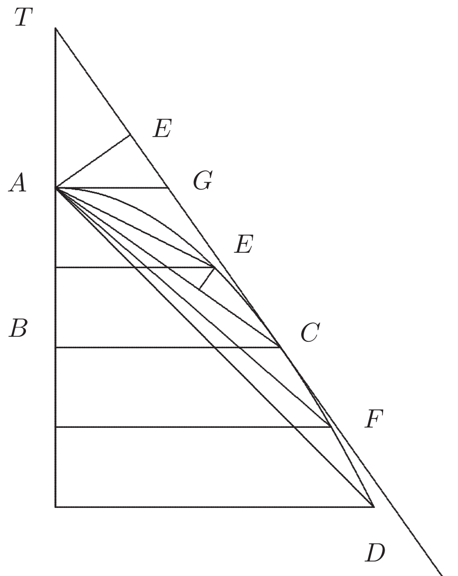
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. 1 2/3 S. auf Bl. 3, 1/4 S. auf Bl. 2 v°. Auf Bl. 2 r° Cc 2, Nr. 1132. Bl. 3 r° trägt eine Markierung nach etwa 1/3 S. Die Rückseite dazu auf Bl. 3 v° ist leer. Datum und Überschrift auf Bl. 2 r° ergänzt. — Gedr. (tlw. = bis S. 133 Z. 14): 1. Gerhardt, *Differentialrechnung*, 1848, S. 41–45; 2. (engl. Übers. von 1.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 104–109.
Cc 2, Nr. 1131

27. Nov. 1675

Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa.
Trigonometria indivisibilium. Aequationes inadaequatae. Ordinatae convergentes. Usus singularis centri gravitatis.

[*Teil 1*]

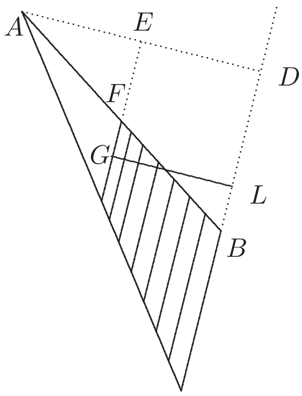
Materia contemplationis novae de Centris gravitatis, hoc modo:



[*Fig. 1*]

Segmento $AECD$ in $\bigtriangledown^{\text{la}}$ infinita AEC, ACF etc. resoluto inveniatur cujuslibet ex

2–126,2 *Nebenbetrachtung auf Bl. 2 v°:*



2 AECD | in $\bigtriangledown^{\text{la}}$ *streicht Hrsg.* | in L

2–126,2 Eine von Leibniz verworfene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

his $\triangledown^{\text{lis}}$ centrum gravitatis quod facile est cum semper Centrum gravitatis $\frac{1}{3}$ Altitudinis parte distet a basi. Cumque via centri gravitatis in $\triangledown^{\text{lum}}$ ducta aequetur revolutioni ejus,

---

$AD \sqcap a$. $BC \sqcap b$. area $\triangledown^{\text{li}}$ ABC $\frac{ab}{2}$. $DE \sqcap x$. $DB \sqcap d$. $\frac{EF}{AE \sqcap a-x} \sqcap \frac{d \sqcap DB}{AD \sqcap a}$. $EF \sqcap \frac{d\overline{a-x}}{a}$. et $\frac{EH}{AE} \sqcap \frac{DC \sqcap b+d}{a}$. Ergo $EH \sqcap \frac{\overline{b+d};\overline{a-x}}{a} \sqcap EF+FH$. Ergo $FH \sqcap \overline{b+d-d}, \frac{a-x}{a} \sqcap \frac{b}{a}\;\overline{a-x}$. Jam $GL \sqcap ED \sqcap x$. Ergo $HF \frown GL \sqcap \frac{b}{a}\overline{ax-x^2}$ quorum Summa $\frac{b}{a}\;\overline{\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}}$. et posito $x \sqcap a$. fiet $\frac{ba^2}{2}-\frac{ba^2}{3} \sqcap \frac{ba^2}{6}$. Quae quantitas Momentum scilicet $\triangledown^{\text{li}}$ ex basi BC, divisa per aream $\triangledown^{\text{li}}$ $\frac{ab}{2}$, dabit $\frac{a}{3}$. distantiam centri gravitatis $\triangledown^{\text{li}}$ ABC, a basi BC.

2 in *(1)* distantiam ab axe ducta *(2)* rem *(3)* $\triangledown^{\text{lum}}$ *L*

ipsae autem GA in infinitesimas axis aequentur duplo $\bigtriangledown^{\text{lo}}$, patet et ipsas AG in ipsas centrorum gravitatis ipsorum $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ AEC ab axe distantias ductas, momento segmenti ex axe aequari. Cujus methodi ope multa statim inveniri possunt dupliciter: Primum, sumendo figuram generalem, et calculando, indeterminate, eamque deinde ita explicando, ut centrorum gravitatis facilis habeatur inventio, ita detegentur momenta spatiorum aliter difficilium, si communi more per ordinatas quaererentur. Deinde contra, si figurae quarum communi more facile habentur momenta, hac methodo tractentur venietur ad curvas quasdam valde implicatas quarum semper dimensio habebitur ex facilioribus.

Ecce hic Regulam notabilem cujus ope ex qualibet Methodo utcunque implicata semper utilia eruuntur.

Utile est saepe quando alte assurgunt problemata, quae sua natura simplicia esse et aliunde solubilia scimus, ita enim multos detegent casus notabiles. Vide quae Tschirnhausius annotavit de tangentibus lineae Hastariae.

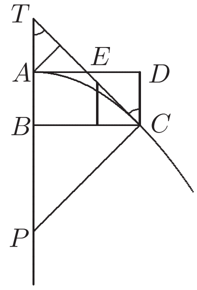
[*Teil 2*]

In problematis irregularibus, quae recta tractari aut ad aequationem, satis determinatam revocare non possumus, quia scilicet faciendum aliquid inverse, utile est plures vias inter se conferre, quarum producta coincidere debent. Hoc videtur utile ad methodum tangentium inversam. Ecce specimen.

1 autem | GH *ändert Hrsg.* | in *L* 2 AEC | distantias *streicht Hrsg.* | ab *L* 5 detegentur *(1)* figurae *(2)* momenta *L* 6 difficilium *(1)* deinde sumendo *(2)* si *L* 9 hic *(1)* Methodum notabilem per qv *(2)* Regulam *L* 9 f. qvalibet *(1)* regula *(2)* Methodo *L* 11 f. et *(1)* ut *(2)* aliunde *L* 15 aeqvationem, *(1)* unius incognitae *(2)* satis *L* 16 non *erg. L* 16 inverse, *(1)* utile est *(2)* | utile *gestr., erg. Hrsg.* | est *L* 18 Ecce specimen. *erg. L*

---

12 f. Tschirnhausius annotavit: nicht gefunden [**noch Cc 1126–1128?**]. 13 lineae Hastariae: Es handelt sich um den Zweig der gewöhnlichen Konchoide, der unterhalb des Kanons entsteht; vgl. auch den Brief an F. A. Hansen von Mitte Oktober 1677, III, 2 N. 87 S. 248. Leibniz behandelt die Hastaria auch in N. [**noch Cc, 1470**] und N. [**noch Cc, 1469**].



[*Fig. 2*]

Quaeritur figura in qua BP ipsis AT reciprocae. Sit $TB \sqcap t$. Erit $AT \sqcap t-x$. et erit $BP \sqcap \dfrac{a^2}{t-x}$. Multiplicetur in t. fiet $\square$. $TBP \sqcap \dfrac{ta^2}{t-x} \sqcap a^2 + \dfrac{a^2[x]}{t-x} \sqcap y^2$. Fiet: $ta^2 \sqcap ty^2 - xy^2$. et $t \sqcap \dfrac{xy^2}{a^2-y^2}$. Ergo $\dfrac{t}{x} \sqcap \dfrac{y^2}{a^2-y^2}$. Ergo $\overline{\text{omn}\,t} \sqcap$ momento ex vertice A, ipsorum $\dfrac{y^2}{a^2-y^2}$. Aliunde omnes TP ad axem aequantur omnibus TC. ad curvam.

$\dfrac{t}{y} \sqcap \dfrac{\beta}{\omega}$. Erit $\omega \sqcap \dfrac{\beta y}{t \sqcap \dfrac{y^2x}{a^2-y^2}} \sqcap \dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{xy}$. Jam $\int\overline{\varpi} \sqcap y$. Ergo: $\displaystyle\int \frac{\overline{\beta\overline{a^2-y^2}}}{xy} \sqcap y$. ☽

Porro $\omega x \sqcap \dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y}$ et $\displaystyle\int \overline{\varpi x} \sqcap yx - \int \overline{y\beta}$. Ergo: $\displaystyle\int \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y} \sqcap yx - \int\overline{y\beta}$ ⊙

---

4 f. *Nebenbetrachtung:* $\left(\dfrac{t}{x} \sqcap \dfrac{y,y}{a+y,a-y}\right)$

4 $\dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2}$ *(1)* id est erit t. erit momentum ex *(a)* axe *(b)* vertice *(2)* ergo *L* 4 f. A, *(1)* omnium *(2)* ipsorum *L* 6 jam *(1)* $\overline{\text{omn}\,\varpi} \sqcap$ y. *(2)* $\int\overline{\varpi}$ *L*

---

4 $t \sqcap$: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung müsste $y^2 - a^2$ lauten. Der Vorzeichenfehler hat Auswirkungen auf die weiteren Überlegungen bis S. 129 Z. 5. Insbesondere ist die Behauptung zur Unabhängigkeit der resultierenden Gleichungen S. 129 Z. 4 f. falsch.

$\omega \sqcap d\overline{y}$. Ergo: $d\overline{y} \sqcap \dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{xy}$. et $xy \sqcap \dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{d\overline{y} \sqcap \omega} \sqcap \int\overline{y\beta} + \int\overline{\dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y}}$. Si jam ponamus ipsas y progressionis arithmeticae[,] erunt ipsae $\omega \sqcap d\overline{y}$ constantes, et β variabiles, et fiet: $\beta \sqcap \dfrac{\int\overline{y\beta+\beta\dfrac{a^2-y^2}{y}}}{a^2-y^2}$ et $d\beta\overline{a^2-y^2} \sqcap \dfrac{a^2\beta}{y}$. Ob aeq. ⊙ est $\beta\dfrac{a^2-y^2}{y}+\beta y \sqcap d\overline{yx}$. Ergo $\dfrac{\beta a^2}{y} \sqcap d\overline{yx}$. Aequationes habuimus invicem independentes primam $\dfrac{dx}{dy} \overset{(1)}{\sqcap} \dfrac{yx}{a+y,a-y}$ alteram $d\overline{yx} \overset{(2)}{\sqcap} \dfrac{d\overline{x}a^2}{y}$.

Quaeramus adhuc alias, ut $\int\overline{td\overline{y}} \sqcap \int\overline{yd\overline{x}}$. Sed hoc nihil praebet novi. At $\int t\omega + \int x\omega \sqcap xy$. sive $\underset{t\,d\overline{y}}{t\;\omega} + \underset{x\,d\overline{y}}{x\;\omega} \sqcap d\overline{xy}$. At $t \sqcap \dfrac{dx}{dy}y$. Ergo hoc $\sqcap \dfrac{d\overline{xy}-xd\overline{y}}{dy}$. Ergo $d\overline{x}y \sqcap d\overline{xy}-xd\overline{y}$. Quod Theorema sane memorabile omnibus curvis commune est. Sed nihil ex eo novi ducetur, quia jam adhibuimus.

---

3 *Nebenrechnung, durch einen Strich abgetrennt:*
$y\beta + \dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y} \sqcap \dfrac{y^2\beta+\beta a^2-y^2\beta}{y} \sqcap \dfrac{\beta a^2}{y}$.

1 $\int\overline{\dfrac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y}}$. *(1)* Ergo $\dfrac{\beta}{\omega \sqcap d\overline{y}} \sqcap \int\overline{y+}$ *(2)* Si *L* 2 progressionis *(1)* Geometricae *(2)* arithmeticae *L* 3 $d\beta\overline{a^2-y^2} \sqcap$ *(1)* $y\beta$ $\beta\overline{y\langle 2\rangle -}$ *(2)* $\dfrac{a\beta^2}{y}$ *L* 4 $d\overline{yx}$. *(1)* qvae si multiplicentur in y. *(2)* Aeqvationes *L* 4 invicem independentes *erg. L* 4 f. $\dfrac{yx}{a+y,a-y}$ *(1)* alteram, $\dfrac{dx,a+y,a-y}{xy} \sqcap dy$ *(2)* alteram *L* 6 at *(1)* $\int t\beta +$ *(a)* $\int\langle y\beta\rangle$ *(b)* $\int x\beta \sqcap xy$. sive $t\beta + x\beta$ *(2)* $\int t\omega$ *L*

Sed ex alio principio novum habebimus theorema, quia scil. habetur summa omnium $BP \sqcap \frac{BC^2}{2}$. scilicet: $BP \sqcap \frac{a^2}{t-x}$. et $t \sqcap \frac{\beta y}{\omega} \sqcap \frac{d\overline{x}y}{dy}$ et $BP \sqcap \frac{a^2 d\overline{y}}{d\overline{x}y - d\overline{y}x} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{d\overline{y^2}}{2}$. Habemus ergo duas aequationes in quibus reperitur $d\overline{x}$ scilicet primam et tertiam, quarum ope tollendo $d\overline{x}$. habebimus aequationem, in qua una tantum incognitarum in vinculo remanebit, quo facto habebimus quaesitum, nimirum ex aeq. 1. erat $d\overline{x} \sqcap \frac{d\overline{y}yx}{a^2 - y^2}$ et nunc ex 3 erit $d\overline{x}yd\overline{y^2} - d\overline{y}d\overline{y^2}x \sqcap 2a^2 d\overline{y}$. Ergo $d\overline{x} \sqcap \frac{2a^2 d\overline{y} + d\overline{y}d\overline{y^2}x}{yd\overline{y^2}}$. Habemus ergo aequationem inter duos ipsius $d\overline{x}$ valores, in qua non nisi y. in vinculo, quo facto sumendo y Arithmetice proportionales, fiet $dy \sqcap \omega$ constans, et $d\overline{y^2} \sqcap z$. et $\int z \sqcap \frac{z^2}{2} \sqcap y^2$. Ergo $z \sqcap \sqrt{2}y \sqcap d\overline{y^2}$. Habemus ergo quaesitum.

Ecce elegantissimum specimen quo problemata Methodi Tangentium inversae solvuntur, aut saltem reducuntur ad Quadraturas: Nimirum efficiendum est si licet, diversis aequationibus conquisitis, ut Una tantum incognitarum in vinculo Tetragonistico relinquatur. Hoc effici poterit ordinatas varie sumendo, imo et loco ordinatarum convergentes vel alias.

Nota si loco x. vel y. alia quaedam recta inveniri posset, ut quae esset obliqua, aut quae esset una ex convergentibus ad idem punctum, qua adhibita una tantum incognitarum in vinculis restaret, tuto adhiberetur, exemplum sumi posset in quaerenda ipsarum AP relatione, summa enim ipsarum AP. ad axem, aequatur semiquadrato ipsius AC.

Quandocunque in vinculo relictae unius incognitae formulae sunt tales ut incognita non contineatur in irrationalitate aut nominatore, semper absolute solvi potest problema, reducitur enim ad quadraturam quae est in potestate, idem est in nominatoribus et

2 f. $\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{y}^2}}{2}$. | per d$\overline{\mathrm{x}}$ *gestr.* | Habemus *L*   8 dy $\sqcap$ β *ändert Hrsg.*   11 Qvadraturas: *(1)* qvandocumqve autem *(2)* Nimirum *L*   12 Tetragonistico *erg. L*   13 f. hoc ... alias *erg. L*   19 sunt *(1)* ration *(2)* tales *L*   21 ad *(1)* rationalitatem *(2)* qvadraturam *L*   21 qvae est in *(1)* potestate *(2)* | potest in *streicht Hrsg.* | potestate *L*

---

2 f. Durch die Streichung der korrekten Rechenanweisung per $d\overline{x}$ werden die folgenden Überlegungen bis quaesitum Z. 9 unbrauchbar.   17 exemplum: vgl. die Überlegungen hierzu in N. 15 **noch** S. 120 Z. 7 – S. 122 Z. 6.

irrationalibus simplicibus. At in compositis casus evenire potest, ut ad quadraturam redeamus quae non est in potestate.

Sed quicquid sit, quandocunque problema ad quadraturam reduximus semper describi potest curva quaesita motu Geometrico, qui exacte in potestate est, nec materialem curvam supponit. Haec porro methodus analytice exhibebit omnes quadraturarum a se invicem dependentias; et viam sternet ad absolvendam tetragonisticen.

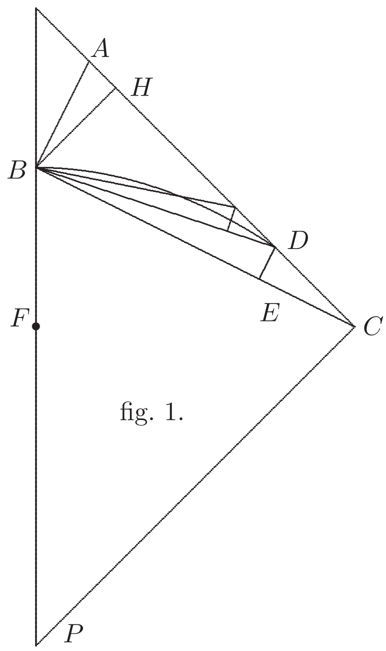
Fateor interim fieri posse, ut ingenti numero a e q u a t i o n u m i n a d a e q u a t a r u m, (quales istas voco, quarum pluribus opus est ad solvendum problema, (etsi ipsae solae sufficerent, si tractabiles essent +)[)] opus sit ad unam penitus ex vinculis tollendam. Malum enim in eo est, quod una aequatione non nisi unus terminus ex vinculis tolli potest, et is si saepius inest, non nisi semel. Itaque intererit magnum quaeri numerum aequationum inadaequatarum. Et examinandum quae sint ab aliis quodam modo independentes; id est per simplicem calculum non possint a se invicem derivari, v. g. summa omnium AP, et summa omnium AE.

[*Teil 3*]

Novum genus T r i g o n o m e t r i a e i n d i v i s i b i l i u m : o p e o r d i n a t a r u m n o n p a r a l l e l a r u m s e d c o n v e r g e n t i u m

3 ad *(1)* Curv *(2)* qvadraturam *L* 5 omnes *(1)* ⟨—⟩ *(2)* curvarum *(3)* qvadraturarum *L*

4 motu Geometrico: Hierzu und zu Fragen der Exaktheit und Unabhängigkeit von „materiellen Kurven“ vgl. Cc 2, Nr. 895–897, dat. Januar 1675.



[*Fig. 3*]

Sit punctum fixum B. sit ad curvam $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ exiguum $BDC.\,DE$ perp. in BC. Ex puncto B ducantur tangenti $AHDC$ occurrentes BA normalis ad BC seu parallela DE, et BH normalis ad tangentem DC productam. Hinc similia $\bigtriangledown^{\text{la}}$: CED, CHB, BHA. Ergo $\dfrac{BH}{CE} \sqcap \dfrac{HA}{DE} \sqcap \dfrac{BA}{CD}$. Adeoque: $BH, DE \sqcap CE, HA$. Et $BH, CD \sqcap CE, BA$. Ex quo sequitur summam $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ seu aream figurae aequari ipsis AB in CE seu in differentias BD et denique $HA, CD \sqcap DE, BA$. Porro $\dfrac{CH}{CE} \sqcap \dfrac{HB}{DE} \sqcap \dfrac{CB}{CD}$. Unde rursus fiet:

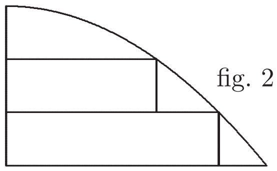
6 f. seu ... BD *erg. L*

1 *Fig. 3*: DC wird im Text als Tangente, als Kurvenbogen und als Sekantenabschnitt interpretiert.

6 aream figurae aequari: Der Flächeninhalt der Figur beträgt $\dfrac{1}{2}\sum(AB \cdot CE)$.

$CH, DE \sqcap CE, HB$. $HB, CD \sqcap DE, CB$, id est area $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ut per se patet, sibi ipsi. Denique $CH, CD \sqcap CE, CB$. Quod postremum notabile videtur pro Trochoeidibus.

Nimirum si curvae DC provolutione in plano immoto CA puncto B constante describatur curva Trochoeides; et posito ordinatam Trochoeidis ad planum immobile CA esse BH, ipsae CH. interceptae ad DC applicatae summatae, aequabuntur ipsis CB summatis ad suas differentias applicatis.



[*Fig. 4*]

Jam si ordinatae quaedam ad suas differentias applicentur idem producetur ac si quaeratur differentiarum momentum ex axe, id est momentum, ac si summa omnium seu maxima in distantiam sui centri gravitatis, id est puncti sui medii ab axe, id est in sui dimidium ducatur[,] id est aequatur summa talium semiquadrato maximi.

Semper ergo habebitur summa omnium BC in CE, quae aequabitur semper semiquadrato BC, sive summae omnium BP, ad axem applicatarum⟨—⟩ in F, si CP perpendicularis ad curvam DC.

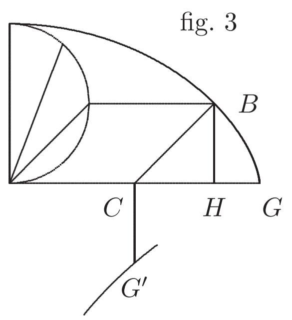
---

4 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* error

8 vid. fig. 2

8–135,12 *Dazu, unter Fig. 6:* NB. elegans observatio: tentemus efficere ut trigonometria indivisibilium nos jubeat terminos applicare suis differentiis, et statim novum habebimus theorema elegans.

4 Trochoeides *(1)* erit ipsa BC perpendicularis ad Trochoeidem *(2)*; et *L* 5 DC *(1)* ipsarum CH differentias *(2)* applicatae *L*



[*Fig. 5*]

Sit curva B talis Trochoeides, per punctum B descripta. Jungatur CB chorda describens, quam ostendam semper ad curvam esse perpendicularem, et BH, ordinata et HC applicentur in CG', ad planum, seu ad differentias ipsarum HC erit figura unde orta semper quadrabilis et aequalis semiquadrato CB. cum differentiae ipsarum GH (puncto G posito fixo) applicatae aequentur semiquadrato HB. Unde si applicentur differentiae inter has duas differentias summa earum aequabitur suo proprio semiquadrato, unde necesse est tunc locum fieri ad lineam rectam (forte, alia quoque, ♃).

Superest ut demonstrem generaliter chordam illam ut BC semper dare perpendicularem ad Trochoeidem quod probo fig. 4.

---

2 *Zu* Sit curva B: fig. 3

2 B *(1)* descriptae *(2)* descripta | de *streicht Hrsg.* | jungatur *L* 4 in CG *ändert Hrsg.* 8 tunc *(1)* facere lineam *(2)* locum *L*

---

1 *Fig. 5*: In Leibniz' Skizze wird der hier mit G' bezeichnete Punkt mit G bezeichnet. 3 ostendam: Die Aussage ist bereits erwiesen in Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 39 bis 42. In seinem Handexemplar hat Leibniz der Figur auf S. 41 Ergänzungen in Blindtechnik hinzugefügt; vgl. VII, 4 **noch Nr. 35 S.** . 4 seu ad differentias: Leibniz identifiziert irrtümlich die Differenzen der CH mit den Bogenelementen der Kurve. Die daraus gezogene Schlussfolgerung ist unrichtig; der Begründungsversuch führt folgerichtig auf die Aussage, dass die Kurve eine Gerade war (Z. 8). 10 fig. 4: vgl. Fig. 6. Die von Leibniz skizzierte Figur (eine fragmentarische Vorstufe wird nicht wiedergegeben) lässt sich nicht völlig mit dem Text in Übereinstimmung bringen, dem gemäß die Winkel ACL und DCH gleich sein müssten. In Leibniz' Skizze liegt L auf BCH.

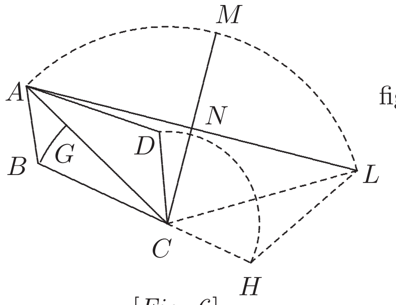


fig. 4

[*Fig. 6*]

Sit polygonum $ABCD$ provolvendum[,] sit punctum describens A. Centro C. radio CA, describatur circulus dum punctum [D] veniat in H punctum rectae BCH, et tunc A. perveniet in L. Juncta AL. utique erit tangens trochoeidis, bisecetur arcus AML. et jungatur CM quae secet AL in N. Secabit utique ad angulos rectos diameter scilicet Circuli chordam sui arcus bisectam a se, erit CN perpendicularis ad ANL tangentem ergo ad curvam. Jam CN, et CA vel CL eundem habent terminum communem, C, et posita CD infinite parva; differentiam ipsae quoque habebunt infinite parvam sed et alter terminus, ut $A_{[,]}M$ vel L infinite parve differet. Ergo CN perpendicularis ad tangentem sive curvam.

Nota si in fig. 3. BC. applicentur ad planum id est in generatrice chordae ad curvam dabitur superficies trochoeidis circa basin seu planum.

Data curva et pro Trochoeide sumta statim habebimus Elementa curvae quae generatrix esse debet, posita scilicet BC pro arithmetice proportionali investigentur ipsarum GC differentiae in fig. 3. id est in fig. 1. ex BC. ipsae DE. Datur autem sic EC. constans, et DC, ut dixi, ergo et DE, ergo et Triangulum CHB, adeoque BAH in fig. 1. Sed relatio desideratur inter BC, BF. Imo summa omnium CG fig. 3. seu CH in $DC \sqcap BP$ in diff. BF. Quia autem unius summae eaedem differentiae coincidunt, ergo fiet BP in diff.

9 CN *(1)* tangens *(2)* perpendicularis *L* 11 ad *(1)* curvam, chordae *(2)* planum *L* 12 superficies *(1)* cycloeid *(2)* trochoeidis *L* 15 EC *(1)* arithm *(2)* constans *L* 16 Triangulum *(1)* AHE, *(2)* | CHA *ändert Hrsg.*, adeoque | CBA *ändert Hrsg.* | in *L*

4 tangens trochoeidis: Diese Aussage über *AL* ist unzutreffend. Damit werden die Überlegungen bis Z. 10 hinfällig. 11 fig. 3: s. o. Fig. 5. 11 id est: **[noch]**. 14 f. ipsarum *GC* differentiae: **[noch]**. 15 fig. 1: s. o. Fig. 3.

$BF \sqcap CH$ in DC. Adeoque habebitur valor BP in diff. BF. Ergo $x + \dfrac{d\overline{y^2}}{2}, dx \sqcap \sqrt{x^2 + y^2}$ per etc. $\sqcap$ v. cognitae, ex qua aequatione Trochoeidibus omnibus generali, si tollatur vel $d\overline{y^2}$, vel $d\overline{x}$ tunc quaelibet curva habere posset generatricem analyticam, quod fieri non potest, adeo nec generalis sublatio esse potest.

Interea NB NB, si aliunde possumus semper Generatricis Trochoeidis inventionem habere suppositis quadraturis, habebitur hinc via generaliter tollendi $d\overline{x}$, ex aequatione aliqua vel $d\overline{y^2}$, alteram per alteram ope hujus inventae aequationis. Si non posset, tamen quia descriptio generatricis Trochoeidis per motum geometricum compositum, ut alibi inveni, semper haberi potest utendo in fig. 1. chorda pro ordinata, ita ut circa immobile centrum recta moveatur alias ducens, ideo possumus habere semper effectionem hujus aequationis novissimae geometricam.

2 generali, |si *streicht Hrsg.*| si *L* 5 aliunde *(1)* poterimus saltem *(2)* possumus *L* 7 aeqvationis. *(1)* possumus autem aliunde *(2)* Si *L* 9 ut *(1)* immobilis *(2)* circa *L*

8 alibi: [**noch**]. 9 fig. 1: vgl. Fig. 3.

18. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA EXEMPLUM
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 823

Xb. 1674.

De Methodo Tangentium inversa exemplum.

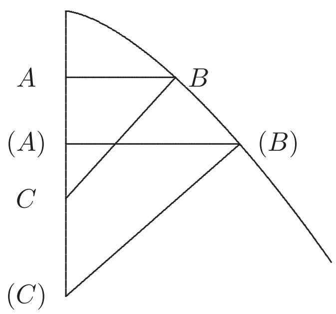


fig. 1.

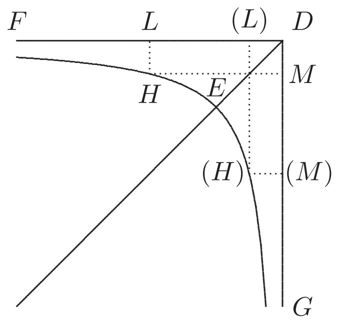


fig. 2.

Sit fig. 1. curva $B(B)$ eius naturae, ut si ad quandam directricem referatur $A(A)C(C)$ ordinatis AB, $(A)(B)$ et perpendiculares $BC, (B)(C)$ ad curvam ducantur ipsi curvae occurrentes in B[,](B) et directrici in $C, (C)$ ipsae AB, $(A)(B)$ sint ipsis AC[,]$(A)(C)$

---

6 *Darunter:* Confer quae dixi Xb. 1674. *Schediasmate de calculo Elastico*, et schediasmate *De progressionibus et Geometria arcana et methodo Tangentium inversa*.

10 et *(1)* axi *(2)* directrici *L* 10–138,1 ipsae ... proportionales *erg. L*

---

6 *Schediasmate de calculo Elastico*: Cc 2, Nr. 822, dat. Dez. 1674; *De progressionibus*: VII, 3 N. 39, dat. Dez. 1674.

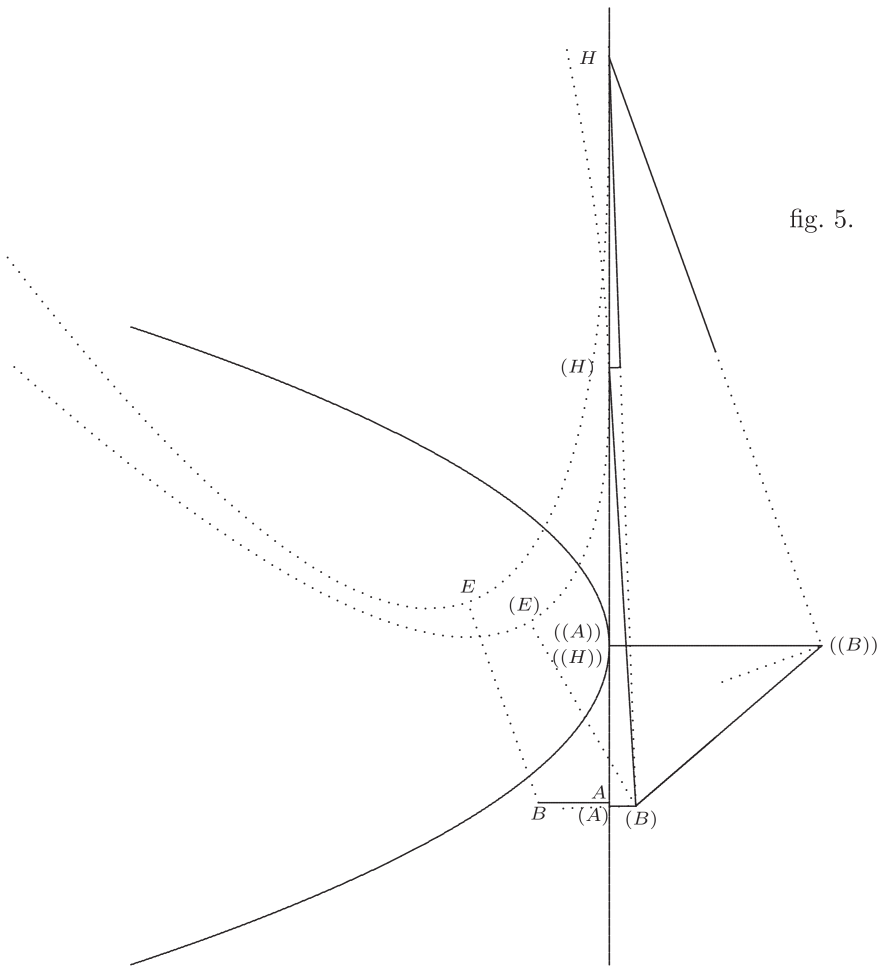
reciproce proportionales. Quaeritur modus hanc curvam describendi.

Intelligatur alia haberi figura; cujus ordinatae sint velut AB, abscissae velut AC, vel contra: eam figuram manifestum est esse Hyperbolam. Sit enim in fig. 2. Hyperbola $H(H)$ rectum transversumque latus habens aequalia cujus centrum D. vertex E. asymptoti DF, DG angulum facientes rectum. Puncta $H, (H)$ unde ordinatae in duas asymptotos, HL vel $(H)(L)$ in DF, et HM vel $(H)(M)$ in DG. ita ut HL (: vel $(H)(L)$:) aequetur ipsi MD (: $(M)D$:) et HM (: vel $(H)(M)$:) aequetur ipsi LD (: $(L)D$:) ordinatae scilicet ad unam asymptoton abscissis: constat ex natura Hyperbolae, ipsas HM, $(H)(M)$ (: sive $LD, (L)D$:) esse in ipsarum $DM, D(M)$ (: vel $HL, (H)(L)$:) ratione reciproca. Itaque si ipsae HM aequentur ipsis AB, ipsas DM aequales fore ipsis AC. vel contra.

Sed haec quanquam vera sint, nondum video tamen quid ad figurae propositae descriptionem faciat Hyperbola. Ne tamen nihil dicamus, comminiscamur figuram quandam, etsi nec ipsam satis exploratam, cujus ope describi possit proposita. Forte enim ejus natura erit tractabilior.

Pone in fig. 5. curvam HE super plano $H(H)((H))$ volvi perpetuo contactu, et curvam puncto B constante descriptam esse talem, ut perpendiculares $(B)(A)$, et BA sint ipsis interceptis $(H)(A)$ vel HA reciproce proportionales. Tunc puncta B. erunt in curva quaesita cujus proinde habebitur descriptio. Sed quaeritur jam curva HE talis naturae ut sumto puncto certo in ipsa E, vel ab ipsa distante B. ab eo semper puncto ductae perpendiculares ad tangentes sint interceptis in tangentibus inter punctum occurrentis perpendicularis, et contactus curvae, reciproce proportionales. Sed hoc hyperbola non praestat, ut jam patebit.

3 f. H(H) ... aeqvalia *erg. L* 5 angulum ... rectum *erg. L* 7 (H)(M) :) *(1)* | ipsi *streicht Hrsg.* | *(2)* aeqvetur *L* 11–140,1 Sed ... fig. 3 *erg. L* 16 perpendiculares | sive ordi *erg. u. gestr.* | (B)(A) *L*



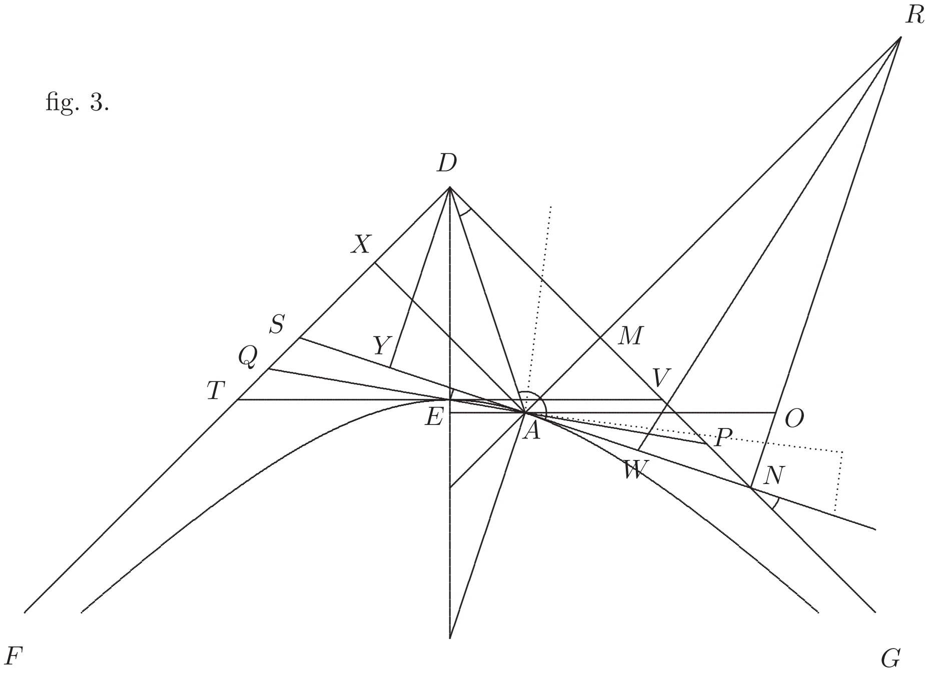
[*Fig. 3*, *tlw. Blindzeichnung*]

---

1 *Fig. 3*: In der Vorlage ist der Punkt A nicht bezeichnet, der Punkt $((A))$ dagegen mit A. Die Figur weist eine Reihe von Linien in Blindtechnik auf, von denen einige offenbar verworfene Konstruktionsversuche darstellen. Diese werden nicht wiedergegeben, ebenso eine unkenntlich gemachte und teilweise vom Text (S. 138 Z. 15–22) überschriebene Vorstufe der Figur.

Nam fig. 3.[:]

fig. 3.



[*Fig. 4*]

Esto Hyperbola EAG[,] vertex E, centrum D. asymptotus DG. ad quam ordinata AM ex puncto Hyperbolae A. Tangens NA. occurrens asymptoto DG in N. Erit $MN \sqcap MD$. ex natura Hyperbolae. Ergo et $AN \sqcap AD$. et Triangulum DAN isosceles. Et Anguli $ADM \sqcap DNA$ item $DAM \sqcap NAM$. Jungatur EA. quae producta occurrat duabus asymptotis DF in Q. et DG in P. Erit per 8. sec. Apoll. $QE \sqcap AP$. Ex Tangente AN erigatur perpendicularis NR quae ipsi AM ordinatae productae occurrat in R. Erit

3 vertex E, *(1)* terminus *(2)* centrum *L* 4 Hyperbolae *(1)* A⟨—⟩. *(2)* |AH *ändert Hrsg.*|. Tangens *(a)* NAH *(b)* NA. occurrens *L*

2 *Fig. 4*: Der Punkt *A* ist in der Vorlage mit *AH* bezeichnet, im zugehörigen Text verwendet Leibniz bis auf eine Ausnahme jedoch *A*. 7 Apoll.: APOLLONIUS, *Conica*, II, 8; vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 219.

angulus ARN anguli ADG duplus. Quoniam anguli RAN et RNA aequales inter se simul aequantur angulo DAN. ergo angulus ARN duobus reliquis ADN et AND inter se aequalibus. Sed haec obiter. Quemadmodum et si tangens AN. alteri asymptoto DF occurrat in S, fore $AN \sqcap AS$. Ergo $AS \sqcap AD$. Triangulum ergo ADS isosceles. Jam angulus $DAS \sqcap$ angulo ARN. Nam ang. DAS est angulo DAN qui ei deinceps est, complemento ad duos rectos. At eidem angulo DAN in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DAN etiam duo anguli ADN et DNA simul sumti, id est angulus ARN. complemento ad duos rectos. Ergo ang. $ARN \sqcap$ angulo DAS. Ergo anguli ASD et $ADS \sqcap$ angulo DAN et ang. ASD vel $ADS \sqcap$ angulo DAM vel NAM, aut angulo RAN aut RNA. Triangula ergo ADS et RAN similia. Eritque ut DS ad DA vel AN, ita AN ad AR. Adeoque DA media proportionalis inter DS et AR.

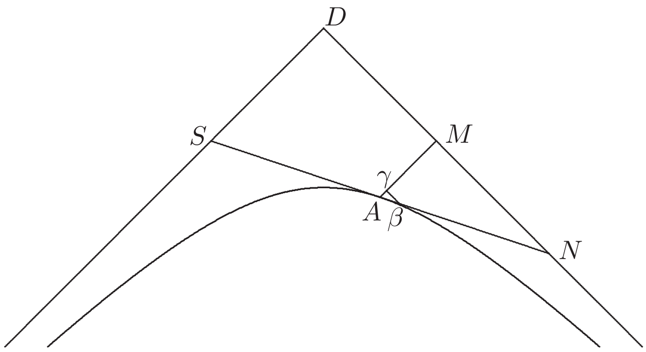
Sit TEV tangens verticis E Asymptotis utrinque occurrens[,] erit (per theorem. 8. lib. 1. Wittii) TS ad SD ut NV ad VD.

In recta AN, sumto puncto medio W. jungatur RW. Ob angulum WRA aequalem angulo ADM erit $\dfrac{DM}{AM} \sqcap \dfrac{RW}{WA}$. Ideoque $RW \sqcap \dfrac{1}{AW}$, seu sumtis diversis in curva punctis A. erunt RW in reciproca ratione ipsarum AW. vel contra. Eodem modo erit AX ad SX vel ad XD, sumto puncto X medio in recta SD et juncta AX, quae perpendicularis ad SD. et parallela asymptoto AX. Unde manifestum dudum XD et AX etiam esse alias alio sumto puncto A, reciproce proportionales. Sed quod unum volebam non evenit ut scilicet ducta ex D. perpendiculari in tangentem SA, nempe DY[,] sint ipsae DY ipsis AY reciproce proportionales. Et calculari facile potest valor ipsius DY respectu ipsius AY. nam $DY \smile YN \sqcap SD \smile DN \sqcap AM \smile MN \sqcap AM \smile MD$. Ergo $DY \sqcap YN \frown AM \smile MD$ seu $\dfrac{DY}{YN} \sqcap \dfrac{AM}{\dfrac{1}{AM}}$. Jam $YN \sqcap AY - AN \sqcap AY - AD \sqcap AY - \sqrt{AM^2 + \dfrac{1}{AM^2}} \sqcap AY -$

8 f. ang. ASD *(1)* | vel *streicht Hrsg.* | *(2)* vel *L* 10 similes *L ändert Hrsg.* 13 ut *(1)* SA ad AN *(2)* NV *L* 21 ipsius DY *(1)* pariter ac *(2)* respectu *L*

1 duplus: Die Behauptung ist nicht richtig, die Winkel ARN und ADG sind gleich. Leibniz verwechselt in der folgenden Begründung den als rechten Winkel vorausgesetzten $\sphericalangle RNA$ mit dem kleineren $\sphericalangle RNM = \sphericalangle RAN = \sphericalangle RAD$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung bis Z. 16. 13 Wittii: J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, *DGS* II S. 195 f. 23 $YN \sqcap AY - AN$: Richtig wäre $AY + AN$; der falsche Wert für YN und weitere Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Rechnung bis S. 142 Z. 3.

$\dfrac{\sqrt{AM^4+1}}{AM}$. Ergo $\dfrac{DY}{\dfrac{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}}{AM}} \sqcap \dfrac{AM}{\dfrac{1}{AM}}$, Ergo $\dfrac{DY}{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}} \sqcap \dfrac{AM}{1}$. Ergo $\dfrac{AY \frown AM}{DY} \sqcap \dfrac{AM}{1} + \dfrac{\sqrt{AM^4+1}}{DY}$ [$\sqcap$] $\dfrac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{DY}$. Ergo $\dfrac{AY}{\cancel{DY}} \sqcap \dfrac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{\cancel{DY}}$. sed satius rem reducere ad calculum analyticum: $DM \sqcap x$. $AM \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap DX$. Ergo $DS \sqcap \dfrac{2a^2}{x}$. $SN \sqcap \sqrt{\llcorner \dfrac{4a^4}{x^2} + 4x^2 \lrcorner} \sqcap \dfrac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}$. Hinc nullo negotio ut obiter dicam haberi potest absolute superficies curvae Hyperbolicae circa quamlibet Asymptoton volutae.



[*Fig. 5*]

Esto enim punctum quodlibet A. Triangulum characteristicum $\beta\gamma A$, erit $\dfrac{SN}{DN}$ [$\sqcap$] $\dfrac{A\beta}{\beta\gamma}$. Ergo $SN \frown \beta\gamma \sqcap DN \frown A\beta$. sive Omn. $\dfrac{\cancel{2}\sqrt{a^4+x^4}}{x} \sqcap$ Omn. $A\beta \frown \cancel{2}x$. Jam Omn. $A\beta \frown x$. constituunt momentum Hyperbolicae curvae. Idem est pro altera asymptoto. Jam $AD \sqcap \sqrt{AM^2+DM^2} \sqcap \dfrac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Porro $\dfrac{SN}{DN} \sqcap \dfrac{DS}{DY}$ sive $DY \sqcap \dfrac{DN \frown DS}{SN} \sqcap$

2 f. $\sqcap \dfrac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\cancel{\mathrm{DY}}}$. | Ergo $\dfrac{\mathrm{AY}}{\mathrm{DY}} \sqcap \dfrac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\mathrm{DY}}$. *gestr.* | sed *L* 4 AM $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ *(1)*. AD $\sqcap \dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4}}{\mathrm{x}}$. $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AX}^2$ *(!)* ($\sqcap \mathrm{MD}^2$) $\sqcap \dfrac{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4-\mathrm{x}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{DX}^2$ *(2)* $\sqcap$ DX *L* 9 $\dfrac{\mathrm{A}\beta}{\beta\gamma}$. *(1)* | Ergo *streicht Hrsg.* | *(2)* Ergo *L*

$\dfrac{2x \frown \dfrac{2a^2}{x}}{\dfrac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}} \sqcap \dfrac{2a^2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. $AD^2 - YD^2 \sqcap \dfrac{-4a^4x^2}{a^4+x^4} + \dfrac{x^4+a^4}{x^2}$ unde fiet $AY \sqcap \sqrt{\dfrac{-4a^4x^4 + \llcorner x^4+a^4 \lrcorner\square}{x^2 \frown a^4+x4}}$. DY erit ad AY ut $2a^2x^2$ ad $\sqrt{\llcorner\llcorner x^4+a^4\lrcorner\square\lrcorner - 4a^4x^4}$. Non sunt ergo in ratione reciproca.

Sed ne ope foci, aut etiam verticis Hyperbolae datae, aut alterius cujusdam, similis quaerere longo calculo necesse sit, videamus generaliter, an possibile sit punctum quoddam fixum invenire quod satisfaciat, ita ut inde demissae ad tangentes Hyperbolae perpendiculares, sint interceptis inter puncta communia tangentium et harum demissarum, et inter puncta curvae in quibus fit contactus reciproce proportionales.

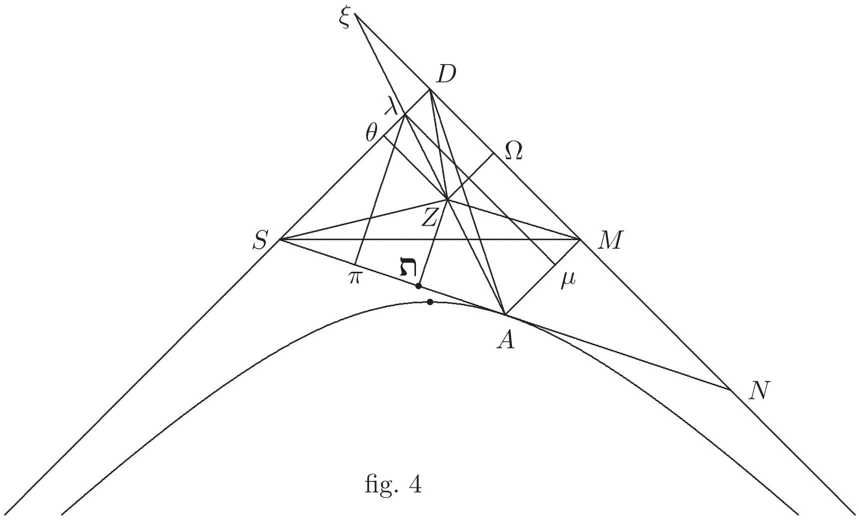


fig. 4

[*Fig. 6*]

Esto punctum illud Z, fixum cujus distantia ab asymptoto, nempe $Z\Omega$ sit b. et ipsa $D\Omega$ sit c. et $DM[\sqcap]x$, et $AM \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. et $DS \sqcap \dfrac{2a^2}{x}$. $\Omega M \sqcap x \mp c$. $Z\text{ח} \sqcap z$. $A\text{ח} \sqcap \dfrac{e^2}{z}$.

1 $\dfrac{2ax}{\sqrt{a^4+x^4}}$ *L ändert Hrsg.* 2 $\sqrt{\dfrac{-4a^4x^4 + \llcorner x^4+a^4\lrcorner\square}{x^2 \frown a^4+x4}}$ *(1)* | erit *streicht Hrsg.* | *(2)* DY erit *L*

2 $2ax^3$ *L ändert Hrsg.* 7 sint *(1)* int *(2)* abscissis *(3)* interceptis inter *(a)* punctum occursus *(b)* puncta *L*

$AD \sqcap AN \sqcap AS \sqcap x + \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$.

Quaeritur determinatio puncti $\daleth$ seu magnitudo rectae $Z\daleth$. Sumitur DZ puncti Z distantia a puncto D[,] $\sqcap \sqrt{b^2+c^2}$ item ejus distantia a puncto M, seu $ZM \sqcap \sqrt{x^2 \mp 2xc + c^2 + b^2}$. $Z\theta \sqcap D\Omega \sqcap c$. Ergo $S\theta \sqcap \dfrac{2a^2 - bx}{x}$ $(DS - D\theta \sqcap 2MA - Z\Omega)$. $SZ \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2c^2 + 4a^4 - 4a^2bx + b^2x^2}}{x}$. $\dfrac{AM}{Z\Omega}$ seu $\dfrac{a^2}{x} \smile b \sqcap \xi M \smile \xi\Omega$ seu $\xi\Omega + \boxed{\Omega M} x \mp c \smile \xi\Omega$ fiet $a^2 \frown \xi\Omega - bx \frown \xi\Omega \sqcap bx^2 \mp bcx$, sive $\xi\Omega \sqcap \dfrac{bx^2 \mp bcx}{a^2 - bx}$ et erit $\xi D \sqcap \dfrac{x \mp c}{a^2 - bx}, \frown bx, \pm c$ et $\xi M \sqcap \xi\Omega + \Omega M \sqcap \dfrac{x \mp c}{a^2 - bx} \frown bx + x \sqcap \dfrac{\boxed{bx^2} \mp cbx + a^2x \boxed{-bx^2}}{a^2 - bx}$ et $A\xi \sqcap \sqrt{\xi M^2 + AM^2} \sqcap \sqrt{\dfrac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \dfrac{a^4}{x^2}}$, qui valor erit ad $A\lambda$, ut ξM ad x sive ut $\mp cb + a^2$ ad $a^2 - bx$. Ergo $A\lambda$ erit $\sqcap \sqrt{\dfrac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \dfrac{a^4}{x^2}} \frown \dfrac{a^2 - bx}{\mp cb + a^2}$ ubi vero nonnihil compendii haberi potest[,] nam fiet reducendo:

$$\frac{\sqrt{\mp cbx + a^2x, \square,, \frown x^2,,, + a^8 - 2a^6bx + a^4b^2x^2}}{\boxed{a^2 - bx,} \frown x, \frown \mp cb + a^2} \boxed{\frown a^2 - bx} \sqcap A\lambda.$$

---

2 *Am Rande:* Si generalis regula danda puncto positione dato omnia per calculum inveniendi adhiberi potest talis calculus quo Schotenius ex una data directrice caeteras invenit.

2 potest | qvalis *ändert Hrsg.* | calculus *L* 2 rectae Z$\daleth$ *(1)* Datur *(a)* punct *(b)* puncti Z distantia a puncto *(aa)* DZ $\sqcap$ *(bb)* D $\sqcap \sqrt{b^2+c^2}$ datur et *(2)* sumitur *L* 5 c $\smile \xi\Omega$ *(1)* | fiet: *streicht Hrsg.* | *(a)* $a^2\xi$ *(b)* $a^2 \frown$ *(2)* fiet *L*

---

1 $AD \ldots x + \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$: Richtig wäre $AD = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{a^2}{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Den richtigen Wert hatte Leibniz S. 142 Z. 11 berechnet, den falschen Wert verwendet er wieder S. 145 Z. 4 für SA.
2 calculus: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178; Leibniz hat in seinem Handexemplar auf S. 177 Marginalien zum Text notiert und in der Figur einen Kurvenbogen ergänzt.
7 $\xi M \sqcap \xi\Omega + \Omega M$: In der folgenden Rechnung setzt Leibniz x statt $x \mp c$ für ΩM ein. Das Versehen beeinträchtigt die Berechnung von $A\lambda$ in Z. 11.

Jam perpendicularis in tangentem sit $\lambda\pi$. Erit $\dfrac{\lambda\pi}{\pi A} \sqcap \dfrac{Z\daleth}{\daleth A} \sqcap \dfrac{z}{\dfrac{e^2}{z}} \sqcap \dfrac{z^2}{e^2}$. Ergo $\lambda\pi \sqcap \dfrac{z^2 \frown \pi A}{e^2}$. Jam $\lambda\pi^2 + \pi A^2$ sive $\dfrac{z^4 \frown \pi A^2 + e^4\pi A^2}{e^4} \sqcap A\lambda^2$. Ita habebitur valor ipsius πA per z. Porro $D\lambda \sqcap \dfrac{Z\Omega \frown \xi D}{\xi\Omega} \sqcap \cancel{b}, \frown \dfrac{bx^2 \mp 2bcx \pm a^2c}{\cancel{b}x^2 \mp \cancel{b}cx}$. Ergo $\lambda S \sqcap \dfrac{2a^2}{x} - D\lambda$ at $\sqrt{\lambda S^2 - \lambda\pi^2} \sqcap S\pi$. Jam $S\pi + \pi A \sqcap SA \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Hinc habebitur aequatio nova exhibens valorem ipsius πA per solas $a.\,b.\,c.\,e.\,x.\,z$. Conferatur cum priore itidem per solas istas; et fiet aequatio quae dabit valorem ipsius z quaesitum conferendo hos duos ipsius πA valores.

Dato igitur puncto A repertum est punctum Z per calculum, ita ut ad tangentem $A\daleth$ inde ducta perpendicularis $Z\daleth$ sit valoris cogniti per $A\daleth$ divisi. Sed hoc non sufficit, necesse est enim determinatas $b.\,c.\,d.$ ita explicari, si licet, ut facta explicatione omnes indeterminatae destruantur. Sed non possunt destrui ex valore ipsius z. Sed nondum satis res perspecta. Credo enim nunc, satis solutum problema. Quoniam enim ipsa quoque z. est indeterminata, non video quid obstet quo minus manentibus iisdem $b.\,c.\,e.\,a$, variari possint x.

Imo jam video quaesitas rectas esse $b.\,c.$ et valorem earum per duas indeterminatas z et x. hic haberi: Sed quaeritur determinatus seu semper idem. Igitur sumta b verbi gratia velut quaesita, caeterae, $c.\,a.\,e.$ ita pro arbitrio explicandae sunt; ut facta explicatione destruantur literae indeterminatae; sed non video quomodo hoc fieri possit, ob z. non elisam. Sed video erratum a me in inquirendi modo: Nimirum non est supponendum in Calculo $A\daleth \sqcap \dfrac{e^2}{Z\daleth}$ sed ex sumtis $D\Omega, Z\Omega, DM$, investigandae $Z\daleth$, $\daleth A$ cum sint determinatae, inventisque earum valoribus, facienda est aequatio cum hac $A\daleth \sqcap \dfrac{e^2}{Z\daleth}$, vel quod idem est ponatur valor unius aequalis quantitati e^2 constanti, per valorem alterum divisae, unde orietur aequatio, cujus ope quaeri poterit vel b vel c. Ordinetur secundum

3 $\cancel{b}, \frown \dfrac{bx^2 \mp 2bcx \pm a^2c}{\cancel{b}x^2 \mp \cancel{b}cx}$. | ergo *streicht Hrsg.* | ergo *L* 6 qvaesitum *(1)*. Qvo reperto *(2)* conferendo *L* 8 divisi *(1)* sed ut eadem maneat aeqvatio, eaedem literae, π *(2)* sed *L* 9 enim *(1)* cognitas *(2)* determinatas *L* 13 f. possint x. *(1)* Atque jam videndum erit qvia b. a. e. c. in arbitrio an ita possint explicari *(2)* Imo *L* 14 video *(1)* puncta qvaesita esse non *(2)* qvaesitas *L* 20 $\dfrac{e^2}{Z\daleth}$ *(1)* qva aeqvatione reducta *(2)* vel *L* 21 aeqvalis *(1)* valori *(2)* qvantitati *L*

alterutrum, et quaeratur valor v. g. ipsius b. eoque sic invento tres reliquae arbitrariae, $c. e. a$. ita eplicentur, ut evanescat indeterminata. Quod variis modis possibilibus tentando, si possibile sit inveniemus.

Quod si idem alterius quoque curvae ope praestari possit; earum duarum curvarum dimensiones ad se invicem reducentur; cum productae figurae per unam aut per alteram futurae sint invicem proportionales. Unde intelligi potest fore curvas in quibus hoc sit impossibile futurum sequitur etiam novam ita atque admirandam sane haberi methodum curvas diversas reducendi ad se invicem.

Illud quoque considerandum: Problemata talia de punctis fixis nova esse nec quod sciam hactenus proposita. Si quis porro curvam quaerat in qua sine ullo calculo ex aliquo puncto fixo jam in ipsa curva dato, ut vertice, centro, polo, centro gravitatis, vertice aliove puncto alterius cujusdam curvae similis, aut etiam cognatae veluti centro circuli generatoris, etc. hoc eveniat; is eo ipso simpliciorem quandam descriptionem propositae curvae repererit.

Caeterum si punctum describens non sit fixum, sed mutabile potest tamen ope ejus describi curva nostra, modo jam non ut hactenus recta a puncto contactus curvae describentis ad punctum respondens curvae descriptae; pro perpendiculari curvae descriptae habeatur; sed recta perpendicularis ad rectam duos puncti describentis situs, seu duo curvae puncta proxima jungentem, quae Tangenti curvae describentis regulae ita occurrat; ut rectae inter punctum occursus perpendicularis ad curvam descriptam (quod jam aliud a puncto contactus curvae describentis et plani in quo volvitur) et punctum ordinatae ex curva descripta ad planum vel potius ad rectam seu regulam in qua fit volutio interceptae sint ordinatis ipsis reciproce proportionales. Hinc rursus patet mobilitatem punctis B, (vide fig. 5) tam variis modis posse fingi, ut plurimarum curvarum ope eadem descriptio habeatur; et quod hinc sequitur eae curvae reducantur ad se invicem.

1 duae *L ändert Hrsg.* 2 possibilibus *erg. L* 8 f. invicem. *(1)* Sed et anteqvam hinc abeamus notandum est *(2)* Illud *L* 9 talia *erg. L* 10 hactenus | in usum aut *gestr.* | proposita *L* 10 ex *(1)* ipsa statim *(2)* aliqvo *L* 12 aut ... veluti *erg. L* 15 describens *erg. L* 19 describentis *(1)* plano *(2)* regulae *L* 20 inter *(1)* punctum contactus | curvae describentis *erg.* | et occursus | perpendicularis *erg.* | interceptae sint ordinate *(2)* punctum *L* 20 ad ... descriptam *erg. L* 22 rectam *(1)* plani *(2)* seu *L* 22 f. volutio *(1)* | sit *streicht Hrsg.* | ipsi ordinat *(2)* interceptae *L*

24 fig. 5: s. o. *Fig. 3.*

Videndum itaque in primis in hoc exemplo: an ne idem praestari possit ope curvarum: Circularis, (descripta quadam quasi cycloeide) parabolicae, (descripta quasi Trochoeide parabolica) Ellipticae, Hyperbolicae; ita enim sequeretur omnes illas curvas ad se invicem reduci, et omnium curvarum conicarum dimensionem, et per consequens et Hyperbolae quadraturam ex quadratura Circuli pendere: mira profecto inquisitionis ratione.

Hinc apparet quantam dent lucem novae ejusmodi et intentatae inquisitiones.

Superest inquirendum an alia quoque problemata intractabilia seu methodi Tangentium inversae reduci possint ad curvarum in rectum extensiones; hoc enim posito non analytice quidem at geometrice tamen habentur soluta. Sed de hoc scheda peculiari.

Caeterum si quando ejusmodi methodus inversa Tangentium qualis hic exemplum dedi succedat analytice, ut in eo exemplo, ubi quaesivi crementa ordinatis reciproce proportionalia, (quod evenit in parabola) tunc etiam reduci potest problema ad alterius curvae volutionem; imo plurium diversarum; quarum omnium proinde habebitur dimensio. Videndum an qualibet figura data alia haberi possit cujus volutione describatur, uti data qualibet analytica alia haberi potest cujus evolutione describatur: Cum volutio et evolutio ita differant ut in volutione censentur planum immotum, et curva moveri, at in evolutione contra curva immota et planum moveri; sumto utrobique puncto fixo (vel etiam certa ratione mobili) describente.

12 ad *(1)* aliud simile *(2)* alterius *L*

---

9 scheda peculiari: N. 19. 11 exemplo: s. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, dat. Dez. 1674, VII, 3 N. 39 S. 560–562. 14 Videndum: vgl. N. 4 **[noch]**.

19. PROBLEMATA METHODI TANGENTIUM INVERSAE
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S. Überschrift ergänzt. Geringe Textverluste durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 824

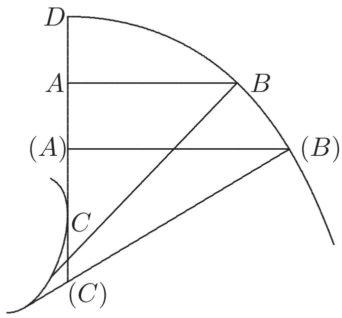
Xb. 1674.

Problemata Methodi Tangentium inversae ad Geometricas constructiones reducta per applicationes curvarum.
Adde eodem mense Schediasma:
De Methodo Tangentium inversa exemplum
cujus schediasmatis istud velut continuatio est:

Schediasmate illo ostendi quomodo omnia problemata methodi tangentium inversae, reducantur ad constructiones Geometricas (: per applicationes curvarum ad planum :) in quibus functio aliqua datur ex data ordinata; nulla abscissae mentione. Superest ut indagemus casus in quibus functio aliqua datur ex data abscissa nulla ordinatae mentione. Quod fit quotiescunque quaeritur aliqua quadratura. Haec problemata semper aut saltem plerumque reduci possunt ad duas radices aequales; sed difficilius ad constructiones Geometricas at priora facilius ad constructiones Geometricas, at non nisi per ipsas ad Calculum duarum radicum aequalium.

---

10 *De Methodo Tangentium inversa exemplum*: N. 18.



[*Fig. 1*]

Quaeritur curva $B(B)$ ita ut sumta directrice $DA(A)$ ductisque ordinatis seu perpendicularibus ad directricem $AB, (A)(B)$ et perpendicularibus ad curvam, $BC, (B)(C)$ ipsae AC sint ipsis $DA, (D)(A)$ (: sumto quodam puncto D constante sive fixo in recta directrice :) reciproce proportionales. Dubium nullum est pendere hoc problema ex quadratura Hyperbolae, vel ex volutione aut evolutione curvae parabolicae. Quorum prius ⟨statim⟩ ostendit analysis inventorum meorum, posterius patet ex inventis Heuratii sed

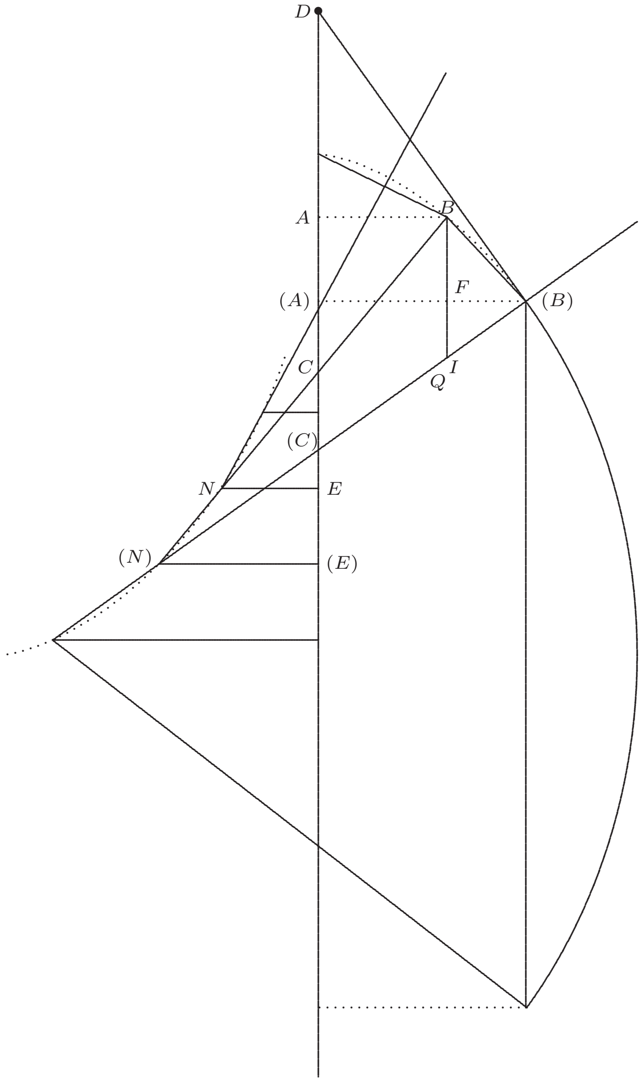
5 *Nebenbetrachtung:* $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a}{\frac{1}{a}}$. Ergo $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a^2}{1}$. $\frac{e}{f} \sqcap \frac{a^2}{1}$. Ergo ⟨ita⟩ $e \sqcap \frac{a^2 f}{1}$. Ergo $e \sqcap \frac{a^2}{\frac{1}{f}}$.

2 f. seu ... directricem *erg. L*

7 inventorum meorum: Leibniz untersucht die Rollkurve der Parabel in VII, 3 N. 38_{11-14}; vgl. im vorliegenden Band N. 29 sowie Cc 2, Nr. 827. — ex inventis Heuratii: H. VAN HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520.

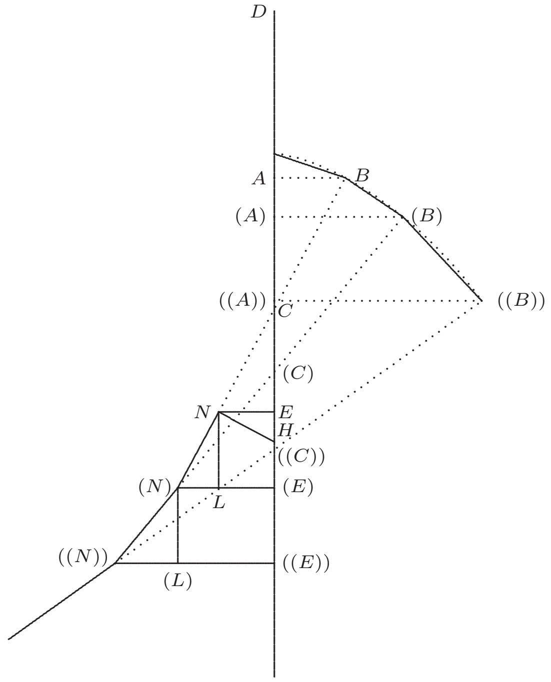
per synthesin. Quod si ergo generaliter ex data relatione ipsarum AC ad ipsas AD inveniri potest curva construens; poterunt omnes quadraturae reduci ad extensiones curvarum quo post ipsas quadraturas analyticas nihil magis optem in Geometria; ita enim omnes quadraturae Geometrice habebuntur. Loco autem volutionum videntur hic adhibendae evolutiones.

2 ad *(1)* constructiones curv *(2)* extensiones *L*

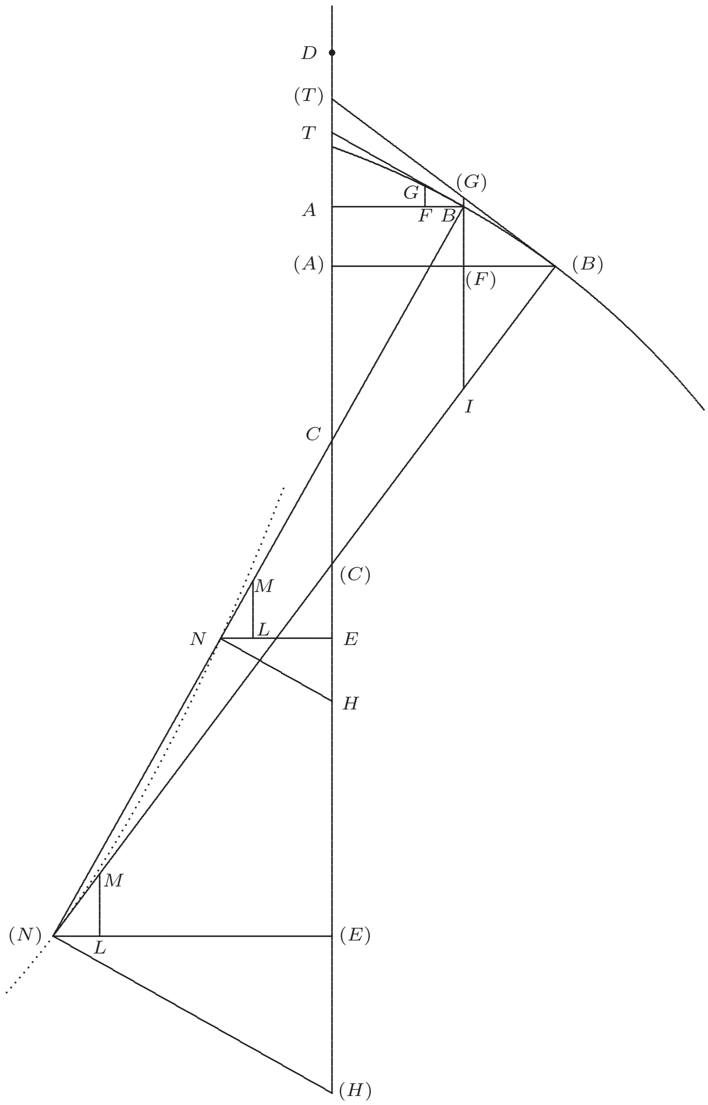


[*Fig. 2a, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 2a*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 2b, tlw. Blindzeichnung*]


D
(T)
T
(G)
G
A
F
B
(A)
(B)
(F)
I
C
(C)
M
N
L
E
H
M
(N)
L
(E)
(H)

[*Fig. 2c*]

Esto curva cujus puncta $N(N)$ et alia cujus puncta $B(B)$, directrix utrique communis DAE. Ordinatae prioris NE, posterioris BA, perpendiculares prioris NH posterioris BC. Tangentes prioris NC posterioris BT. et $N.C.B.$ puncta sunt in una recta ex hypothesi, ideoque BT et NH parallelae. Porro investigemus ante omnia relationem quae est inter $E(E)$ et $A(A)$.

Omnes primas nempe has: $\underset{b}{NB}.\ \underset{c}{NC}.\ \underset{e}{NE}.\ \underset{n}{N(N)}.\ \underset{\lambda}{E(E)}$ ponamus cognitas, erit CE ad EN (hic negliguntur signa includentia ob infinitas parvitates)[:] $EC \sqcap \sqrt{c^2-e^2}$. Jam $N(N)$ ad $E(E) \sqcap \lambda$ ut c ad $\sqrt{c^2-e^2}$. Ergo $N(N) \sqcap n \sqcap \dfrac{\lambda c}{\sqrt{c^2-e^2}}$ et $AB \sqcap e \frown \dfrac{CB}{NC} \sqcap$ $[e \frown]\ \dfrac{b-c}{b}$. Rectas DA ponamus datas $\sqcap x$. et rectam $A(A)$ vel $(A)((A))$ semper eandem

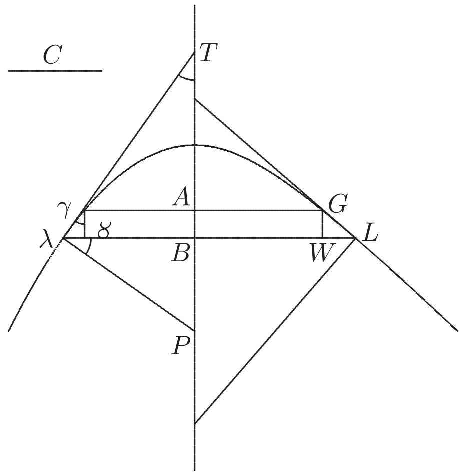
2 puncta *(1)* D(D) *(2)* N(N) *L*   2 f. communis *(1)* TAE *(2)* DAE *L*   4 prioris NC | posterioris *streicht Hrsg.* | posterioris *L*   6 f. et A(A). *(1)* | Sane *erg.* | Esto NB $\sqcap$ b. N(N) $\sqcap$ n. fiet: *(a)* NB vel N(B) $\sqcap$ b + $\dfrac{\mathrm{yn}}{\mathrm{b}}$ sive b + ♧n *(aa)* $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}} \sqcap \dfrac{\mathrm{C(E)}}{}$ *(bb)* $\dfrac{\mathrm{E(E)}}{\mathrm{N(N)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{C(E)}}{\mathrm{CN}}$ qvae CN velut data appelletur c, et fiet C(E) $\sqcap \dfrac{\mathrm{E(E)} \frown \mathrm{c}}{\mathrm{N(N)}}$ datur porro et CB $\sqcap$ ǂb ‡ c. Datur et NE $\sqcap \nu$ unde scilicet calculum incipimus. datur ergo et AB. Nam est $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{NE} \sqcap \nu} \sqcap \dfrac{\mathrm{CB} \sqcap ǂ\mathrm{b} ‡ \mathrm{c}}{\mathrm{c} \sqcap \mathrm{NC}}$. Ergo AB $\sqcap$ ǂb ‡ c, $\frown$ *(aaa)* $\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{c}}$ *(bbb)* $\dfrac{\mathrm{N(N)}}{\mathrm{C}}$ sit B(B) $\sqcap \beta$. *(aaaa)* | NL $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | λ *(bbbb)* | E(E) $\sqcap \lambda$. *streicht Hrsg.* | Rectius ita | Porro cum Triangula NL(N) et CEN sunt similia erit $\dfrac{\mathrm{N(N)}}{\mathrm{N(L)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{NC} \sqcap ¢}{\dfrac{\mathrm{E(E)} \frown ¢}{\mathrm{N(N)}}}$ *erg. u. gestr.* | *(2)* omnes *L*   8 parvitates) *(1)* ut NL $\sqcap$ E(E) $\sqcap \lambda$ ad (N)L, seu λ ad $\sqrt{\mathrm{n}^2-\lambda^2}$ sive EC $\sqcap \dfrac{\lambda \mathrm{n}}{\sqrt{\mathrm{n}^2-\lambda^2}}$ Jam alias EC $\sqcap \sqrt{\mathrm{c}^2-\mathrm{e}^2}$ *(2)* | : *erg. Hrsg.* | EC $\sqcap \sqrt{\mathrm{c}^2-\mathrm{e}^2}$ *L*   9 NL $\sqcap \lambda$ *L ändert Hrsg.*   10 $\dfrac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$ *(1)* demonstravit jam Hugenius: *(a)* rectam A(A) esse *(b)* cum recta A(A) sit ad rectam C(C) in composita ratione ex rationibus *(2)* Rectas *L*

---

1 *Fig. 2c*: Leibniz orientiert sich an der Figur in Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 83; er verwendet wie Huygens in der Figur und im zugehörigen Text als Bezeichnung für die Punkte der Evolute zunächst $D, (D)$ und ändert dann zu $N, (N)$.   7,19 demonstravit jam Hugenius: Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 82; vgl. die zugehörigen Randbemerkungen von Leibniz in VII, 4 N. **[noch]**.

esse β. et rectam AC vel $A(C)$ semper dari $\sqcap y$, dabitur et semper $C(C)$ vel $(C)((C))$ appellanda ω. Datur recta DA vel $D(A)$. Datur $A(A) \sqcap (A)((A))$ etc. Datur et recta AC, vel $(A)(C)$. Datur ergo et $D(C)$ vel $D\langle—\rangle$. Quaeritur valor ipsius NE vel $(N)(E)$. quam ponamus datam, ponamus et datam longitudinem cujuslibet NB, et progressionem ipsarum $N(N)$ atque ex sumtis omnibus NB, NE, DA, eorumque differentiis $N(N), NL, A(A)$ quaeratur AC. Esto $NE \sqcap y$. $DE \sqcap x$. $EC \sqcap l$. $NC \sqcap \sqrt{y^2+l^2}$. $E(E) \sqcap NL \sqcap \lambda$. Ergo $N(N) \sqcap \dfrac{NC \frown \lambda}{l}$. Breviter res huc redit, ex data relatione AC ad DA, quaeritur relatio ipsarum AB ad DA, quae inveniretur inventa relatione ipsarum NE ad DE. et ponendo N. esse puncta curvae cujus evolutione describatur curva punctorum B. Itaque omissis tantisper ipsis AB quaeramus NA ex DA et AC. Quod ut fiat facilius inverso modo sumta NE et ejus producta EC inde quaeramus AC. Ejus inventae valorem conferendo cum valore ejus jam noto eliminabitur prod⟨ucta⟩ l. et habebitur NE. ex DA. Sed hoc procederet ita si ad inveniendam AB ex NE, non opus esset valore NB seu curvae N in rectum extensione. Qua cum opus sit habebitur aequatio trium incognitarum DA. NB. NE. Non ergo sic haberi exitus potest.

1 f. appellanda ω. *(1)* | porro *streicht Hrsg.* | $\dfrac{\mathrm{C(C)}}{\mathrm{A(A)} \sqcap \mathrm{B(F)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{C(C)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BF} \sqcap \mathrm{A(A)}} \frown \dfrac{\mathrm{BF} \sqcap \mathrm{A(A)}}{\mathrm{C(C)}}$ *(a)* Sunt autem *(b)* Est autem $\mathrm{(A)(C)} \frown \mathrm{A(A)} \sqcap \dfrac{\mathrm{(A)(B)}^2 - \mathrm{AB}^2}{2}$ et $\mathrm{FB} \sqcap \mathrm{(A)(B)} - \mathrm{AB}$ *(aa)* erit $\mathrm{FB}^2 \sqcap \mathrm{(A)(B)}^2 - 2\mathrm{(A)(B)} \frown \mathrm{AB}$ *(bb)* Ergo $\dfrac{\mathrm{(A)(C)} \frown \mathrm{A(A)}}{\mathrm{FB}} \sqcap \dfrac{\mathrm{(A)(B)} + \mathrm{AB}}{2} \sqcap \dfrac{2\mathrm{AB} + \mathrm{FB}}{2}$. Ergo $\mathrm{AC} \frown \mathrm{A(A)} \sqcap$ | 2 *gestr.* | $\mathrm{AB} \frown \mathrm{FB}$ seu $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \sqcap \dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{A(A)}}$ sed hoc dudum scimus. Jam ut tandem ad calculum sive ratiocinationem veniamus *(aaa)* CI *(bbb)* $2\mathrm{(A)(C)} \frown \mathrm{A(A)} \sqcap \mathrm{(A)(B)}^2 - \mathrm{AB}^2$. Jam FB^2 *(aaaa)* $\sqcap \mathrm{(A)(B)}^2 - 2$ *(bbbb)* $\sqcap$ *(aaaaa)* $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AB}$ *(bbbbb)* $\boxed{\mathrm{AB}^2} + 2\mathrm{AB} \frown \mathrm{FB} \boxed{+\mathrm{FB}^2} \boxed{-\mathrm{AB}^2}$ *(2)* Datur *L* 7 $\sqcap \dfrac{\mathrm{NC} \frown \lambda}{\mathrm{l}}$. *(1)* porro NB *(a)* datur *(b)* supponitur dari appelletur ξ *(2)* Breviter *L* 12 habebitur NE. *(1)* restabunt *(2)* sed *(3)* ex *L*



[*Fig. 3*]

Sit curva GL cujus ordinatae AG. BL. Triangulum characteristicum GWL. Sit alia curva $\gamma\lambda$, cujus o⟨rdi⟩natae $A\gamma, B\lambda$. $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ characteristicum γ♉λ. Pone esse rectam constantem [C] et rectangulum $C \frown \gamma\lambda \sqcap BL \frown AB$ erunt Elementa Curvae homogenea Elementis figurae $GABLG$ et rectangulum sub curva et recta C. aequale spatio figurae respondenti. Haec ex Heuratii invento. Quaeritur ergo data figura invenire curvam ei homogeneam seu methodus inveniendi cujus Elementa sunt in data progressione.

$\dfrac{\lambda\gamma}{\beta} \sqcap \dfrac{\lambda P}{\lambda B}$. Ergo $\lambda B \sqcap \dfrac{\beta \frown \lambda P}{\lambda\gamma}$. sive $\dfrac{\lambda B}{\lambda P} \sqcap \dfrac{♉\gamma}{\lambda\gamma}$.

Problema ergo huc redit, data ratione perpendicularis ad ordinatam, invenire curvam. Problema illi simile, quod resolvi posse ostendi data ratione ordinatae λB ad reductam BP invenire curvam, imo alterum ad alterum potest reduci. Nam $\lambda P \sqcap \lambda B \frown \dfrac{\lambda\gamma}{\beta}$.

8 $\dfrac{\lambda \text{B}}{\lambda \text{P}} \sqcap \dfrac{\lambda \text{P}}{\lambda\gamma}$ *L ändert Hrsg.* 11 reduci. *(1)* Nam $\sqrt{\lambda \text{P}^2 - \lambda \text{B}^2}$ vel $\sqrt{\dfrac{\lambda \text{P}^2 - \beta^2 \frown \lambda \text{P}^2}{\lambda\gamma^2}}$ vel $\dfrac{\lambda \text{P}}{\lambda\gamma} \frown \sqrt{1-\beta^2} \sqcap \text{BP}$ *(2)* Nam *L*

6 ex Heuratii invento: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 518.

Ergo $BP \sqcap \sqrt{\lambda B^2 \frown \frac{\lambda\gamma^2}{\beta^2} - \lambda B^2} \sqcap \frac{\lambda B}{\beta} \frown \sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}$, itaque erit $\frac{BP}{\lambda B} \sqcap \frac{\sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}}{\beta}$. datur ergo ratio $\frac{BP}{\lambda B}$. Problema ergo huc redit dato Triangulo characteristico invenire curvam. Imo jam video errorem cum $\lambda\gamma$ non detur nisi relatione ad quasdam abscissas hinc non potest dici dari rationem. Caeterum hinc apparet rem esse aeque difficilem data figura $GABLG$ invenire quadraturam, seu data $\lambda\gamma$ invenire λB; et data figura invenire curvam homogeneam seu data $\lambda\gamma$ invenire λB.

Ut per trochoeides solvi possint problemata methodi tangentium inversae, necesse est sine ulla abscissa ex sola ordinata caeteras Trianguli characteristici haberi nempe λB.

Quaerenda est methodus quaedam data figura quaerendi curvam homogeneam licet non analyticam, nam de Analytica res succedere generaliter non potest.

10 non *(1)* Geometricam, nam de Geometrica *(2)* analyticam *L*

20. DE TRIANGULO CURVARUM CHARACTERISTICO
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 20 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. Datum u. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 891

Jan. 1675.

De Triangulo Curvarum characteristico

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ TDL et GWL similia

(1) $TD \frown WL \sqcap DL \frown GW$, sive productae, in partes basis aequantur ordinatis in partes axis, seu ordinatarum summae id est ipsi figurae. Adde 21.

(2) $TD \frown GL \sqcap TL \frown GW$. seu summa Tangentium aequatur productis ad curvam. Adde 16.

(3) $DL \frown GL \sqcap TL \frown WL$. seu Tangentes ad basin (vel axem reciprocum. Directus AD reciprocus AE) aequantur momento curvae ex axe.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ LDM, GWL similia:

(4) $DL \frown WL \sqcap DM \frown GW$. Ergo summa omnium reductarum ipsius DL semiquadrato.

(5) $DL \frown GL \sqcap ML \frown GW$. seu summa omnium perpendicularium ad curvam ex axe aequatur momento curvae ex axe.

---

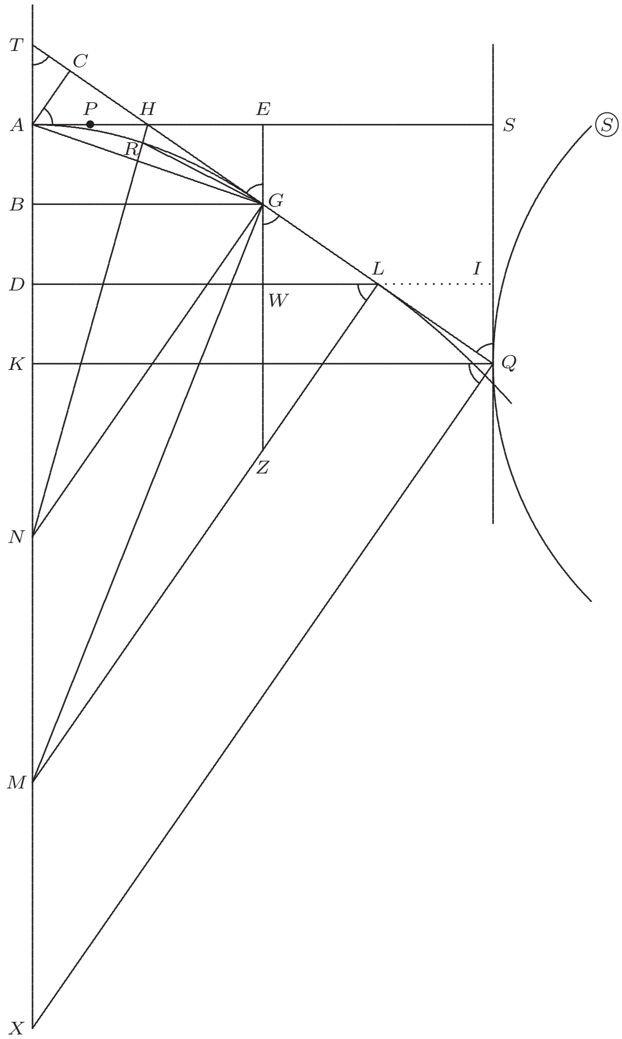
6 *Darunter:* Pleraque ista jam biennio abhinc a me deprehensa, hic breviter recolui; sub finem exemplum de crementorum Conicae momentis ex data Conicae quadratura.

15 f. *Hinter* semiquadrato: NB.

7 ob ... similia *erg. L* 8 sive *(1)* tangentes *(2)* productae *L* 9 adde 21. *erg. L* 11 adde 16. *erg. L* 17 f. ad ... axe *erg. L* 18 momento | figurae *ändert Hrsg.* | ex axe. | adde 19. *erg., streicht Hrsg.* | *L*

---

6 biennio abhinc: vgl. VII, 4 N. **[noch]**. 6 sub finem: s. u. die Sätze (27) – (31) S. 163 Z. 23 bis S. 165 Z. 7.



[*Fig. 1*]

C o r o l l a r. Hinc sequitur ex hac et 3, esse: $TL \frown WL \sqcap ML \frown GW$. Tangentes ad basin aequari summae perpendicularium scilicet ad axem.

(6) $DM \frown GL \sqcap ML \frown WL$ seu reductae ad curvam perpendicularibus ad basin.

2 |(6) *gestr.*| C o r o l l a r. *L* 3 f. axem. *(1)* (7) *(2)* (6) *L* 4 seu *(1)* perpendiculares *(2)* reductae *L* 4 ad *(1)* axem *(2)* basin *L*

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia ACH, GWL

(8) $AC \frown WL \sqcap CH \frown GW$. Summa omnium $CH \sqcap$ omnibus AC. ad basin.

(9) $AC \frown GL \sqcap AH \frown GW$. seu summa resectarum aequatur duplo segmento AGA. quia summa omnium AC seu occurrentium, ad curvam aequatur dicto duplo segmento. Adde 11. et 14.

(10) $CH \frown GL \sqcap AH \frown WL$. seu occurrentes ad curvam, resectis ad basin.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia TAH, GWL

(11) $TA \frown WL \sqcap AH \frown GW$. seu summa omnium TA ad basin seu axem reciprocum, aequatur duplo figurae segmento. Quod idem etiam ex 1. demonstrari potest, nam quia omnes TD ad basin aequantur figurae convexo, et quoniam si a figurae convexo auferas omnes AD ad basin seu figurae concavum restat duplum figurae segmentum, patet residuorum TA summam ad basin aequari duplo figurae segmento, unde etiam 9. demonstrari posset. Adde 14.

(12) $TA \frown GL \sqcap TH \frown GW$.

(13) $AH \frown GL \sqcap TH \frown WL$.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia GEH, GWL

(14) $GE \frown WL \sqcap EH \frown GW$. Omnes EG ad basin, aequantur summae omnium EH ad axem, unde cum constet EG ad basin complere figurae concavum, vel ut generalius loquamur s u p p l e m e n t u m ; sequitur etiam EH ad axem, eidem aequari, quod et ex prioribus, nempe 9. et 11. patet.

(15) $GE \frown GL \sqcap HG \frown GW$. seu summa omnium HG aequatur momento figurae ex vertice. Ut generalius loquamur, dicendum non ex vertice, sed axe reciproco. Potest enim fieri ut curva non perveniat ad AE.

(16) $HE \frown GL \sqcap GH \frown WL$. coincidit cum 2.

Sit in ipsa AH, medium punctum P, sequitur Theorema mirabile,

4 seu occurrentium, *erg. L* 5 adde ... 14 *erg. L* 6 seu *(1)* curva *(2)* CH *(3)* occurrentes *L* 9 ex *(1)* junctis *(2)* 1. *L* 13 adde 14. *erg. L* 15 f. $\sqcap$ TH $\frown$ WL *(1)* Sit in ipsa AH medium punctum P. *(2)* ob *L* 17 $\sqcap$ EH $\frown$ GW. *(1)* summa omnium EG ad basin, aeqvatur *(2)* Omnes *L* 19 ad *(1)* basin *(2)* axem *L*

2 (8): Zählung springt. 6 occurrentes: Gemeint sind vielmehr die Tangentenabschnitte CH.

(17) summam omnium PE aequari Triangulo ABG. Nam si a summa omnium AE seu figura $ABGA$ auferatur summa omnium AP seu segmentum simplex AGA. restabit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ABG.

Portiones Tangentium infinite parvae seu latera curvae ponantur esse RG, GL etc. Sint N, M puncta ubi perpendiculares ad curvam axi occurrunt. Patet figuram totam $AMLGRA$. conflari ex omnibus Triangulis RNG, GML quorum vertices in axe[,] bases in curva; et ex omnibus Triangulis NGM etc. quorum vertices in curva[,] bases in axi. Jam

(18) summa omnium Triangulorum GNM, aequatur ordinatis in incrementa Reductarum dimidiatis seu $\dfrac{GB \frown NM}{2}$.

(19) Summa $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ RNG. aequatur dimidiis perpendicularibus in curvam.

(20) Hinc omnes $\dfrac{GB \frown NM}{2}$ aequantur spatio $AMLGRA$, demtis dictis dimidiis. Adde 26.

Sit recta SQ. ipsi ADK parallela; erit recta $KQ \sqcap a$. semper eadem. Porro $\bigtriangledown^{\text{la}}$ TKQ, GWL similia, hinc:

(21) $TK \frown WL \sqcap a \frown GW$. Semper ergo NB. habentur TK ad basin, et aequantur rectae constantis in abscissam facto. Unde et IQ, in basin WL, aequantur spatio inter curvam, et SI. Quod coincidit cum 1.

(22) $TK \frown GL \sqcap TQ \frown GW$.

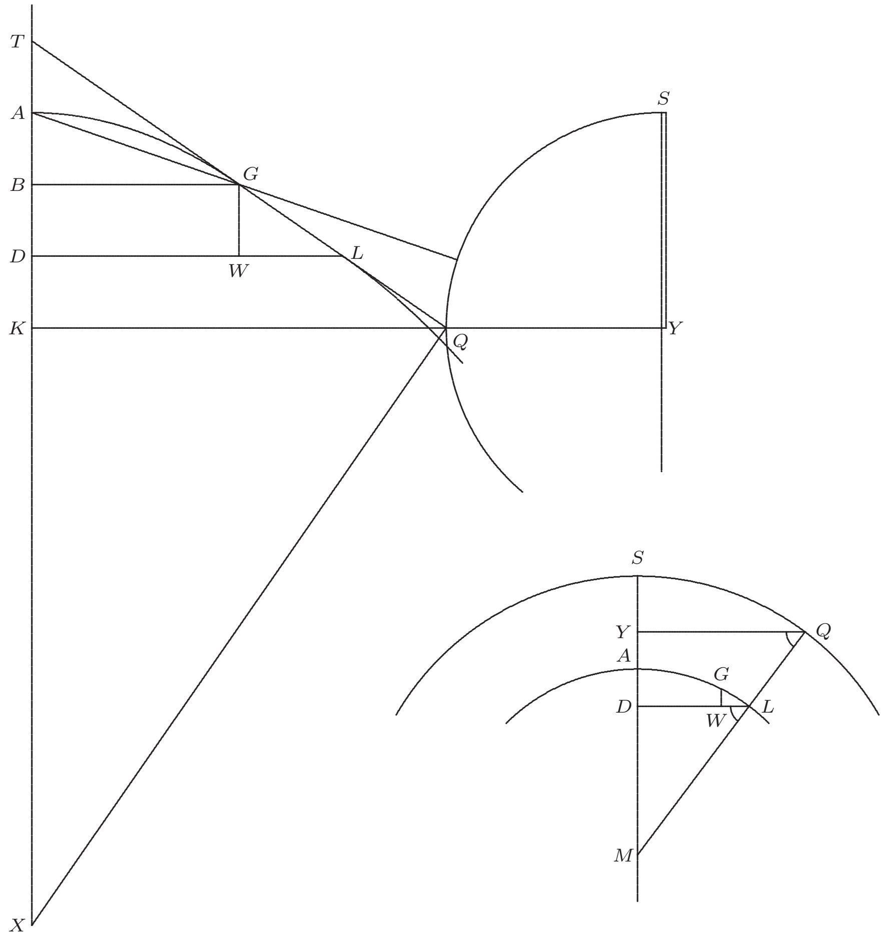
(23) $KQ\,(\sqcap a) \frown GL \sqcap TQ \frown WL$. Hinc summa omnium TQ. aeq. rectangulo sub curva et a.

Si ducatur QX perpendicularis ad TQ ob Triangula QKX et GWL similia, fiet

4 f. etc. *(1)* sit N punctum ubi perpendicularis ad curvam occurrit *(2)* Sint *L* 11 f. dimidiis *(1)* productis in *(2)* perpendicularibus ... curvam | *(a)*, seu dimidio curvae momento ex axe. vide 5. *(b)* demtis ⟨—⟩ in perpendiculares *gestr.* | (20) *L* 12 aeqvantur *(1)* dimidio curvae momento ex axe *(2)* spatio AMLGRA, *(a)* demto dimidio curvae momento ex axe *(b)* demtis *L* 13 adde 26. *erg. L* 19 f. TK $\frown$ GL $\sqcap$ | DL $\frown$ G. *ändert Hrsg.* | (23) *L* 20 $\sqcap$ TQ $\frown$ | GW. *ändert Hrsg.* | Hinc *L*

9 (18): Die folgende Aussage gilt für die NM, die Zuwächse der Subnormalen sind aber gleich $NM - GW$. Das Versehen wirkt sich auf Satz (26) aus.

(24) (KQ sive) $a, \frown WL \sqcap KX \frown GW$. Habetur ergo summa omnium KX, quae semper aequabitur rectangulo $DL \frown a$. Sunt enim KX ipsis crementis seu WL homogenea.



[*Fig. 2*] [*Fig. 3*]

(25) Sit ipsa SQ non recta sed alia quaelibet linea v. g. Circularis. Idem dicendum est

quod propositionibus 21. 22. 23. 24. nisi quod KQ. non est constans. Ideo nec $TQ \frown WL$, habetur nec $KX \frown GW$. Pone Circuli diametrum ipsi TX parallelam vel alterius curvae directricem SY. erit summa omnium KY, semper earundem seu rectangulum sub $KY \sqcap a$, et $AD \sqcap$ omnibus TK in WL. Hinc curvarum quarundam ex se invicem derivari possunt dimensiones, et rursus aperitur ratiocinandi campus; sed et eodem modo non tangentes, sed perpendiculares ad certam quandam lineam constantem rectam curvamve produci intelligi possunt, quae materia adhuc examinanda restat.

Usui inprimis haec inquisitio esse potest, cum portiones axis SY, semper aequales seu cum SY ipsi AD proportionaliter dividitur, quod intelligi inprimis potest in figuris similibus et similiter positis. Imo vereor ut eae semper proportionaliter dividantur, quod forte non nisi in circulis concentricis locum habet.

Huc adde cum curva una ad tangentem alterius angulum facit datum vel dato modo crescentem.

(26) Manifestum est ex dictis, spatium $AMLA \sqcap$ omn $GML +$ omn NGM. Vide 18. 19. 20. Jam omn $NGM \sqcap$ omn $\dfrac{GB \frown MN}{2}$. et $GML \sqcap \dfrac{GB \frown GZ}{2}$; et $GZ \sqcap GW + \dfrac{WL^2}{GW}$: et $AMLA \sqcap$ omn $GB \frown GW + \bigtriangledown LDM$. Ergo fiet:

$$\text{omn } GB \frown GW + \bigtriangledown LDM \sqcap \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} + \text{omn } \frac{GB \frown GW}{2}, + \text{omn } \frac{GB \frown WL^2}{2\,GW}$$

sive auferendo utrobique $GB \frown GW$, fiet:

$$+\bigtriangledown LDM \sqcap + \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} - \text{omn } GB \frown \frac{GW}{2}, + \text{omn } GB \frown \frac{WL^2}{2\,GW}.$$

Patet ergo quadraturam figurae ex his tribus compositae semper haberi. Unde sequitur si ex his tribus habeatur una haberi et compositam ex caeteris, si habeantur duae etiam tertiam haberi.

(27) In Conicis ipsa MN est constans, posito GW esse constantem; sive GW ad MN certam semper constantemque habet rationem, unde sequitur in Conicis

1 f. nec | KQ $\frown$ GW, *ändert Hrsg.* | habetur *L* 2 pone *(1)* centrum *(2)* Circuli *L* 7 intelligi | potest *ändert Hrsg.* |, qvae *L* 8 axis SY, *(1)* portionibus *(2)* semper *L* 18 utrobique | $\dfrac{\text{GB} \frown \text{GW}}{2}$ *ändert Hrsg.* |, fiet *L* 21 et *(1)* summam, vel *(2)* compositam *L*

19 $+\bigtriangledown LDM \sqcap$: Da Leibniz die MN statt der $MN - GW$ für die Zuwächse der Subnormalen hält (s. o. S. 161 Z. 9 f.), erkennt er nicht die mögliche Vereinfachung der rechten Seite der Gleichung.

$\dfrac{GB \frown WL^2}{GW}$ p e n d e r e e x q u a d r a t u r a f i g u r a e.

(28) In omni figura $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW}$ dupliciter concipi possunt, vel sumendo GW constantem, vel sumendo WL constantem. Itaque sic dici potest: Crementorum quadrata ducta in figuram, aequantur momento ex initio, figurae crementorum contrariorum (ad alteram directricem) reciprocae.

(29) Hinc sequitur in Conicis tam crementorum quadrata seu momenta ex axe ducta in figuram, quam momentorum momenta ex principio, figurae crementorum contrariorum reciprocae haberi posse: supposita Conicae Quadratura.

(30) Operae pretium est in eam rem calculo uti. Generalis est conicae proprietas: $2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ ponendo $x \sqcap AB$ et $y \sqcap BG$. Ponatur $BT \sqcap t$. $GW \sqcap \beta$. Unde $2at \ddagger \dfrac{2a}{q}xt \sqcap 2y^2$, sive $t \sqcap \dfrac{y^2}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x}, \sqcap \dfrac{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{ax}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x} + x$. Est autem $WL \sqcap$

$$\frac{\beta,, \frown \dfrac{ax}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x} + x \sqcap \dfrac{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x}\beta}{\sqrt{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}}.$$

adeoque $WL \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}}{a \ddagger \dfrac{a}{q}x}$. Ergo $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap$

$$\frac{\beta\sqrt{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2} \frown 2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}{a^2 \ddagger \dfrac{2a^2}{q}x + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}.$$

C u j u s d i m e n s i o e x i p s i u s C o n i c a e s e c t i o n i s d i m e n s i o n e p e n d e t.

2 figura *(1)* $\dfrac{\mathrm{GB} \frown \mathrm{WL}^2}{\mathrm{GW}}$ aeqvatur *(2)* | omnes *erg. u. gestr.* | $\dfrac{\mathrm{GB} \frown \mathrm{WL}^2}{\mathrm{GW}}$ *L* 4 momento *(1)* crementorum contrariorum *(2)* ex *L* 6 seu ... axe *erg. L* 7 momentorum *(1)* crementorum *(2)* momenta *L* 9 in ... rem *erg. L* 10 GW $\sqcap$ β *erg. L* 13 $\dfrac{\beta\sqrt{2\mathrm{ax} \ddagger \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2} \frown 2\mathrm{ax} \ddagger \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2 \ddagger \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}}\mathrm{x} + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{x}^2}$ *(1)* Data ergo *(2)* Ergo in sect *(3)* Ergo ex data sectione Conica haberi potest figura, Cubis *(4)* C u i u s *L*

11 $WL \sqcap$: Leibniz berechnet auf der rechten Seite $\dfrac{\beta t}{y}$ statt $\dfrac{\beta y}{t}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 13, wirkt sich aber nicht auf die Schlussfolgerung aus.

(31) Ponamus jam contra directricem esse non AD, sed AE, constantem WL, quam vocabimus λ. Crementum ordinatarum EG, esse GW; ipsam $EH \sqcap l$. primum investigemus hoc modo: $2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2 \sqcap 2yl$. sive $l \sqcap \dfrac{ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \dfrac{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 - ax}{y}$ sive $\dfrac{y^2 - ax}{y}$. Jam ut x inveniatur, erit $x^2 \ddagger \frac{2q\cancel{a}}{\cancel{a}}x + q^2 \sqcap q^2 \ddagger y^2$, adeoque fiet $\mp x \mp q \sqcap \sqrt{,}\, q^2 \mp y^2$, et $x \sqcap \pm q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}$ adeoque $l \sqcap \dfrac{y^2 \mp qa \pm a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y} \sqcap EH$. Ergo GW erit $\sqcap \dfrac{\lambda,, \frown y^2 \mp qa \pm a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y,, \frown \pm q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}$; et $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap \dfrac{y \frown \lambda^{\cancel{2}}, \frown y, \frown \pm q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}{\cancel{\lambda},, \frown y^2 \mp qa \pm a\sqrt{q^2 \mp y^2}}$, cujus seriei itidem habetur summa, ex datis omnibus $\sqrt{q^2 \mp y^2}$.

Quae theoremata vel ideo annotanda duxi, quod semel elapsa non facile rursus in mentem venirent, et non nisi per multas ambages deprehensa sint. Et haec quidem de Trianguli characteristici usu ad dimensiones curvilineorum nunc sufficiant.

---

4 *Nebenbetrachtung zu* $\mp x \mp q$:

$$\begin{array}{c} + \ x \ + \ q \\ \boxed{- \ x \ - \ q} \\ + \ x \ - \ q \\ - \ x \ + \ q \end{array}$$

2 vocavimus *L ändert Hrsg.* 6 f. cuius *(1)* figurae *(2)* seriei *L*

---

4 $\sqcap q^2 \ddagger y^2$: Richtig wäre $q^2 \ddagger \frac{q}{a}y^2$; bei der Berechnung von GW kommt ein weiteres Versehen hinzu. Die Rechenfehler beeinträchtigen die Schlussfolgerung nicht.

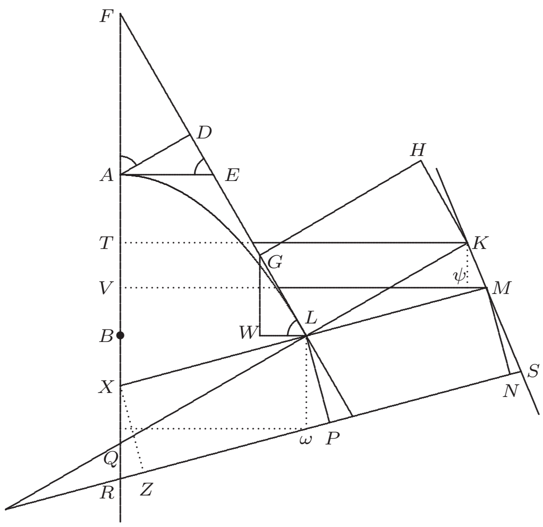
21. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM
11. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca. 20 x 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca. 17,5 x 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca. 19,5 x 4 cm. 1. S. auf Bl. 409 v°. Am Ende von Teil 3 Textverlust durch Zerschneiden. Überschrift ergänzt. — Auf dem Rest des Trägers Cc 2, Nr. 1069 u. 1070 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 1068

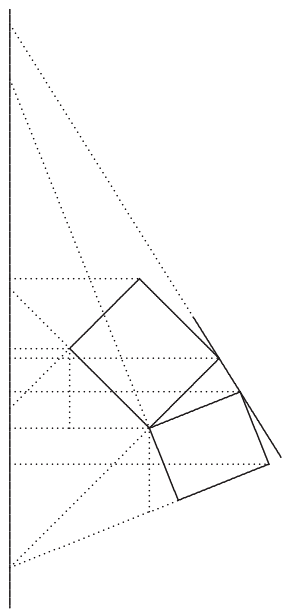
[*Teil 1*]

11. Octob. 1675

Triangulum Characteristicum

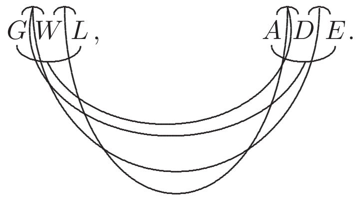


[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

10 *(1)* 21 *(2)* 11. *L*



Triangula similia NB. ita scribuntur, ut ab aequali angulo incipiens, inde ad rectum pergas. Quo facto poteris dicere GW ad WL ut AD ad DE; vel GL est ad AE, ut GW ad AD, etc. Sed reapse non nisi tres oriuntur aequationes, nempe $\dfrac{GW}{AD} \sqcap \dfrac{GL}{AE} \sqcap \dfrac{WL}{DE}$, sive si in rectangula reducas habebimus aequationes

$$GW, AE \sqcap GL, AD. \quad GW, DE \sqcap WL, AD. \quad GL, DE \sqcap WL, AE.$$

Id est rectangula sub duabus combinationibus subcontrariis punctorum duorum triangulorum similium, sibi aequantur; sive rectangula respondentia sub duabus combinationibus differentibus, duorum Triangulorum in se invicem, ductis, sibi invicem aequantur, sive combinatio unius trianguli ducta in combinationem differentem alterius Trianguli aequatur Combinationi respondenti alterius Trianguli, ductae in combinationem differenti respondentem Trianguli sui, ut $\genfrac{}{}{0pt}{}{GW \frown DE}{WL \frown AD}$. Ecce jam characteristicae quoddam genus in lineis

$$GW, FA \sqcap GL, FD. \quad GW, DA \sqcap WL, FD. \quad GL, DA \sqcap WL, FA.$$

Ergo summa omnium FA ad basin aequatur etiam segmento duplicato. Jam summa omnium AB ad basin semper aequatur complemento figurae. Ergo summa omnium FB ad basin semper aequatur ipsi figurae. Quod aliunde constat. Nota lineae rectae ipsis GL dupliciter applicari possunt ad angulos rectos, vel extra planum, superimponendo scilicet, ut constituant superficiem cujusdam ungulae vel in eodem plano, sed tunc spatium non replebunt, ut $GHKL$, $LMNP$.

Ut tamen aliquid inde ducamus; ponatur curva nova fieri producendo QLK perpendicularem curvae, ita ut LK sit aequalis rectae applicandae, ita RPN erit perpendicularis producta, et $PN \sqcap$ alii rectae ordine applicandae, habebitur curva nova transiens per

16 *Am Rande:* GWL, FDA

9 est *(1)* combinatio *(a)* ducta *(b)* unius trianguli ducta in differentem alterius Trianguli, aeqvatur *(2)* rectangula *(a)* combination *(b)* ex *(c)* sub *L* 10 aeqvantur; *(1)* sive combinatio unius Trianguli ducta in differentem combinationi *(2)* sive rectangula | respondentia *erg.* | sub *L* 19 aeqvatur *(1)* segmento *(2)* ipsi *L*

puncta KM. et recta KM juncta, erit curvae novae tangens; a qua curva, ut figurae curvilineae aream, (saltem ex data area, primae[)] investigemus, quaerenda est dimensio supplementorum, KLM, ad has non habemus opus nisi longitudine rectae KM. Quam ita inveniemus: Ex K et M. demittantur in rectam AB perpendiculares KT, MV. et KT quidem habetur, quia KL et LQ, et Triangulum KTQ, $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ LBQ simile est. Ut vero inveniamus VM. producatur ML. dum occurrat ipsi AB in X. Est autem MX parallela NR. Ex X in RN demittatur perpendicularis XZ, aequalis et parallela LP, vel MN datis, Eodem modo ex L in PR demittatur perpendicularis $L\omega$. Datur Triangulum $L\omega P$ positione et calculo, at triangulum XZR. $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ $L\omega P$ simile est, et datur Trianguli XZR unum latus. Ergo dabuntur et reliqua. Dabitur ergo et recta RZ, qua differt RP data ab LX. quaesita. Habebitur ergo LX, ergo MX. Ergo habebitur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LBX. Ergo et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ei simile MVX, cujus unum latus habetur nempe MX. Ergo habebuntur et caetera; et inter ipsa et MV. Habemus ergo MV. Inventa MV, et antea TK, scilicet calculo, habebitur differentia inter KT et VM. id est $M\psi$. si scilicet $K\psi$ sit normalis ad $V\psi M$. Datur autem TV, calculo, quod sic ostendo[:] Datur AQ, datur et TB. ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KTQ, et datum LBQ similia datumque latus KQ prioris habebuntur et caetera, ergo et TQ. Ergo et ejus differentia a BQ, nempe TB. Eodem modo ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MVX et LBX data habebitur et differentia laterum VX, BX[,] ergo VB, ergo differentia inter TB, VB, nempe TV. sive $K\psi$. Ex datis autem $K\psi$ et ψM, habetur KM ob angulum $K\psi M$ rectum. Habentur ergo tandem magnitudine omnia latera $\bigtriangledown^{\text{li}}$ KLM adeoque et area. Adeoque figura exhiberi poterit summae arearum homogenea.

Patet ex hoc specimine quam difficile saepe sit quae magnitudine jam data sunt, etiam calculo data habere, et contra, hinc aestimari potest quam saepe difficile sit magnitudine sive calculo data, efficere etiam positione data. Cum de quadraturis quaeritur,

---

16 *Am Rande:* $a^2 \sqcap xy$

1 tangens; *(1)* | cuius *streicht Hrsg.* | *(a)* curvae *(b)* figur *(2)* a qva *L* 5 et | LR *ändert Hrsg.* |, et *L* 7 parallela NR *(1)*, et LX ⊓ RP. datur autem RP calculo, ergo et RX. datur ergo et MX et ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MVX, LBX. habebitur et MV *(2)*. Ex *L* 20 rectum. *(1)* habetur *(2)* Habentur *(a)* omnia *(b)* ergo tandem | magnitudine *erg.* | omnia *L*

---

8 perpendicularis $L\omega$: gemeint ist das Lot von ω auf WL.

necesse est quantitates magnitudine sive calculo datas haberi, ut inde inveniatur series progressionis de qua quaeritur.

[*Teil 2*]

Inveni alio schediasmate 19. Jun. 1675. curvae Ellipseos dimensionem reduci ad dimensionem spatii curvilinei cujus ordinata valet, $\sqrt{\begin{array}{l}+1\\ -\frac{a}{b}\end{array} + \dfrac{a^2}{2ax - \frac{a}{b}x^2}} \sqcap z$. Fiet:

$\begin{array}{l}+1\\ -\frac{a}{b}\end{array} + \dfrac{a^2}{2ax - \frac{a}{b}x^2} \sqcap z^2$. Poterit et pro $2ax - \dfrac{a}{b}x^2$, scribi: $a^2 - \dfrac{a^2}{b^2}y^2$, porro faciamus $1 \sqcap \dfrac{a}{b}$. et pro $z \sqcap \omega \ddagger \sqrt{\begin{array}{l}+1\\ -\frac{a}{b}\end{array}}$. fiet: $\boxed{\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{b}\end{array}} + \dfrac{a^2}{a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2} \sqcap \dfrac{\omega^2 \ddagger 2\sqrt{\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{b}\end{array}}\,\omega}{1}\ \boxed{\begin{array}{r}+1\\ -\frac{a}{b}\end{array}}$ et fiet:

$\dfrac{a^2}{b^2}y^2 \sqcap a^2 - \dfrac{a^2}{\omega^2 \ddagger 2\sqrt{\left.\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{b}\end{array}\right\}}\ \omega}$. Unde patet sive y, sive ω pro abscissa ordinatave sumas eandem fere aequationis formam prodire. Nam si $\ddagger$ est $-$ et $\sqrt{1 - \dfrac{a}{b}} \sqcap \omega$ erit utraque forma utrobique $a^2 \sqcap a^2\omega^2 \ddagger 2a^2 \sqrt{\left.\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{b}\end{array}\right\}}\ \omega - \dfrac{a^2}{b^2}y^2\omega^2 \ddagger 2\dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\left.\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{b}\end{array}\right\}}\ \omega y^2$, ut habeatur tangens, scribe

5 dimensionem *(1)* curvae cuius *(2)* spatii *L*

---

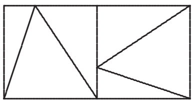
4 alio schediasmate: Nicht gefunden.

$$2\frac{a^2}{b^2}\omega^2\, y\, l \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\;\omega l \sqcap 2a^2\;\omega^2 \mp 2a^2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\Bigg\}\;\omega\;\boxed{-2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\Bigg\}\;\omega a^2}$$

$$\odot -\frac{a^2}{b^2} \qquad \odot \mp 2\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{\omega^2 \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\;\omega}}$$

[*Teil 3*]



[*Fig. 3*]

Quadrato $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ aequilaterum inscribere, etc. problema, quod non nisi semel in $\square^{\text{to}}$ fieri potest; et tamen aequatio habebit duas radices, et altera est pro alio quadrato contrario modo sumta.

[*Fig. 4*]

Rectam datam segmento circuli ad angulos rectos inserere, ut simul et basin et curvam attingat, hoc duobus modis fieri potest, ut patet, ob circuli uniformitatem a duabus partibus. Idem in Ellipsi. Exemplum naturale duorum ⟨— — —⟩

---

1 *Nebenrechnung:* $-2\frac{a^2}{b^2}\omega^{\cancel{2}} \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\;\cancel{\omega} \frown \dfrac{-a^2}{\omega^{\cancel{2}} \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\;\cancel{\omega}}$

7 *Dahinter:* ♌

---

1 $2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 yl$: Die Tangentenrechnung ist mit Flüchtigkeitsfehlern behaftet und wird nicht vollständig durchgeführt.

22. METHODI TANGENTIUM DIRECTAE COMPENDIUM

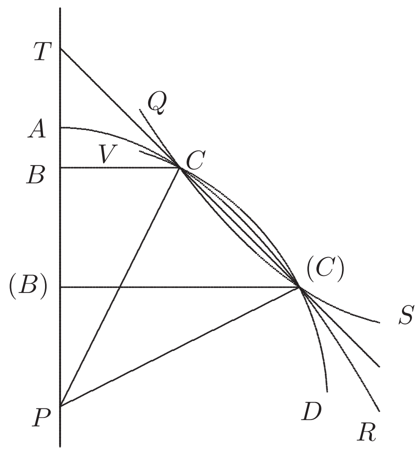
22. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 1 r°, 7 Z. auf Bl. 1 v°. Das Blatt hing ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 2 Bl. 119 (gedr. VII, 3 N. 51). Datum und Überschrift ergänzt. — Gedr. (unter Verschmelzung von Fig. 1 und 2): 1. Gerhardt, *Differentialrechnung*, 1848, S. 46–48; 2. (engl. Übers. von 1.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 111–114.
Cc 2, Nr. 1125

22. Nov. 1675.

Methodi tangentium directae compendium calculi, dum jam inventis aliarum curvarum tangentibus utimur. Quaedam et de inversa methodo.

Sub fin. pag. 21. Nov. notavi quae in mentem venere circa tangentium methodum. Quae huc redit.

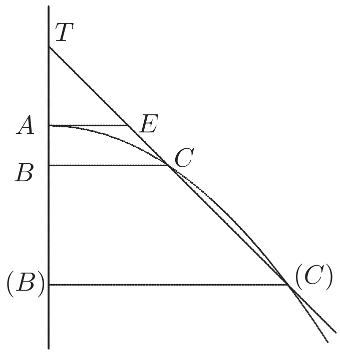


[*Fig. 1*]

---

13 notavi: **[noch; kein Stück mit Datum 21.11.; evtl. 11.11 Cc 1120; oder: Datum Cc 1125 falsch/geändert]**.

Sint duae lineae $ACCR$, et $QCCS$. se secantes in punctis uno duobus pluribusve C, C. Sit axis $AB(B)$, ordinatae $AB \sqcap x$ abscissae $BC \sqcap y$ Habebimus duas aequationes ad duas lineas, duarum unamquamque incognitarum capitalium. Quod si jam sint earum aequationum radices aequales, seu aequationes duos habeant valores aequales[,] lineae se tangent. Cartesius jam pro linea $QCCR$, elegit arcum circuli $VCCD$ cujus centrum P, ut PC sit minima quae a puncto P duci possit. Idem proveniet et saepe simplicius, si sumas non arcum circuli sed rectam TCC. tangentem, id est maximam quae ex puncto dato T duci potest ad Curvam.



[*Fig. 2*]

Sit $TA \sqcap b$. $AE \sqcap e$. quasi datae. AB, BC, quaesitae, aequationes duae, una ad curvam ACC, $ax^2 + cy^2 +$ etc. $\sqcap 0$. altera ad lineam rectam TCC, quae erit quod $\dfrac{TA}{AE} \sqcap \dfrac{TB}{BC}$. sive $\dfrac{b}{e} \sqcap \dfrac{b \mp x}{y}$ sive $\mp x \sqcap \dfrac{b}{e}\, y - b$, sive $y \sqcap \mp \dfrac{e}{b}\, x + e$. Ita valor alterutrius incognitarum semper haberi potest pure, adeoque statim sine exaltatione aequationis ad curvam propositam ACC, tolli potest, et statim habebitur aequatio ad unam incognitam, quam superest tantum, ut ad duas radices aequales determinemus. Et hoc sine dubio Slusianae methodi

1 duae *(1)* curvae *(2)* lineae *L* 2 C. *(1)* erunt d *(2)* sint *(3)* sit *L* 2 ⊓ x *erg. L* 2 ⊓ y *erg. L* 3 duas *(1)* curvas, *(2)* lineas *L* 10 TA ⊓ *(1)* e AF ⊓ b *(2)* b *L*

5 Cartesius: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–48, insbesondere S. 43–45. 5 *QCCR*: Es müsste *QCCS* oder *ACCR* heißen. 9 *Fig. 2*: Eine verworfene Vorstufe wird nicht wiedergegeben. 15 Slusianae methodi: vgl. R. F. Sluses Beschreibung in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059).

principium est.

Si $VCCD$ adhibeatur arcus circuli centro P, cum Cartesio, tunc erit aequatio altera ad circulum haec: posito PC radio $\sqcap$ s. et $PB \sqcap v - x$ fiet: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx.$
x^2

Ex hoc patet nobis electionem esse aut circuli aut lineae rectae; et cum in aequatione curvae datae extat sola quadratica potestas ipsius y, ut in conicis semper fieri potest, tunc utilius adhiberi aequationem ad circulum, ita enim ope duorum ipsius y^2 valorum statim tolletur incognita x, at pro omnibus aequationibus ad curvas rationali aequatione expressas, utilius methodus ad rectam.

Hinc jam pergo et dico posse non tantum rectam et circulum, sed et quamlibet Curvam pro arbitrio assumi, modo notus sit modus ducendi tangentes ad assumtam, ita enim ejus ope inveniri possunt tangentes ad datam. Hoc jam usus habebit praeclaros tum ad calculos evitandos aut contrahendos, tum ad demonstrationes et constructiones Geometricas elegantes; ita enim itur a curvis facilioribus ad difficiliores, et proposita aequatione ad unam curvam, semper eligi potest aequatio ad aliam curvam notarum tangentium, cujus ope facillime tollatur una incognitarum, ut si sit aequatio data $hy^2 + y^3 \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f$. ad curvam cujus quaeruntur tangentes sumatur curva cujus aequatio: $hy^2 + y^3 \sqcap gx + q$. cujus jam datur tangens, tollendo y fiet aequatio talis: $gx + q \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f$. Quae determinabitur ad duas radices aequales vel Cartesiana methodo per comparationes, vel Huddeniana per arithmeticam progressionem. Atque ita tollendo x, invenietur valor ipsius g vel q. et una ex his duabus literis g. vel q. pro arbitrio sumi potest: Habebitur ergo modus describendi curvam illam alteram quae datam tangat; ea jam descripta, ad punctum quod ei cum curva proposita commune est, ducatur tangens, quam notam supponimus, ea tangens etiam ipsam curvam propositam tanget. Et credo generaliter hoc modo calculare licebit sumendo semper curvam aliam ut hoc loco fecimus quae unam incognitam plane tollat, hinc credo calculum elegantem

7 aeqvationibus *(1)* rationalibus *(2)* ad *L* 11 possunt *(1)* aeqvationes *(2)* tangentes *L* 13 et *(1)* data *(2)* proposita *L* 15 tangentium, *(1)* in qva *(2)* cuius *L* 16 sumatur *(1)* aeqvatio *(2)* curva *L* 20 et *(1)* uno sumto alterum *(2)* | unum *ändert Hrsg.* | ex *L* 24 Et *(1)* utile credo hoc *(2)* credo *L* 25 qvae *(1)* omnes *(2)* tot *(3)* unam *L*

2 cum Cartesio: vgl. Erl. zu S. 172 Z. 5. 18 Cartesiana: vgl. Erl. zu S. 172 Z. 5. 19 Huddeniana: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 436–439 u. S. 507–516.

derivabimus pro nova tangentium regula quae adhuc sit Slusiana melior, quae scilicet plane statim alterutram incognitam tollat, quod non facit Slusiana.

Haec jam generalissima a⟨m⟩plissimaque facultas sumendi curvam aliquam pro arbitrio, facit, ut prope credam hinc aliquid ad m e t h o d u m t a n g e n t i u m i n v e r s a m et quadraturas duci posse. Nimirum data sit quaedam proprietas tangentium curvae cujus ordinatarum ad abscissas relatio quaeritur. Inde deduci poterit aequatio, in qua erunt incognitae capitales $x.\,y.$ et incidentes semper duae, v. g. $s.$ et $v.$ vel b et $e.$ et similes. Opus jam aequatione proprietatem tangentium continente, per quam $s.$ et $v.$ relationem ad tangentes habere exprimatur. Sumatur in eam rem quaelibet nova curva pro arbitrio, et $s.$ atque v, etiam ad ejus tangentes quandam nobis notam habebunt relationem. Ope jam hujus novae aequationis pro arbitrio assumtae, poterimus datam ad tangentes pro curva quaesita pro lubitu nostro mutare, nempe alterutram incognitarum pro lubitu tollendo; et rem in eum statum deducendo, ut facilius appareat calculus inversus. Res eo redit, ergo, ut datis tangentium figurae quaesitae proprietatibus examinemus quas eaedem tangentes habeant relationes ad alterius figurae quae pro data sumitur ordinatas aut tangentes. Hoc etiam serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricationis.

4 f. *Am Rande:* NB.

5 sit *(1)* aeqvatio qvaedam *(2)* qvaedam *L* 6 ordinatarum *(1)* proprietas *(2)* ad *L* 10 tangentes *(1)* eandem habe *(2)* qvandam *L* 11 assumtae, *(1)* cum eius poterimus tollere *(2)* poterimus *L* 12 pro … qvaesita *erg. L*

23. DIFFERENTIAE SEU ELEMENTA FIGURARUM
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 b Bl. 136–137. Rest eines Bog. 2°. Von Bl. 137 fehlt oben ein Ausschnitt von ca. 17 x 10 cm, unten von ca. 17 x 4 cm. 2 2/3 S. Textfolge Bl. 136 r°, 137 v°, 136 v°. Bl. 137 r° leer. Überschriften von Teil 1 und 2 ergänzt.
Cc 2, Nr. 1280 A–C

Datierungsgründe: **[noch]**

[*Teil 1*]

D i f f e r e n t i a e s e u e l e m e n t a f i g u r a r u m u b i e t d e l o c i s a d s u p e r f i c i e m

$\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{x+\beta}$, vel $\dfrac{a^2x + a^2\beta - a^2x}{x^2 + x\beta}$ vel $\dfrac{a^2}{x^2}$. differentia applicatarum Hyperbolae.

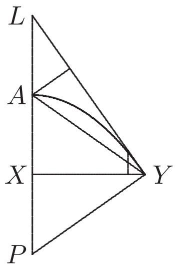
Jam $1 + \dfrac{a^4}{x^4}$ facit $\dfrac{x^4 + a^4}{x^4}$. Ideoque latus infinite parvum Polygoni infinitanguli Hyperbolici $\dfrac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2} \sqcap \dfrac{y}{a}$, quaeritur summa omnium y. Ea enim data, datur et dimensio Curvae Hyperbolicae. Fiet $a\sqrt{x^4 + a^4} \sqcap yx^2$ aequatio Figurae quae curvae Hyperbolicae homogenea est, unde fit $a^2x^4 + a^6 \sqcap y^2x^4$, divisis omnibus per x^4, habebimus $a^2 + \dfrac{a^6}{x^4} \sqcap y^2$,

---

12 *Nebenbetrachtung zur Stufe (1) der Variante, nicht gestrichen:* $a^4 \sqcap x^2y^2 - x^2a^2$. Ergo $y^2 \sqcap \dfrac{a^4 + a^2x^2}{x^2}$.

9 f. f i g u r a r u m *(1)* adde de loci *(2)* u b i *L* 12 $\dfrac{\mathrm{x}^4 + \mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^4}$ |, vel *streicht Hrsg.* *(1)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2}}{\mathrm{x}^2}$ *(2)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^4 + \mathrm{a}^4}}{\mathrm{x}^2}$ *gestr.* | Ideoque *L* 13 et *(1)* qvadratura *(2)* dimensio *L* 14 $\sqcap \mathrm{yx}^2$ *(1)* locus Curvae Hyperbol *(2)* aeqvatio *L*

vel $\sqrt{\sqrt{y^2 - a^2}} \sqcap \dfrac{a^2 \sqrt{\sqrt{a}}}{x}$. Ergo $x \sqcap a^2 \sqrt{\sqrt{\dfrac{a}{y^2 - a^2}}}$. Porro datur summa omnium y^2. Summa autem omnium x^2 facit $a^4 \sqrt{\dfrac{a}{y^2 - a^2}}$ quae quantum judico nondum datur.



[*Fig. 1*]

$[a \frown\ ] \sqrt{1 + \dfrac{a^4}{x^4}} \sqcap y = XY$. Hujus figurae ut quaeratur quadratura, investiganda Tangens nempe $a^2 + \dfrac{a^6}{x^4} - a^2 - \dfrac{a^6}{x^4 \text{ etc.}}$ fiet $\dfrac{4x^3a^6}{2x^8} \sqcap \dfrac{2a^6}{x^5}$. Reducta $= XP$ inter quam et productam est media proportionalis y, ita ut sit $\dfrac{a^2 + \dfrac{a^6}{x^4}, \frown x^5}{2a^6} \sqcap \dfrac{a^2x^5 + a^6x}{2a^6} \sqcap LX$.

Si reductarum summa alia methodo investigetur redibit y^2. Quaesivimus differentias ordinatarum Hyperbolae ad Asympt. Quaeramus et ad axem.

---

4 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x^2 + 2\beta x & + \beta^2 & \\
 & & x^2 + 2\beta x & + \beta^2 & \\
\hline
x^4 & 2\beta x^3 & 1\beta^2 x^2 & 2\beta^3 x + \beta^4 & \\
 & 2 & 4 & 2 & \\
 & & 1 & & \\
\hline
x^4 & 4\beta x^3 & 6\beta^2 x^2 & 4\beta^3 x & \beta^4
\end{array}$$

2 Summa . . . qvantum *erg. L*

---

1 $\dfrac{a^2 \sqrt{\sqrt{a}}}{x}$: Richtig wäre $\dfrac{a\sqrt{a}}{x}$; Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter, die Überlegung wird dadurch nicht grundsätzlich beeinträchtigt. 4 $a^2 + \dfrac{a^6}{x^4}$: Leibniz berechnet die Subnormale XP als halbe Differenz der y^2. 7 *Fig. 1*: Die Kurve AY entspricht nicht der im Text gegebenen Gleichung.

Aliter quaeramus $-\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2}=z$ fiet
$2a^2+2x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}-\sqrt{a^2+x^2,\frown a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}},\sqcap z^2$ et
$3\cancel{4}a^4+6\cancel{8}a^2x^2+8a^2\beta x+3\cancel{4}x^4+6\cancel{8}\beta x^3+4\beta^2x^2-2a^2z^2-2x^2z^2-2\beta xz^2\sqcap a^2+x^2\frown a^2+x^2+2\beta x\,[\sqcap]\,\cancel{a^4}\,[+]\,\cancel{2a^2x^2}+\cancel{2\beta a^2x}+\cancel{x^4}+\cancel{2\beta x^3}$
fiet $3a^4+6a^2x^2+3x^4-2a^2z^2-2x^2z^2\sqcap 0$. Unde $\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\sqcap z\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ seu $\sqrt{a^2+x^2}\sqcap z$ quae est Hyperbola.

---

5 *Nebenrechnungen zur Stufe (1) (bbb) der Variante, gestrichen:* $x\sqcap e-a.\quad a+x\sqcap e-a+a.\quad a-x\sqcap a-,e-a\sqcap 2a-e.$

1 $+\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2+2\beta\mathrm{x}+\beta^2}$ *(1)*, fiet 2βx vel 2x, differentia applicatarum Hyperbolae ad axem. Jam *(a)* $\mathrm{a}^2+4\mathrm{a}$ *(b)* addantur qvadrata a^2, et $4\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$ *(aa)* fiet $\sqrt{\mathrm{a}}$ *(bb)* fiet *(2)* $=$ z *L* 5 $\sqcap$ 0. *(1)* vel $\dfrac{\cancel{3}\mathrm{a}^4+2\cancel{6}\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2+\cancel{3}\mathrm{x}^4}{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}$ *(a)* $\sqcap\dfrac{4\mathrm{z}^2}{3}\sqcap{}^{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}}$ *(b)* $\sqcap\dfrac{\mathrm{a}^4+2\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^4}{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}\sqcap\dfrac{4\mathrm{z}^2}{3}$ *(aa)* $\sqcap$ z *(bb)* fiet $\mathrm{z}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqcap\dfrac{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}$, sive $\mathrm{z}\sqrt{\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}\sqcap\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2$ haec autem figura est Hyperbola Cubica, Unde et datur eius qvadratura. | Notabile *erg.* | $\mathrm{z}^2\dfrac{2}{3}\sqcap$ *(aaa)* $\dfrac{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2,\frown\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}+\mathrm{x},\frown\mathrm{a}-\mathrm{x}}$ *(aaaa)*, Ergo $\mathrm{z}^2\dfrac{2}{3}\sqcap\dfrac{\mathrm{a}}{-}$ *(bbbb)* $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{a}+\mathrm{x}\frown\mathrm{a}-\mathrm{x},\frown\mathrm{a}+\mathrm{x}\frown\mathrm{a}-\mathrm{x}}{}$ *(bbb)* $\dfrac{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2,\frown\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}\sqcap\dfrac{\mathrm{a}-\mathrm{x},\frown\mathrm{a}-\mathrm{x},,\frown\mathrm{a}+\mathrm{x}\frown\mathrm{a}+\mathrm{x}}{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}$, $\mathrm{a}+\mathrm{x}\sqcap\mathrm{e}$, fiet $\dfrac{\mathrm{e}^2\frown 4\mathrm{a}^2-4\mathrm{ae}+\mathrm{e}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{e}^2+2\mathrm{ea}-\mathrm{a}^2}=\dfrac{\mathrm{e}^2\frown 4\mathrm{a}^2-4\mathrm{ae}+\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+2\mathrm{ea}}\sqcap\dfrac{\mathrm{e}\frown 4\mathrm{a}^2-4\mathrm{ae}+\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+2\mathrm{a}}$ ponendo $\mathrm{e}+2\mathrm{a}\sqcap\mathrm{v}$. binomium tolletur ex divisore, faciliorque fiet reductio. *(aaaa)* $\mathrm{z}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqcap{}^{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}}$ *(bbbb)* $\dfrac{2\mathrm{z}}{\sqrt{3}}\sqcap\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^4+2\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^4}{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}}$ Huius ergo tam mirabilis figurae datur qvadratura, *(aaaaa)* etsi *(bbbbb)* est enim non nisi Hyperbola Cubica *(2)* Unde *L* 6–178,1 Hyperbola | Cubica sunt enim eius ordinatae, ut qvadrata ordinatarum Hyperbolae *gestr.* | Qvemadmodum *L*

---

1 fiet: In der folgenden Gleichung fehlt vor dem Wurzelausdruck der Faktor 2. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die Überlegung bis Z. 6.

Quemadmodum in Locis Linearibus investigandis quaeritur semper y, ita *in locis ad superficiem* investigandis sufficit inveniri y^2. Loca ad superficiem, in quibus duae tantum sunt incognitae sunt cylindrici vel conici locorum linearium. Cum tres sunt incognitae, aliquando fieri potest ut una tolli possit, tunc locus reducetur ad linearem. Investigandum qualis naturae sunt loca ad superficiem simplicissima, et an memorabiles quasdam habeant proprietates.

Loca linearia a superficialibus in eo magnopere differunt, quod area linearium componitur ex lineis, omnes autem lineae aeque latae, hinc longitudinis tantum ineunda computatio, at pro area locorum ad superficiem invenienda, etiam latitudo ordinatarum, id est planorum consideranda est. Quod ut fiat lineae investigandae, quae sunt ipsi solido homogeneae, sed eae lineae non erunt geometricae, si plana illa non sunt singula quadrabilia.

[*Teil 2*]

Differentia inter duas Hyperbolae ordinatas proximas

$$+\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}}-\sqrt{a^2+x^2},\sqcap\frac{z}{a}.\text{ Ergo}$$

$$\frac{z^2}{a^2}\sqcap\; 2a^2+2x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}\qquad -\;\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2},\frown a^2+x^2}$$

$- \;\; .. \;\; + \;\; .... \;\; \sqcap \;\; + \;\; .... \;$ Et quadrando:

$$+\cancel{\frac{z^4}{a^4}}-\cancel{4z^2}-\cancel{\frac{4z^2x^2}{a^2}}-\cancel{\frac{4z^2\beta x}{a^2}}+3\,\cancel{4}\,a^4+6\,\cancel{8}\,a^2x^2+6\,\cancel{8}\,\beta a^2x+3\,\cancel{4}\,x^4+6\,\cancel{8}\,\beta x^3+\cancel{4\beta^2x^2}\quad\sqcap$$

$$\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/$$

$$\cancel{a^4}+\cancel{2a^2x^2}+\cancel{2\beta xa^2}+\cancel{x^4}+\cancel{2\beta x^3}$$

$$/\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/\quad /\!/$$

Unde deletis aliis fiet $3a^4+6a^2x^2+3x^4 \sqcap 0$. Unde fieret $a \sqcap -x$. Quod est absurdum. Sed unde error?

3 sunt *(1)* Ungulae tantum cylindri vel coni planorum *(2)* cylindrici *L* 7 qvod *(1)* loca *(2)* ordinatae in a *(3)* area *L*

16 $\frac{z^2}{a^2}\sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Faktor 2 vor dem Wurzelausdruck. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Rechnung bis Z. 20. Leibniz stellt die Unstimmigkeit fest und merkt später zu S. 179 Z. 5 f. die Ursache an.

Si fecissemus $\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2} \sqcap \dfrac{z}{a}+\sqrt{a^2+x^2}$

habuissemus $\cancel{a^2}+\cancel{x^2}+2\beta x+\beta^2 \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}+\cancel{a^2}+\cancel{x^2}+\dfrac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}.$

Unde $2\cancel{\beta}x \sqcap \dfrac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}$. sive $\dfrac{a^2x^2}{z^2} \sqcap a^2+x^2$, vel $a^2x^2 \sqcap a^2z^2+z^2x^2$ vel $z \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hujus ergo datur quadratura.

Sed non possum satis mirari priore methodo ventum fuisse ad impossibile. Nec video qui possit id fieri si quis legibus calculi insistat.

Quaestio an idem sit locus differentiarum, ordinatarum ad eandem curvam, ex differentibus licet axibus, v. g. an idem sit locus differentiarum inter ordinatas Hyperbolae ad Asymptoton, et ad axem. Sane idem semper locus est progressioni curvae homogeneus undecunque sumatur. Ergo et idem locus quadratorum ejus, ut locus quadratorum ejus componitur ex loco quadratorum, differentiarum, et rectangulo, perpetuo rectanguli autem additio aut subtractio non mutat locum. Ergo idem est semper locus quadratorum, differentiarum ipsius curvae. Ergo et idem semper locus ipsarum differentiarum, modo scilicet quantitates quae calculum ingrediuntur omnes sint v e r a e. Hinc sequitur $\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$ esse ordinatam Hyperbolae Cubicae.

Restat tantum demonstrandum, quod idem semper sit curvae locus. Quod patet, quia locus est curvae, qui ipsi homogeneus qualis figura plana non nisi una. $\sqrt{a^2-2ax+x^2}$, sed $\begin{matrix} a^2-x^2=y^2 \\ x^2-a^2=y^2 \end{matrix}$ $a^4-2a^2x^2+x^4 \sqcap y^4$. Unde demonstratur loca quadratorum saltem

---

5 f. *Dahinter:* Imo fuit error calculi, non praefixeram binaria rectangulo ex duobus nominibus binomii quadrandi facto.

14 *Zu* v e r a e : Hoc examinandum.

8 f. Hyperbolae | et *ändert Hrsg.* | Asymptoton *L* 10 sumatur. *1)* Curvae autem *(a)* locus fit ex qvadratis locorum differe *(b)* loci *(aa)* qvadrata *(bb)* qvadratis comp *(2)* Qvadrata autem loci qvi *(3)* Ergo *L* 11 perpetuo *erg. L* 13 f. differentiarum, *(1)* nisi cum qvadrata *(2)* modo *L* 17 qvalis *(1)* linea *(2)* figura *L*

---

13 Ergo: Die Folgerung ist nicht richtig und beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

esse eadem. Ergo si non datur in eorum radicibus amphibolia, etiam loca differentiarum erunt eadem.

[*Teil 3*]

$$\sqrt{a^2+x^2+2x+1} - \sqrt{a^2+x^2} \sqcap \frac{z}{a} \text{ fiet}$$

$$+\left\{\begin{array}{ccc} a^2+\;\;x^2+2x+1 & & a^2+x^2+2x+1 \\ & -\;\;2 & \\ \underline{a^2+\;\;x^2\qquad\qquad} & & a^2+x^2 \end{array}\right\}^{\frown}. \;\sqcap\; \frac{z^2}{a^2}$$

$$2a^2+2x^2+2x+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\frac{z^2}{a^2} \quad \sqcap \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\cancel{4a^4}+\cancel{8a^2x^2}+\cancel{8a^2x}+\cancel{4a^2}-4z^2,+\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{4x^2},-\frac{4x^2z^2}{a^2}+4x^2+4x-\frac{4xz^2}{a^2}+\frac{z^4}{a^2}\sqcap$$

---

2 *Dazu, mit Hinweisstrich verbunden:* Imo NB. Curva ipsa explicabit amphiboliam, nam et ipsius quadrata amphibola. Semper ergo locus idem.

6 *Unter* 2: NB.

6 2 *erg. L* 10–181,1 $+\dfrac{z^4}{a^2} \sqcap$ *(1)* $a^4+a^2x^2+2a^2x+a^2,+x^2a^2+x^4+2x^3+x^2$ Ergo *(a)* $3a^4+6a^2x^2+3a^2+3x^4+6x^3+3x^2+4x \sqcap -z^4+4\left.\begin{array}{r} z^2 \\ 4x \\ 4x^2 \end{array}\right\}$ Impossibile | An ergo *streicht Hrsg.* | $1\cancel{3}a^4+2\cancel{6}a^2x^2+1\cancel{3}x^4 \sqcap \dfrac{z^4+4x^2z^2}{3}$ et $a^2+x^2 \sqcap \sqrt{\dfrac{z^4+4x^2z^2}{3}}$ vel $a^4+a^2x^2+x^4+\dfrac{4x^4}{3} \sqcap \dfrac{z^4+4x^2z^2+4x^4}{3}$

$$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} \;\sqcap\; \frac{z^2+2x^2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{-\frac{2x^2}{3}+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}} \;\sqcap\; z$$

Hoc nihil est, qvoniam z. est linea infinite parva.

Ecce ergo cautionem aliqvam adhibendam in eo calculo qvando aeqvatio *(aa)* ⟨inf⟩ *(bb)* habetur inter lineam infinite parvam, et *(aaa)* duas lineas finitas *(bbb)* duarum linearum finitarum ordinariarum differentiam, ut scilicet lineae illae ordinariae non sint ab eodem aeqvationis latere. An potius fundamentum rei est, ne subtractio cesset qvadratione. Nondum tamen cesso mirari, cur aliter impossibile eveniat.

Dicamus $\sqrt{a^2+x^2+2x+1}-\sqrt{a^2+x^2} \sqcap 0$ ergo $2a^2+2x^2+2x+1 \sqcap$ (*bricht ab*)

$\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2+x^2} \sqcap 0$. Ergo $a^2+x^2+a^2+x^2-2a^2-2x^2 \sqcap 0$.

Erravi in calculo, et jam video errorem oblitus sum rectangulum sub radicibus duplicare *(b)* $3a^6+6a^4x^2+3a^4+3a^2x^4+6x^3a^2+6x^2a^2+4xa^2$ *(2)* $\cancel{4a^4}$ *L*

---

10 $+\cancel{4a^4}$: Auf der linken Seite dieser und der folgenden Gleichung unterlaufen Leibniz Versehen, welche die weitere Rechnung beeinträchtigen.

$\cancel{4a^4} + \cancel{8a^2x^2} + \cancel{8a^2x} + \cancel{4a^2}, + \cancel{4x^4} + \cancel{8x^3} + \cancel{4x^2},$
restabit $z^4 - 4z^2a^2 + 4x^2a^2 - 4x^2z^2 \sqcap 0.$

$$\begin{array}{rl} & z^4 \;-\; 4a^2 \; z^2 \;\; + 4 \, \overbrace{a^2 + x^2}^{\square} \\ & \quad\; - \; 4x^2 \\ & \sqcap \;\; - \; 4x^2 \; a^2 \;\; + \; \ldots\ldots\ldots \\ \text{Ergo } z^2 - 2a^2 - 2x^2 & \sqcap \; \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

24. CURVARUM DIMENSIO

2. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 284. Ausschnitt von max. 12 x 11 cm, Ränder ungleichmäßig. Am linken Rand von Bl. 284 r° abgeschnittene Wörter und Silben ergänzt. Textfolge Bl. 284 v°, 284 r°. Datum u. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1250 und Nr. 1252

2. Januar. 1676

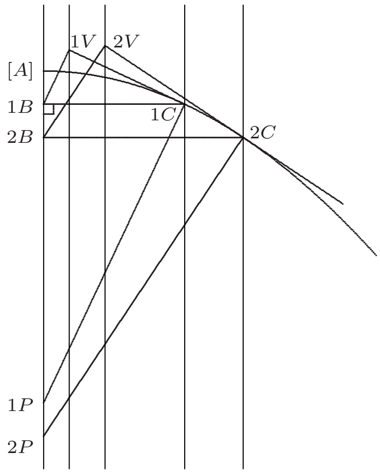
⟨ Curv ⟩ arum dimensio ex Tang. Invers.

Tangens curvae trunci superficiei cylindricae in rectum expansi generaliter sic habetur, sit basis superficiei cylindricae, curva $A1C$ quae seminormaliter abscissae sit, ea in rectum extensa, et plano curvae applicata, ita ut $A1C$ arcus extendatur in $A1N$ rectam, erit curva $A1L$ terminus superficiei cylindricae expansae. Jam quaeritur ejus tangens $1L1M$. Ad punctum $1C$ baseos superficiei cylindricae, ducatur tangens $1C1V$. Cui occurrat perpendiculariter $1B1V$ et $1C1V$ transferatur in $1N1M$, juncta $1L1M$ tanget.

Hinc ex data $A1L$ curva invenire curvam A1C. sic inquiretur.

9 Tangens *(1)* cuiuslibet *(2)* curvae *L* 10 curva *(1)* AC *(2)* A1C *L* 13 1C *(1)* curvae *(2)* baseos *L* 14 1B1V *(1)* erit 1C1V *(2)* et *L* 14 juncta *(1)* 1C1M *(2)* 1L1M *L*

9–14 Tangens ... tanget: Die zugehörige Figur fehlt. Ähnliche Überlegungen zu Oberflächen von Zylinderstümpfen, mit Skizze, finden sich z. B. in N. 46.



[*Fig. 1*]

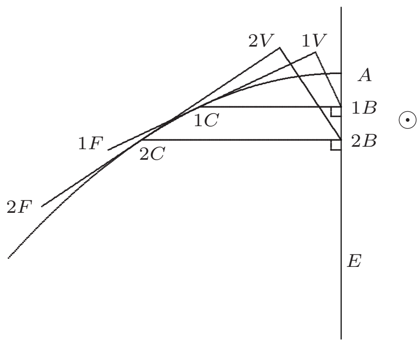
Triangulum $1B1V1C$ situ et magnitudine datur, ut et triangulum $2B2V2C$. excepto hoc uno, quod non constat quam alte locari debeat, itaque ad curvam ejusmodi tentando inveniendam, opus foret sursum deorsumque movere, tale triangulum saltem imaginatione, idemque in singulis separatim esset faciendum, sed ea lege, ut continuata $1C1V$ semper cadat extra ⟨cae⟩tera C. vel ut addita ad triangulum firmum mobile recta $1P1C$ parallela ipsi $1B1V$, sit semper $1P1C$ minima earum quae a puncto $1P$ ad curvam duci possunt. Hoc vel tentando facere difficillimum unde proponi posset quaestio mechanica elegans, ad ex. darem alicui centum ejusmodi triangula longitudinis determinatae, BC, BV, CV. firma et rigida. Ex lineis $1B1C, 2B2C$. exeant asseres perpendiculariter in altum ad planum paginae.

11 verte signo ⊙ ubi plenius:

9 determinatae *(1)* 1B1C *(2)* BC *L*

1 *Fig. 1*: Ein zwischen $1P1C$ und $2P2C$ verlaufender Schrägstrich wird nicht wiedergegeben.

Mirabilis quaestio Mechanica.



[*Fig. 2*]

Data sint aliquot, ut 100 Triangula rectangula inaequalia rigida BVC, ita ut BC earum basis fluere possit secundum AE regulam firmam, servato semper normali angulo CBA. Ponantur latera punctis B, opposita VC. indefinite producta in F. Ponamus semper unam lineam rigidam VF, alia esse altiorem, ut productae se nuspiam impediant. Super lineis BC insistant perpendiculariter ad planum hujus paginae asseres rigidi, triangula in eam ab invicem distantiam locanda sunt, ut id possibile sit, seu ut ipsae VF non occurrant asseribus, quae impediant. Mirum est ordinem Triangulorum non dare distantiam, et id fore difficile. Potest aliquis incipere a primis ordine; hinc recta AE omnes non capiet, si male collocat. Problema reducitur ad hanc quaestionem Geometricam, invenire curvam, in qua si BC ordinatae, sint CV tangentes. Opus esset ista elaborari, saltem ex materia aliqua chartacea sive facili.

3 rectangula inaeqvalia *erg. L* 9 f. non | dari *ändert Hrsg.* | distantiam *L* 11 f. invenire *(1)* puncta *(2)* curvam *L* 12 si *(1)* 1C1B o *(2)* BC *L*

25. MOMENTA CURVAE PARABOLICAE. DE MAXIMIS ET MINIMIS
[2. Hälfte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 148. 1 Bl. 4°. 1 3/4 S. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1167

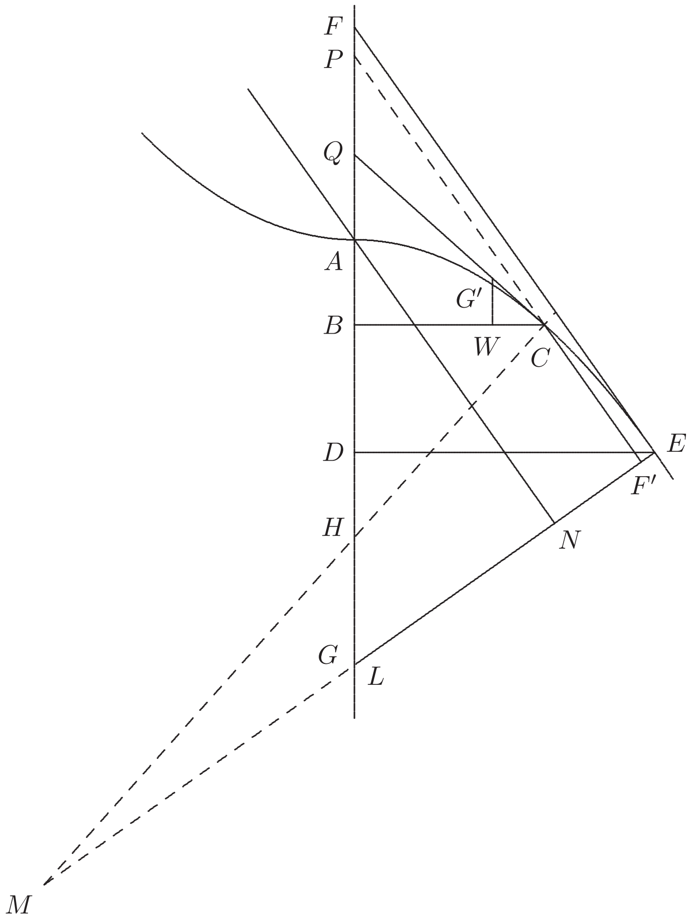
Datierungsgründe: **[noch]**

[*Teil 1*]

M o m e n t a   C u r v a e   P a r a b o l i c a e

Cum Centrum Gravitatis et dimensio Curvae parabolicae ex sola Hyperbolae quadratura pendeat, sequitur omnia ejus momenta ex qualibet recta haberi posse.

8 Gravitatis | *(1)* et dimensio *(2)* et dimensio *erg.* | Curvae *(a)* Hyperbo *(b)* parabolicae ex *(aa)* eius *(bb)* sola *L*



[*Fig. 1*]

In parabola: $AB \sqcap x$. $BC \sqcap \sqrt{2ax}$. $DE \sqcap b$. At $\sqrt{2ADa} \sqcap b$. Ergo $2aAD \sqcap b^2$, seu

1 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Figur und im Text die Punktbezeichnungen F und G doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wurden die Bezeichnungen F' und G' eingeführt. Der Schnittpunkt der Normalen EM mit der vertikalen Achse trägt die Bezeichnungen G und L, welche beide von Leibniz im Text benutzt werden; dies wurde beibehalten. Ein verworfener Ansatz der Figur wird nicht wiedergegeben.

$AD \sqcap \frac{b^2}{2a} \sqcap AF.\ \ DG \sqcap a \sqcap BH.$

Ut $\underset{\overbrace{\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+b^2}}}{FE}$ ad $\underset{\frac{b^2}{a}+a}{FL}$, ita PF' ad PL. Est autem $L \sqcap PA + \underset{\frac{b^2}{2a}}{\underset{\wedge}{AD}} + \underset{\sqcap a}{DL}$

et $PA \sqcap \underset{-AB}{PB - x}$. et $\frac{PB}{BC \sqcap \sqrt{2ax}} \sqcap \frac{FD \sqcap \frac{b^{\cancel{2}}}{a}}{DE \quad \cancel{b}} \sqcap \frac{b}{a}$. Ergo $PB \sqcap \frac{b\sqrt{2ax}}{a}$. Et $PA \sqcap \frac{b\sqrt{2ax}-ax}{a}$ et $PL \sqcap \frac{2b\sqrt{2ax}-2ax+b^2+2a^2}{2a}$.

Jam ut $\underset{\overbrace{\frac{b^2+a^2}{a}}}{FL} - PL$, ad FL, ita EF' ad $\underset{\overbrace{\sqrt{b^2+a^2}}}{EL}$ sive ut $\frac{2b^2\boxed{+2a^2}-2b\sqrt{2ax}+2ax\boxed{-b^2}\boxed{-2a^2}}{2\cancel{a}}$ ad $\frac{b^2+a^2}{\cancel{a}}$; ita EF' ad $\sqrt{b^2+a^2}$ sive ut $\mp b \pm \sqrt{2ax}$ ad $\sqrt{b^2+a^2},\square$; ita EF' ad $\sqrt{b^2+a^2}$. Ergo ut $\mp b \pm \sqrt{2ax},\square$ ad $\sqrt{b^2+a^2}$, ita EF' ad 1. Eritque $EF' \sqcap \frac{\mp b \pm \sqrt{2ax},\square}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

Jam $G'C$ infinite parva est ad $G'W \sqcap \beta$. ut QC ($\sqcap \sqrt{\underset{4x^2}{\underset{\wedge}{QB^2}} + \underset{2ax}{\underset{\wedge}{BC^2}}}$) ad $QB \sqcap 2x$.

Eritque $G'C \sqcap \frac{\beta\sqrt{4x^2+2ax}}{2x}$, ponamus compendii causa $\sqrt{b^2+a^2} \sqcap 1$. erit $G'C$ ducta in $EF' \sqcap \frac{\mp\beta b\sqrt{4x^2+2ax}}{2x} \pm \frac{\beta\sqrt{8ax^3+4a^2x^2}}{2x}$. Cujus summa ex quad. Hyperbolae. Ex

1 f. $\sqcap$ BH. | *(1)* Triangula FDE, et CFM similia, item *(2)* FDE et ANL similia. *gestr.* | Ut *L* 3 $\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+2ax}$ *L ändert Hrsg.* 13 $\frac{\beta\sqrt{4x^2+2ax}}{2x}$, *(1)* ducta in EF $\sqcap$ *(2)* ponamus *L* 13 $\sqcap$ 1. | et $\beta \sqcap 1$. *gestr.* | erit *L* 14 Cuius ... Hyperbolae. *erg. L*

---

10 $EF' \sqcap \frac{\mp b \pm \sqrt{2ax},\square}{\sqrt{b^2+a^2}}$: Richtig wäre $EF' \sqcap \frac{\mp b \pm \sqrt{2ax},\square}{2\sqrt{b^2+a^2}}$; dies beeinträchtigt (zusammen mit einem weiteren Rechenfehler) die Rechnung in Z. 14 – S. 188 Z. 4. 13 f. $G'C$ ducta in EF': Leibniz übernimmt EF' fehlerhaft ohne Quadrierung von $\mp b \pm \sqrt{2ax}$ im Zähler.

quibus partibus, utraque separatim examinetur ponaturque $\dfrac{b\sqrt{4x^2+2ax}}{x} \sqcap y$. Ergo $\dfrac{b^2 \frown 4x+2a}{x} \sqcap y^2$. adeoque $b^2, \frown\, 4x+2a \sqcap y^2x$. sive $4b^2x+2ab^2-y^2x \sqcap 0$. et $x \sqcap \dfrac{-2ab^2}{4b^2-y^2} \sqcap \dfrac{2ab^2}{y^2-4b^2}$ quae pendet ex quad. Hyp. ut constat. Ergo et altera; ex eadem pendebit quam sic examinabimus, $\dfrac{\cancel{x}\sqrt{2ax+a^2}}{\cancel{x}}$. Ea autem est ipsissima Hyperbola. Sed si EF' jam sumta et appellata z, in caeteras inquiramus aliae habebuntur quadraturae.

[*Teil 2*]

$\sqrt{2ax-x^2}+a-x \sqcap \omega$. Ergo $\sqrt{2ax-x^2} \sqcap \omega+x-a$. Ergo $2ax-x^2 \sqcap \omega^2+2\omega x-2a\omega, +x^2-2ax+a^2$. Unde ordinando ad tangentes fiet:

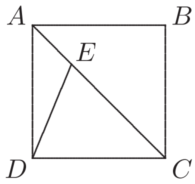
$$\begin{array}{llcll} & -2\cancel{4}x^2 & +2\cancel{4}ax \;\ldots\ldots & \cancel{2}\omega^2 & +\cancel{2}x\omega \\ & & -\cancel{2}\omega & & -\cancel{2}a\omega \\ \text{vel} & -2xl & +2al \quad \sqcap & \omega^2 & +\ x\omega\ , \\ & & -\omega\ .. & & [-a\omega] \end{array}$$

sive $l \sqcap \dfrac{\omega^2+x\omega-a\omega}{\begin{array}{c}-2x+2a\\ -\omega\end{array}}$. Ut autem ω sit omnium possibilium maxima, necesse est l esse infinitum, quod fit si nominator valoris sit $\sqcap 0$. sive $\begin{array}{c}-2x+2a\\ -\omega\end{array} \sqcap 0$. seu $\boxed{+2}x-\boxed{2}a+\boxed{\omega}\sqrt{2ax-x^2}\,\boxed{+a}\,\boxed{-x} \sqcap 0$. Ergo $2ax-x^2 \sqcap a^2-2ax+x^2$. Id est necesse est ut sinus

1 partibus, *(1)* prior erit: *(2)* utraqve *(a)* ad aliam *(b)* separatim *L* 13 $+2x\omega-2a\omega$ *L ändert Hrsg.*

13 f. Die Aussage gilt für ein relatives Maximum und trifft auch auf relative Minima und Wendepunkte mit waagerechter Tangente zu.

complementi sit aequalis sinui recto. Unde $2x^2 - 4ax + a^2 \sqcap 0$. unde $x^2 - 2ax + a^2 \sqcap \boxed{a^2 - \frac{a^2}{2}}\ \frac{a^2}{2}$. Ergo $a - x \sqcap \frac{a}{\sqrt{2}}$. sive $x \sqcap a - \frac{a}{\sqrt{2}}$. Igitur sinus complementi eligendus est, qui sit ad radium, ut quadrati latus ad diagonalem[,] id est faciendo $\frac{a - x \sqcap \text{sin. compl.}}{a} \sqcap \frac{a}{a\sqrt{2}}$, erit sinus complementi ipsis diagonali in quadrato radii et radio tertia proportionalis. Id est si quadratum a radio sit $ABCD$, sinus complementi quaesitus erit DE, recta ex D angulo quadrati a radio AD, demissa in diagonalem AC.



[*Fig. 2*]

$\sqrt{\frac{200}{100}} \sqcap \frac{\sqrt{200}}{10}$. $\frac{14}{10} \sqcap \frac{7}{5}$ ergo $\sqrt{2} \sqcap e + \frac{7}{5}$. et sinus complementi quaesitus $\sqcap \frac{a}{\frac{5e+7}{5}} \sqcap \frac{5a}{5e+7}$. id est sinus complementi suo sinui recto aequalis, seu qui maximam cum suo sinu recto summam constituit, $\sqcap \frac{5a}{7}$ seu paulo minor quam quinque radii septimae. Cujus

---

9 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\cancel{2}4 \\ 2\dot{0}0\dot{} \\ \hline 1\ \ 4 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{4} \end{array}$$

2 sinus *(1)* versus *(2)* complementi *L* 3 f. id est *(1)* sumenda est media *(2)* faciendo *L* 4 erit *(1)* radius media proportionalis *(2)* sinus *L* 9 $\sqrt{2}$ *(1)* $\sqcap$ 1 *(2)* $\sqcap$ *(a)* 2 *(b)* e + $\frac{7}{5}$. *L* 9 qvaesitus *(1)* circiter *(2)* $\sqcap$ *L* 11–190,2 Cuius ... utilissimo *(1)* est ad utilissimum, *(2)* ad ... 7. *erg.* *L*

duplum, vis machinae est $\frac{10}{7}a$. Ergo status machinae in situ utilissimo ad inutilissim. est ut 10 ad 7.

Hic calculus exemplum est calculi pro invenienda maxima minimave alicujus figurae ordinata ad directricem datam. Nimirum ubi figuram ad aequationem duarum incognitarum reduxisti: tunc si maximam (m i n i m a m) quaeris ordinatam, retenta incognita abscissas seu partes axis (o r d i n a t a s) significante abjice membra omnia in quibus incognita retenta non reperitur; residua multiplicabis per numerum dimensionum incognitae quantitatis retentae, in ipsis: et formulam ita natam pones nihilo aequalem. Habes ergo duas aequationes[:] priorem, quae figurae naturam explicat, inventam, quarum ope alterutra tolli potest incognitarum, ac proinde determinatum est problema, cum residuae valor hoc modo habeatur. Saepissime ope posterioris statim ab initio habetur aequatio unius tantum incognitae, nempe retentae, si scilicet incognitae in se invicem non ducuntur.

Nota sint casus ubi regula applicari non potest. Sunt enim figurae quae nullam habent ordinatam maximam v. g. parabola, Hyperbola etc. sunt quae nullam habent minimam, ut Hyperbola. Regula generalis est; ut inveniatur maxima ordinata oportet l ponere infinitam; ut minima, infinite parvam. l autem per regulam tangentium invenitur.

Infinitum ita exprimit W a l l i s i u s ∞. sed rectius divisione finiti spatii per rectam infinite parvam 0. v. g. $\frac{a^2}{0}$.

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{10}{7} \frown \frac{7}{8} \sqcap \frac{5}{4}$

14 *Isolierte Nebenbetrachtung:* $a^2 \sqcap yx.\ l \sqcap -x.$

4 ad ... datam *erg. L* 5 (m i n i m a m) *erg. L* 6 (o r d i n a t a s) *erg. L* 6 abjice *(1)* terminos omnes in qvibus incognita retenta non reperitur; residuos *(2)* sig *(3)* qvantitates *(4)* membra *L* 8 in *(1)* ipsa: *(2)* | ipso: *ändert Hrsg.* | *(a)* illi *(b)* productorumqve summa *(c)* et *L* 11 valor *(1)* habe *(2)* hoc *L* 11 ope *(1)* novi *(2)* posterioris *L* 14 $\mathrm{a}^2 \sqcap$ yx. | yx $\sqcap$ 0. *gestr.* | l $\sqcap$ *(1)* $\boxed{-\mathrm{y}}$x *(2)* −x *L* 18 divisione *(1)* finitae per 0, ut $\frac{\mathrm{a}^2}{0}$ *(2)* finiti spatii per rectum inf *(3)* finiti *L*

---

1 vis machinae: [**noch**]. 14–17 Nota ... invenitur: Leibniz entgeht hier, dass die Lage der genannten Kurven entscheidend ist für das Vorhandensein von Maxima und Minima. Fehlerhaft ist außerdem die Bedingung für Minima als Punkte, in denen die Subtangente unendlich klein wird.
18 exprimit W a l l i s i u s : J. WALLIS, *De sectionibus conicis*, 1655, S. 4, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 70 u. *Mechanica*, 1670–71, pars 2, S. 12 (*WO* I, S. 297, 405 u. 582).

26. DE CURVIS HOMOLOGIS. DE QUADRATRICE HYPERBOLAE
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 233–234. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S.
Cc 2, Nr. 1101

Datierungsgründe: **[noch]**.

[*Teil 1*]

1			1			
	1			9		
2		1	10		81	
	2			90		729
4		2	100		810	
	4			900		
8		4	1000		8100	
	8			9000		
16		etc.	10000		81000	
	etc.			90000		
32			100000			
64						
128						
256						
512						
1024						
2048						
4096						

[*Teil 2*]

Quotiescunque terminus unus numeratoris est in nominatore tunc divisionis portio fieri, subtrahique potest ab unitate vel parallelogrammo ut $\dfrac{2ay^2}{y^2+a^2} = 2a - \dfrac{2a^3}{y^2+a^2} = a \frown 2 - \dfrac{2a^2}{y^2+a^2}$. Jam $2 - \dfrac{2a^2}{y^2+a^2}$, vel $1 - \dfrac{a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{a^2+y^2-a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{y^2}{y^2+a^2}$ sed et dici poterat $\dfrac{y^2}{y^2} - \dfrac{a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{y^4+a^2y^2-a^2y^2}{y^4+a^2y^2}$ quae omnia eodem redeunt.

[*Teil 3*]

Curva sinubus Homologa

Quadrato sinus auferatur a^2: residui Radix quadrata dat differentias figurae cujus Curva sinubus homologa. Fiet: $\sqrt{2ax-x^2-a^2}$ sed quia necesse est esse a quod subtrahitur minus quam x, ideo fiet potius $\sqrt{2ax-x^2-a^2-x^2+2ax}$ sive $\sqrt{4ax-2x^2-a^2}$. Imo sic potius: Quadratum constans quod subtrahendum est, debet esse minus quam x^2, potes ergo sumi cujus voles parvitatis, ut quam longissime progredi possis ad minutissimos etiam sinus. Sed quod omnibus x minus sit, seu quod sit omnibus analogum sumere non potes. Deberet enim esse punctum. Jam ergo assumatur ba, pro quadrato constante subtrahendo, vel posito $b = \dfrac{a}{2}$, fiet $\dfrac{a^2}{2}$. et habebimus $\sqrt{2ax-x^2-\dfrac{a^2}{2}}$. Ergo

vel $\left(\dfrac{a^2}{3}\right)$

etc.

$2ax - x^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{2}$. Sed hoc intractabile. Ergo pro sinubus sumamus: $a^2 - x^2 = y^2$,

3 unitate | vel parallelogrammo *erg.* | ut | $\dfrac{\cancel{2}ay^2}{y^2+a^2}$ *ändert Hrsg.* | = 2a *L* 7 *(1)* Figura *(a)* segmentis circuli *(b)* sinubus *(2)* Curva *L* 7 f. Homologa *(1)* $\sqrt{2ax-x^2-a^2}$ = dif *(2)* Qvadrato sinus *(a)* addatur a^2 fiet: $2ax-x^2$ *(b)* auferatur a^2 | fiet *streicht Hrsg.* |: residui *L* 9 Curva *(1)* Circulo *(2)* sinubus *L* 9 f. qvod subtrahitur *erg. L* 11 potius: *(1)* pro a^2 substituatur b^2, *(2)* Qvadratum *L*

7 sinubus: Im Folgenden ist der sinus als Ordinate des Halbkreises aufzufassen.

unde subtrahendo aliquod quadr. constans, v. g. $= \frac{a^2}{2}$ fiet $\frac{a^2}{2} - x^2 = y^2$. Ergo Circuli alterius, cujus radius minor est radio dati, figura quadratrix habet Curvam sinubus homologam. Idem de Hyperbola eodem modo demonstratur, cum ejus aequatio possit esse $a^2 + x^2 = y^2$, unde eodem modo fit: $\frac{a^2}{2} + x^2 = y^2$. Atqui alibi ostensum est Curvam Parabolicam esse figurae Hyperbolicae homologam. An ergo Parabola Hyperbolae quadratrix intelligi potest, non opinor, ista ergo conferenda ac concilianda sunt.

Inquiramus nunc in Curvas figuris cognitis, ut Triangulo, Parabolae, homologas.

Trianguli aequatio est $x = y$. Fiet: $\sqrt{x^2 - a^2} = y$ et pro x posito $a + x$, fiet $\cancel{a^2} + x^2 + 2ax - \cancel{a^2} = y^2, = 2ax + x^2$. Ergo Figura Quadratrix Hyperbolae curvam habet Triangulo homologam.

Trilinei P a r a b o l i c i aequatio est $\frac{x^2}{a} = y$. Fiet regula nostra: $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$. sive $x^4 - a^4 = a^2y^2$, et pro x posito $a + x$, fiet $a^2 + 2ax + x^2, \square = a^4 + 4a^3x + 2a^2x^2 + 4a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ sive $\sqrt{\cancel{a^4} + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 - \cancel{a^4}} = ay$. et hujus figurae quadratrix curvam habet Trilineo parabolico homologam. Ipsa figura autem differentiarum videtur esse ex Hyperboloeidum genere. Unde fieret $a + x = \sqrt{\sqrt{a^2y^2 + a^4}}$ sive pro $a + x$ posito x fieret: $x^4 = a^2y^2 + a^4$. vel $\frac{x^4}{a^2} = y^2 + a^2 = y + a, \frown a - y$ vel $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$ ut ante.

$$\begin{array}{ccc} y + a, & \frown & a - y \\ \vee & & \\ n & \frown & n - 2y \end{array}$$

16 *Nebenbetrachtung:*

2 Curvam *(1)* Circulo *(a)* sy *(b)* homo *(2)* sinubus *L* 4 $\frac{a^2}{2} - x^2$ *L ändert Hrsg.* 9 Ergo *(1)* Curva *(2)* Figura *L* 10 f. homologam. *(1)* P a r a b o l a e *(2)* Trilinei *L* 14 parabolico *(1)* homogeneam *(2)* homologam *L* 14 differentiarum *erg. L* 15 $a + x =$ *(1)* $\sqrt{\sqrt{a^2y^2 + a^4}}$ *(2)* | $\sqrt{a^2y^2 + a^4}$ *ändert Hrsg.* | sive *L* 16 55 | -6 | $+11$ *L ändert Hrsg.*

4 ostensum: H. VAN HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520. 16 $y^2 + a^2 = y + a, \frown a - y$: Die Zerlegung von $y^2 + a^2$ ist fehlerhaft. In der Nebenbetrachtung setzt Leibniz verschiedene Zahlenbeispiele für die Faktorisierung an und vergleicht die Produkte mit dem jeweils nächstniedrigeren und nächsthöheren Quadrat. Die Nebenbetrachtung bricht ohne Ergebnis ab.

Caeterum eodem modo omnes quoque reliquae paraboloeides tractari possunt, sumenda tamen in exemplum composita $x^3 = y^2 a$, haec tractatur non ut Trilineum, sed ut parabola ipsa, fit enim latus curvae homogeneae: $\dfrac{x^3}{a^3} = \dfrac{y^2}{a^2}$. Et quadratum ejus $\dfrac{x^6}{a^6} = \dfrac{y^4}{a^4}$,

---

3	1	2
5	2	3
7	3	4
9	4	

vel	9	8	1
	10	7	3
	11	6	5
	12	5	7
	13	4	9

si $a + y = n$
ergo $a - y = n - 2y$

$n \frown n - 2y$

9	-0	$+0$	
30	-5	$+6$	
			5
55	-6	$+9$	
			4
84	-3	$+16$	
117	-17	$+4$	

Ergo nihil hinc duci potest.

2 composita *(1)* $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{y}^2$, haec tractatur non ut Trilineum sed ut *(a)* Hyper *(b)* parabola ipsa, fit enim$\sqrt{\mathrm{ax}^2} = \mathrm{y}$. atqve adeo *(2)* $\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4 = \mathrm{y}^2\mathrm{a}$ *(3)* $\mathrm{x}^3 = \mathrm{y}^2\mathrm{a}$ *L*

detrahatur 1. fiet $\dfrac{\sqrt{x^6-a^6}}{a^3} = \dfrac{y}{a}$. Unde figurae $\dfrac{\sqrt{x^6-a^6}}{a^2} = y$ quadratrix curva huic paraboloeidi homologa. Figura autem ista dabit $x^6 - a^6 = y^2a^4$ cujus quadratura dabit quaesitum.

In simplici parabola $y^2 = ax$. unde $\dfrac{y}{a} = \dfrac{\sqrt{ax}}{a}$, hujus quadr. $\dfrac{ax}{a^2} = \dfrac{x}{a}$. cui auferatur 1. fit $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{ax-a^2}{a^2}$ erit $\sqrt{ax-a^2}$ vel $\sqrt{ax} = y$. Et hujus nimirum ipsius parabolae, quadratrix figura, Curvam habebit parabolae homologam quare Geometrice describi potest.

Operae pretium est quaerere Curvam homologam figurae segmentorum, $\dfrac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, ejus quadr. $\dfrac{x^2}{2ax-x^2}$, ablata unitate $= \dfrac{2ax-x^2}{2ax-x^2}$, fiet $\dfrac{x^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}$, vel $\sqrt{\dfrac{x-2a+x}{2a-x}} = \dfrac{y}{a} = \sqrt{\dfrac{2x-2a}{2a-x}}$. Ergo $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{2x-2a}{2a-x}$. Et $2ay^2 - xy^2 = 2xa^2 - 2a^3$. Et $2ay^2 = 2xa^2 - 2a^3 + xy^2$, vel $2ay^2 - 2a^3 = 2xa^2 - xy^2$, vel $\dfrac{2ay^2-2a^3}{2a^2-y^2} = x$. Hujus ergo figurae quadratrix Curvam habet segmentis Circuli homologam.

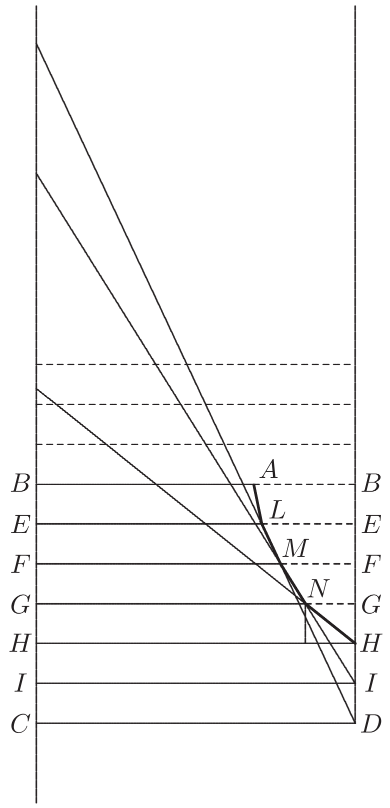
Si sumas $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}$, cujus $\square$, $\dfrac{y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ et ablato 1. $\sqrt{\dfrac{2y^4-a^4-2a^2y^2-y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}}$, sive $\sqrt{\dfrac{y^4-a^4-2a^2y^2}{a^4+2a^2y^2+y^4}}$ hujus figurae quadratrix Curvam habet segmentorum residuis homologam.

1 $=$ y *(1)* habet curvam *(2)* qvadratrix *L* 2 paraboloeidi *(1)* homog *(2)* homologa. *L* 4 unde *(1)* $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2} = \frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{a}^2}$ *(a)* $=$ *(b)* seu $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}^2} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$ *(2)* | $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2}$ *ändert Hrsg.* | $= \frac{\sqrt{\mathrm{ax}}}{\mathrm{a}}$ | seu *streicht Hrsg.* |, huius *L* 4 cui *(1)* addatur 1. fit $\frac{\mathrm{x+a}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{xa+a^2}}{\mathrm{a}^2} =$ *(2)* auferatur *L* 6 f. qvare ... potest *erg. L* 13 sumas *(1)* $\frac{2\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$, auferasqve *(a)* 1, fiet *(b)* $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}{}$, fiet $\sqrt{\frac{2\mathrm{y}^2-\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}}$. Et *(2)* $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *L* 14 figurae *(1)* Curva est *(2)* qvadratrix *L*

11 $2ay^2 - 2a^3 = 2xa^2 - xy^2$: Richtig wäre $2ay^2 + 2a^3 = 2xa^2 + xy^2$. Dies beeinträchtigt die folgende Gleichung, jedoch nicht die Schlussfolgerung. 13 $\dfrac{y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$: Leibniz benutzt in der weiteren Rechnung das Doppelte dieses Ausdruckes, $\dfrac{2y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$.

[*Teil 4*]

De Quadratrice Hyperbolae



[*Fig. 1*]

Punctum A feratur a recta AB, versus rectam CD, iis legibus, ut motus semper sit aequabilis sive uniformis. Et tamen recta BC. divisa in partes aequales infinitas punctis B. E. F. G. per quas parallelae infinite productae transeant. Punctum A ponatur ex recta B venire in rectam E, tempore aliquo (utcunque infinite parvo) quod appelletur a.

2 f. Hyperbolae *(1)* Si punctum aliqvod aeqvabili semper *(2)* Punctum A feratur *(a)* versus rectam *(b)* a *L* 4 uniformis, *(1)* tempus autem tale, ut recta tamen, *(a)* qv⟨o⟩ *(b)* divisa *(2)* Et *L*

ex E vero in F, tempore $a+1$, posito 1 esse infinitesimam temporis partem et ex F in G tempore $a+2$, et G in H, tempore $a+3$ ita semper ut velut BH e. g. est ad BE, ita accessio temporis ex H in I sit ad accessionem temporis ex E in F, atque ita differentiae temporum, erunt ut quadrata altitudinum. Nam tempus quo pervenitur ex B in F, erit a ductum in numerum terminorum seu rectam $B[F,]$ hoc loco $2, = 2a, +$ semiquadrato ejusdem, $\frac{4}{2}$. Rectius cum BE, sit 1, erit accessus a. Ergo ex B in E feretur tempore 1, ex E in F, tempore $1+\frac{1}{a}$[,] ex F in G tempore $1+\frac{2}{a}$. ex G in H, tempore $1+\frac{3}{a}$. ex H in I. tempore $1+\frac{4}{a}$, eadem ex B in G tempore $BG+\frac{BG^2}{2a}$ et ex B in I, tempore $\frac{2a\,BI+BI^2}{2a}$. Sunt ergo tempora $\frac{2ax+x^2}{a}=y$ seu ut applicata figurae cujus talis est aequatio $\frac{2ax+x^2}{a}=y$. Composita ex ordinatis Trianguli et Trilinei parabolici punctis. Unde fit $2ax+x^2=ya$, seu $2ax+x^2+a^2=ya+a^2$. Unde fit $\underbrace{x+a}_{x}=\sqrt{ya+a^2}$ seu

4 altitudinum *(1)* | seu *streicht Hrsg.* | dif *(2)*. Nam *L* 5 seu rectam B *erg. L* 6 accessus *(1)* $\frac{1}{\mathrm{a}}$ *(2)* a *L* 8 eadem *(1)* erit longitudo rectarum, seu spatiorum per *(2)* ex *L* 10 Composita ex *(1)* lateribus *(2)* ordinatis ... punctis *erg. L* 11 $=\sqrt{\mathrm{ya}+\mathrm{a}^2}$ *(1)* seu $\mathrm{x}=\sqrt{2\mathrm{yb}+\frac{\mathrm{b}^2}{4}}$, posito esse $\mathrm{x}=$ ei qvod ante $\mathrm{x}+\mathrm{a}$, et *(a)* $\frac{\mathrm{b}^2}{4}=$ *(b)* $\mathrm{b}=\frac{\mathrm{a}}{2}$ Erunt ergo tempora ut appli *(2)* seu *L*

3 f. differentiae ... altitudinum: Die wörtliche Formulierung gibt die Abhängigkeit der Fallzeit von der überwundenen Höhe nicht korrekt wieder. In der anschließenden Diskussion kommen einige Ungenauigkeiten hinzu. So lautet der Ausdruck für die Zeit bei Bewegung von B nach F nicht $2a+\frac{4}{2}$, sondern $2a+\frac{2\cdot 1}{2}$ (Z. 5 f.). Nach dem von Leibniz vorgenommenen zweimaligen Wechsel der Bezeichnung für die Zeitzuwächse von 1 über a zu $\frac{1}{a}$ ergibt sich für die Zeit bei Bewegung von B nach G dementsprechend $BG+\frac{BG(BG-1)}{2a}$ (Z. 8). Die Beziehung zwischen Höhe x und Zeit y müsste $\frac{(2a-1)x+x^2}{2a}=y$ (Z. 9) lauten. Die allgemeine Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt.

$x = \sqrt{ya}$. posito esse $x =$ ei quod ante $x + a$. et y esse $=$ ei quod ante $y + a$.

Ecce ergo habebimus definitionem Figurae Quadratricis:

Si Punctum A ex BA, versus CD, uniformi semper motu feratur, sed obliquato ita cursu, ut tempora descensuum (vel spatia AL. AM. AN. AH) sunt ut applicatae parabolicae basi parallelae, earundem semper altitudinum; motu suo describet curvam, quae quadraturam Hyperbolae dabit.

Figura segmentorum Hyperbolae est opinor: $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}} = y$. unde $x^2a^2 = 2axy^2 + x^2y^2$ seu $xa^2 = 2ay^2 + xy^2$, sive $xa^2 - xy^2 = 2ay^2$, vel $\dfrac{2ay^2}{a^2 - y^2} = x$. Caeterum datae $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}}$ tentemus invenire homogeneam, fiet: $\dfrac{2x}{\sqrt{2ax + x^2}}$ et ejus $\square$ erit $\dfrac{4x^2}{2ax + x^2}$, cui auferatur 1, fiet $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \dfrac{y}{a}$, seu $\dfrac{3x^2 - 2ax}{2ax - x^2} = \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{3x - 2a}{2a - x}$.

2 definitionem *(1)* Curvae *(2)* Figurae *L* 4 tempora *(1)* qvibus ex pu *(2)* descensuum | (vel ... AH) *erg.* | sunt *L* 8 = x. *(1)* hinc homogenea *(2)* Iam *(3)* Caeterum *L* 8 f. datae *(1)* | $\dfrac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$, *streicht Hrsg.* | vel eius duplo $\dfrac{2\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$ *L* 10 addatur *L ändert Hrsg.*

---

10 $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \dfrac{y}{a}$: Richtig wäre $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \dfrac{y}{a}$. Der Fehler beeinträchtigt die folgende Gleichung.

27. DE FIGURA AD ALTIOREM SEMPER ATQUE ALTIOREM AEQUATIONEM ASCENDENTE
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 323. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 323 r°. Bl. 323 v° leer. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: **[noch]**

Si sit Curva, cujus applicatae sint progressionis harmonicae, videri poterat irreducibilis ad aliquam aequationem, et contra est tamen, cum sit Hyperbola. Inquirendum est in figuram, quae ad altiorem semper atque altiorem aequationem ascendat, ut ejus applicata maxima sit Trianguli, sequens Parabolae, rursus sequens parabolae cubicae, et ita porro. Nihil video quod prohibeat eam esse Geometricam, describi tamen, non potest, opinor. Sed puto tamen tangentium ejus loca seu loca functionum esse aequationis

7 *Darüber:* In omnibus unitatibus seu Numeris non sunt tot unitates quot in aliqua linea puncta .

7–9 *Am Rande:* Inquirendum in curvam cujus applicatae sunt progressionis geometricae vel compositae.

10 applicata *(1)* minima *(2)* maxima *L* 12 esse *(1)* Geometrica. *(2)* aeqvationis *L*

9 figuram: Die von Leibniz gegebene Beschreibung der Kurve läuft auf die Gleichung $x^x = ya^{x-1}$ hinaus. Der Ansatz der Kurvengleichung als verallgemeinerte Parabelgleichung führt deshalb bei der Bestimmung der Subtangente nicht zum richtigen Ergebnis.

capacia. x poterit sic exprimi $\frac{x^\beta}{a^{\beta-1}} = y$. Et aequatio erit: $x^\beta = ya^{\beta-1}$. Unde investigatio tangentium haec: $\beta p x^{\beta-1} = ya^{\beta-1}$, seu $p = \frac{ya^{\beta-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{x^\beta}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{x}{\beta}$. Et quoniam numeri β. crescunt cum ipsa x. uniformiter, ideo p semper erit eadem, seu infinite parva, et ideo tangens ducenda in idem semper punctum, nempe verticem, et ideo figura erit Triangulum. Si inverso modo sumas applicatas parabolarum ad axem, erit $p = \beta x$, et ideo infinite longa seu figura erit rectangulum.

$2ax^2 + x^3 = y^3$. fiet $4apx + 3px^2 = 3y^3$. Ergo $p = \frac{6ax^2 + 3x^3}{4ax + 3x^2} = \frac{6ax + 3x^2}{4a + 3x} = \frac{2ax + x^2, \frown 2}{4a + 3x}$ vel $\frac{2ax^2 + x^3, \frown 2}{4ax + 3x^2}$[,] per p dividatur $y, = \sqrt{③ 2ax^2 + x^3}$, fiet

---

2 *Am Rande:* $ax^2 = y^3$
$2axp = 3y^3$

6 *Darunter:* An fortasse infinitae varietates varietatum componunt denique figuram quoniam infinitae paraboloeides, tot scil. quot numeri, non nisi lineam componunt.

6 seu *(1)* rectangulo aeqvalis *(2)* figura *L* 6 infinitae *(1)* aeqvationum *(2)* varietates *L*

---

8 $\frac{2ax + x^2, \frown 2}{4a + 3x}$: Richtig wäre $\frac{2ax + x^2, \frown 3}{4a + 3x}$. Leibniz rechnet vom nächsten Rechenschritt an nur noch mit $\frac{2ax + x^2}{4a + 3x}$.

$$\frac{\sqrt{\textcircled{3}\,2ax^2+x^3} \frown 4ax+3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\,2ax^{[2]}+x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\,2ax^{[2]}+x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\,2ax^{[2]}[+x^3]}} = \frac{4ax+3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\,\llcorner\llcorner 2ax^2+x^3 \lrcorner \frown \lrcorner 2ax^2+x^3}} =$$

$$\sqrt{\textcircled{3}\,\frac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2a^2x^4+4ax^5+x^6}} = \sqrt{\textcircled{3}\,\frac{64a^3+144a^2x+108ax^2+27x^3}{2a^2x+4ax^2+x^3}}$$ quadrabile.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 16a^2x^2 & + & 24ax^3 & + & 9x^4 & \\ & & & 4ax & + & 3x^2 & \\ \hline & 48a^2x^4 & + & 72[a]x^5 & + & 27x^6 & \\ 64a^3x^3 & + & 96a^2x^4 & + & 36[a]x^5 & & \\ \hline 64a^3x^3 & + & 144a^2x^4 & + & 108ax^5 & + & 27x^6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 96 \\ 48 \\ \hline 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ 36 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$2a^2x^4+4ax^5+x^6$$

1 $\frac{\sqrt{\textcircled{3}\ 2ax^2+x^3} \frown 4ax^2+3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\ 2ax+x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\ 2ax+x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\ 2ax}}$ = *(1)* $\frac{4ax+3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\ \llcorner 2ax^2+x^2 \lrcorner}}$ *(2)* $\frac{4ax+3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\ \llcorner\llcorner 2ax^2+x^3 \lrcorner \frown \lrcorner 2ax^2+x^3}}$ $= |\sqrt{\textcircled{3}}$ *erg. Hrsg.* $|\frac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2a^2x^4+4ax^5+x^6}$ *L*

5 *(1)*

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 16a^2x^2 & + & 24ax^3 & + & 9x^4 & \\ & & & 4ax & + & 3x^2 & \\ \hline & 48a^2x^4 & + & 72\,x^5 & + & 27x^6 & \\ 64a^3x^3 & + & 96a^2x^4 & + & 36\,x^5 & & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2ax^2+x^3} = \frac{64a^3x+144a^2x^2+108ax^3+27x^4}{2a+x}$ | haec figura est qvadrabilis. *streicht Hrsg.* | *(2)* $16a^2x^2$ *L*

---

5 $2a^2x^4+4ax^5+x^6$: Richtig wäre $4a^2x^4+4ax^5+x^6$. Leibniz übernimmt das fehlerhafte Ergebnis aus der Nebenrechnung in die weitere Rechnung.

28. DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONIBUS REDUCTARUM AD ORDINATAS
24. Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 13–14. 1 Bl. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 828

Xb. 1674. ipsis Natalitiorum vigiliis

De Trochoeidibus, et Relationibus Reductarum ad ordinatas et de ratione efficiendi ut eadem curva sit trochoides plurium

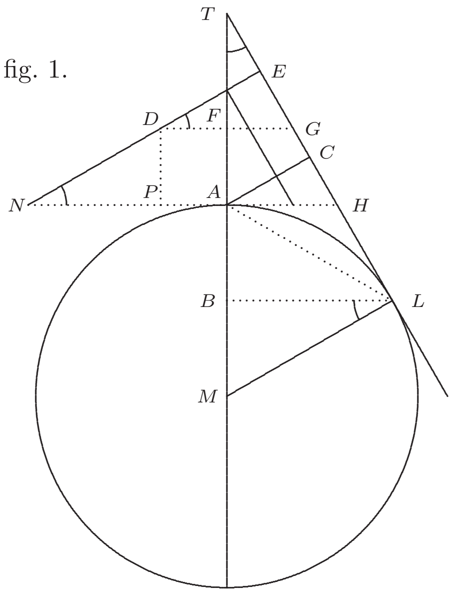
Data Curva, et puncto quodam fixo, unde perpendicularis demittatur ad quamlibet curvae tangentem, investigare relationem inter perpendicularem demissam, et interceptam tangentis portionem inter demissam et punctum contactus.

Esto primum curva, circuli circumferentia. Si punctum fixum sit centrum, intercepta tangentis portio erit infinite parva, et perpendicularis semper eadem, nempe radius, locus ergo est ad rectangulum.

Si vero punctum fixum vertex A. quodlibet in curva punctum L. Tangens axi AT occurrens LT. sagitta AB. ordinata seu sinus rectus BL. constat esse $AC \sqcap AB$. quam appellemus x. Jam $AL \sqcap \sqrt{2ax}$. et $AL^2 \sqcap 2ax$. Ergo $CL^2 \sqcap AL^2 - AC^2 \sqcap 2ax - x^2$. Ergo $CL \sqcap \sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL$. Hinc jam patet figuram in qua ordinata ad reductam relationem habeat quam sinus versus ad rectum, esse Cycloeidem.

7–9 Nova hic methodus detegitur, qua diversarum figurarum quadraturae ad se invicem reducuntur, ope Trochoeidum.

7–9 ope *(1)* volutarum | etiam *streicht Hrsg.* | *(2)* Trochoeidum *L* 10 fixo | extra curvam *gestr.* |, unde *L* 11 demissam *erg. L* 12 inter *(1)* tangentem *(2)* perpe *(3)* perpendicularem *(4)* demissam *L* 19 reductam *(1)* rationem *(2)* relationem *L*



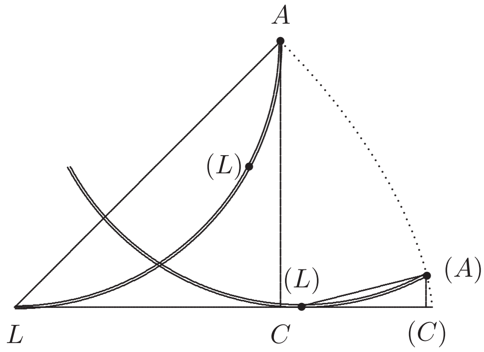


fig. 2.

[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*] [*Fig. 2*]

Nam generaliter in curva provolvenda AL, demissa ex puncto quodam fixo, ut A, in tangentem LT, fit ordinata in Trochoeide, et intervallum inter demissam et punctum contactus seu LC, fit reducta, quoniam LA in Trochoeide semper perpendicularis ad curvam. Ut patet conferendo figuram 2^{dam} primae, ubi $A(L)L$ provolvenda, $A(A)$ Trochoeides curva, LA vel $(L)(A)$ perpendicularis ad curvam Trochoeidem, AC vel $(A)(C)$ ordinata ad planum volutionis, LC reducta sive intervallum inter ordinatam et perpendicularem in directrice sumtum.

Esto jam punctum describens, non vertex circuli A, sed aliud quodlibet D. unde ad tangentem LT. demisssa perpendiculari DE, quaeratur relatio quae est inter DE et

2 in *(1)* vigur *(2)* figura *(3)* curva *L* 5 AL(L) *L ändert Hrsg*

1 *Fig. 2*: Zwei verworfene Vorstufen der Figur, in denen Leibniz drei Phasen des Abrollens der Kurve darzustellen versuchte, werden nicht wiedergegeben. 9 Esto: Zum Folgenden vgl. Fig. 1.

LE. Cum datum sit punctum D, datum erit ejus intervallum a diametro AB, nempe $DF \sqcap d$[,] dabitur et ejus intervallum a vertice, nempe recta $AF \sqcap f$. In ipsam LT tangentem ducantur AH. FG. AC. Nam per DFG. habebitur et DE. at FG. per AH. AH autem cognita est, ducto enim radio ML, patet Triangula LBM, TBL, ACH, esse similia, adeoque AH esse ad $AC \sqcap AB \sqcap x$, ut radius LM seu a est ad $BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$. Ergo $AH \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL}$. Jam ut BL ad BM ita TA ad AH. Ergo $\dfrac{TA}{AH} \sqcap \dfrac{BL}{BM \sqcap a - x}$. Ergo $TA \sqcap \dfrac{BL \smallfrown AH}{a - x}$. Jam $BL \smallfrown AH \sqcap ax$. Ergo $TA \sqcap \dfrac{ax}{a - x}$. Jam FG est ad TF ut AH ad TA. seu $FG \sqcap \dfrac{AH \smallfrown TF}{TA}$. Jam $TF \sqcap TA ǂ AF \sqcap \dfrac{ax}{a - x} ǂ f$. Unde fiet $FG \sqcap \dfrac{\dfrac{\cancel{ax}}{\sqrt{2ax - x^2}}}{\dfrac{\cancel{ax}}{a - x}} \smallfrown TF \sqcap \dfrac{\boxed{a - x}}{\sqrt{2ax - x^2}} \smallfrown \dfrac{ax ǂ af ‡ xf}{\boxed{a - x}} \sqcap \dfrac{ax ǂ af ‡ xf}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $DG \sqcap \dfrac{ax ǂ af ‡ xf}{\sqrt{2ax - x^2}} (ǂ) d$. Si punctum D. esset in diametro producta, negligi posset D. Hinc patet semper si velis negligi posse quoniam etsi non in AM, tamen in alia diametro producta.

Quodlibet punctum extra Circulum existere intelligi potest. Habita jam DG. investigabitur facilius DE, est enim DE, ad DG, ut BL sinus rectus ad radium. Ergo $DE \sqcap \dfrac{DG \smallfrown BL}{a}$, at $DG \smallfrown BL \sqcap \dfrac{ax ǂ af ‡ fx (ǂ) dBL}{\cancel{BL}}, \smallfrown \cancel{BL}$.

Ergo $DE \sqcap \dfrac{ax ǂ af ‡ fx (ǂ) d\sqrt{2ax - x^2}}{a}$. Producatur ED in N, dum occurrat ipsi HAN, et in AN demittatur perpendicularis $DP \sqcap AF \sqcap f$. erit $\dfrac{DN}{DP \sqcap f} \sqcap \dfrac{ML \sqcap a}{BM \sqcap a - x}$. ergo $DN \sqcap \dfrac{af}{a - x}$. et $EN \sqcap \dfrac{ax ǂ af ‡ fx (ǂ) d\sqrt{2ax - x^2}}{a} ((ǂ)) \dfrac{af}{a - x}$. Inventa autem EN facile habetur EH. ergo et EL.

4 est, *(1)* sunt *(2)* Cum enim AC aeqvetur AB. erunt triangula ACL *(3)* ducto *L* 5 $\sqcap$ x, *(1)* ut BL *(a)* ad *(b)* $\sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ ad radium LM seu a, ergo AH $\sqcap$ *(2)* ut *L* 17 AHN *L ändert Hrsg.* 17 $\sqcap$ f. *(1)* erit $\dfrac{NP}{f} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x} \sqcap \dfrac{BL}{BM}$: ergo NP $\sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$ *(2)* erit *L* 18 f. inventa autem *(1)* EN *(2)* | EA *ändert Hrsg.* | facile ... EL *erg. L*

Imo ista ipsius DN. additio ad ED, locum tantum habere videtur, cum D sumta ut in figura [1.] extra diametrum in latere diametri a tangente averso.

Nota hic casum quo s i g n o r u m a m b i g u o r u m usus haerere videtur. Aliter enim in quibusdam instituendus erit Calculus si sit in sinistro, quam si sit in dextro tangentis latere, quia calculus per Triangulorum similium comparationes peragitur.

Alia enim methodo calculus reddi potest generalis, is ergo praeferendus, nimirum ex datis DE et DG. Est enim EG ad DG, ut $a - x$ seu BM ad ML seu a. Ergo $EG \sqcap \dfrac{DG \frown a - x}{a}$, et GL, ad $FB \sqcap x \ddagger f$ ut LM ad BL, seu ut a ad $\sqrt{2ax - x^2}$. seu $GL \sqcap \dfrac{ax \ddagger fa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. et $EL \sqcap EG((\dagger))GL$. Quod si unicum exemplum calculare volumus, cum punctum D in sinistro latere ipsius AT, extra Circulum, intra T. et A. (vide supra

---

3–5 *Figur, gestrichen:*

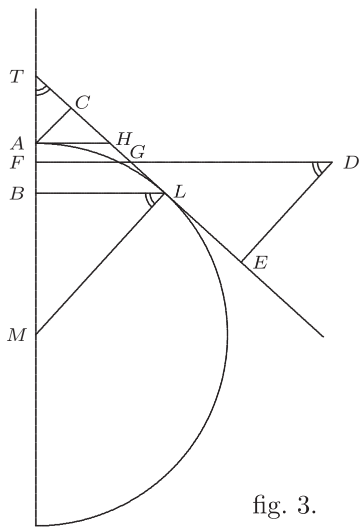


fig. 3.

1 ad | E *ändert Hrsg.* |, locum *L* 2 extra *(1)* vertice *(2)* diametrum *L* 5 latere, *(1)* itaqve facilitatis causa, uno tantum casu utemur nunc qvidem Nimirum qvia omnia *(2)* qvia *L* 10 intra *(1)* tangentem *(2)* T. et *L*

fig. 1.[)] tunc $EN \sqcap \dfrac{ax - af + fx + d\sqrt{2ax - x^2}}{a} + \dfrac{af}{a - x}$. Sin malis NH, uti[:] $\dfrac{NP}{f} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$. erit $NP \sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$, addatur AP sive d, et $AH \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ fiet: $\dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x} + d + \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} \sqcap NH$.

Jam EH est ad NH, ut a ad $a - x$. Ergo $EH \sqcap \dfrac{NH \frown a}{a - x}$. Est autem

$$NH \sqcap \frac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax - x^2} - dx\sqrt{2ax - x^2} + a^2x - ax^2}{a - x, \frown \sqrt{2ax - x^2}}$$

ergo $EH \sqcap \dfrac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax - x^2} - dx\sqrt{2ax - x^2} + a^2x - ax^2}{a^2 - 2ax + x^2, \frown \sqrt{2ax - x^2}}$, cui addatur $HL \sqcap AH$, et fiet EL. et habebitur relatio inter EL et DE.

Sed quoniam calculos tam prolixos odi, videndum potius an omissa d, res sit facilior sumto puncto D in diametro producta si opus fig. 3.

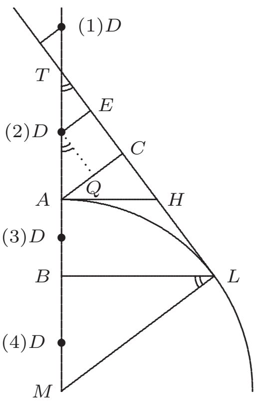


fig. 3.

Nimirum $TA \sqcap \dfrac{ax}{a - x}$, addatur vel adimatur vel plusquam adimatur AD, fiet: $TD \sqcap \begin{matrix} +TA + AD \text{ seu} \\ +TA - AD \\ -TA + AD \end{matrix}$

$TD \sqcap \mp TA \mp AD$.

Jam $\dfrac{DE}{AC} \sqcap \dfrac{TD}{TA}$. Ergo $DE \sqcap \dfrac{TD \frown AC}{TA}$. Jam $AC \sqcap AB \sqcap x$. Ergo: $DE \sqcap \dfrac{\mp \dfrac{ax}{a - x} \mp f, \frown \cancel{x}}{\dfrac{a\cancel{x}}{a - x}}$, sive $DE \sqcap \dfrac{\mp ax \mp af \mp xf}{a}$. Jam DQ ad $AD \sqcap f$ ut $\sqrt{2ax - x^2}$ ad a. Ergo $DQ \sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} \sqcap EC$. Addatur vel adi-

2 addatur | AD *ändert Hrsg.* | sive *L*   7 EL | et *streicht Hrsg.* | et *L*   16 ⊓ EC *(1)* addatur CL ⊓ BL fiet EL ⊓ *(2)* addatur *L*

4 ut a ad $a - x$: Richtig wäre $EH : NH = (a - x) : a$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Berechnung von EH in Z. 6.

matur, etc. $CL \sqcap BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ fiet EL. Nimirum si D sit intra A et T, seu quando $TD \sqcap +TA - AD$, erit $+EC + CL$, quando D intra A et B, tunc cadit E inter C. et L. et erit $EL \sqcap -EC + CL$. et $TD \sqcap TA + AD$: Quando D ultra B tunc TD etiam $TA + AD$. sed $EL \sqcap +EC - CL$. Quando D ultra T, seu quando $TD \sqcap -TA + AD$ tunc $EL \sqcap EC + CL$. Ut ergo digeramus erunt situs quatuor ipsius D, varietatem afferentes, $(1)D, (2)D, (3)D, (4)D$.

$(1)D$, dat:	$TD \sqcap -TA + AD$	$EL \sqcap +EC + CL$
$(2)D$ ...	$TD \sqcap +TA - AD$	$EL \sqcap +EC + CL$
$(3)D$ ...	$TD \sqcap +TA + AD$	$EL \sqcap -EC + CL$
$(4)D$ ...	$TD \sqcap +TA + AD$	$EL \sqcap +EC - CL$

Generaliter ergo TD ita exprimemus:

$$TD \sqcap \pm TA \mp AD\,, \quad EL \sqcap \pm EC \mp CL.$$

Ergo hoc modo $DE \sqcap \dfrac{\pm ax \pm af \mp xf}{a}$ et $EL \sqcap \pm \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} \mp \sqrt{2ax - x^2}$.

Ponendo jam $DE \sqcap y$, fiet: $\dfrac{ay \mp af}{\pm a \mp f} \sqcap x$, et $x^2 \sqcap \dfrac{a^2y^2 \mp 2a^2fy + a^2f^2}{a^2 \mp 2af + f^2}$.

Unde $EL \sqcap z \sqcap \dfrac{\pm f \pm a}{a} \frown \sqrt{2ax - x^2}$.

Jam $2ax - x^2 \sqcap \dfrac{2a^2y \mp 2a^2f \frown \pm a \mp f, -a^2y^2 \pm 2a^2fy - a^2f^2}{a^2 \mp 2af + f^2}$ sive

$$\sqcap \frac{\pm 2a^{\cancel{3}}y \boxed{\mp 2a^2fy} \mp 2a^{\cancel{3}}f + 2a^2f^2, -\cancel{a^2}y^2 \boxed{\pm 2a^2fy} \boxed{-a^2f^2}}{\boxed{a^2 \mp 2af + f^2}} \sqcap \frac{\cancel{a^2}z^2}{\boxed{f^2 \mp 2af + a^2}}.$$

Adeoque: $z^2 \sqcap \pm 2ay - y^2 \mp 2af$ qui locus est ad Circulum; et cum $f \sqcap 0$. tunc fit $z^2 \sqcap +2ay - y^2$: aequatio simpliciter ad ipsummet circulum datum, quae est relatio inter ordinatam ad planum, et reductam in cycloeide primaria, quod cum aliunde sit notum index est calculi veri.

Jam sumtis aliis curvis, parabola, Hyperbola, Ellipsi, videamus an casus esse possint, quo puncta D. talia in illis sumantur, ut relatio ordinatarum et reductarum Trochoeidis parabolicae vel alterius, explicetur aequatione ad Circulum.

19 simpliciter *erg. L* 19 relatio *(1)* productae ad ord *(2)* inter *L* 20 f. , qvod ... veri *erg. L* 23 ut *(1)* locus *(2)* relatio *L* 24 vel alterius *erg. L* 24 ad *(1)* Hy *(2)* Circulum *L*

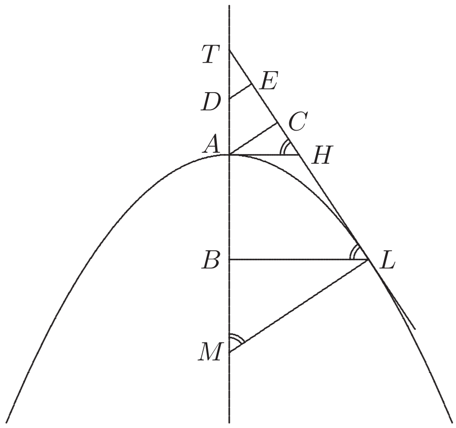


fig. 4.

Ac primum in parabolam inquiramus, et quo major sit calculi simplicitas casum investigemus faciliorem cum punctum D datur in axe parabolae, et intra T et A. Erit $TD \sqcap TA - AD$ seu $\sqcap x - f$. Ergo $AH \sqcap \frac{BL}{2} \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}$. Jam $\frac{AC}{AH \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}} \sqcap \frac{\sqrt{2ax} \sqcap BL}{ML \sqcap \sqrt{a^2+2ax}}$. Ergo $AC \sqcap \frac{\cancel{2}ax}{\cancel{2}\sqrt{a^2+2ax}}$. Jam $\frac{DE}{AC} \sqcap \frac{TD \sqcap x-f}{TA \sqcap x}$. Ergo $DE \sqcap \frac{AC \frown x-f}{x}$ sive $DE \sqcap \frac{\cancel{2}ax-\cancel{2}af}{\cancel{2}\sqrt{a^2+2ax}}$. Porro $TL \sqcap \sqrt{x^2+2ax}$. Erit EL ad TL, ut DB seu $f+x$ ad $TB \sqcap 2x$. Ergo $EL \sqcap \frac{f+x, \frown \sqrt{2ax+x^2}}{2x}$.

Jam $EL^2 \sqcap z^2 \sqcap f^2 + 2fx + x^2 \frown \frac{2a\cancel{x}+x^{\cancel{2}}}{4x^{\cancel{2}}}$, sive

$$\begin{array}{lllllll} \boxed{4z^2x} & \sqcap & 2af^2 & + 4af\ x & + 2a\ x^2 & + x^3 \ \sqcap\ 0 & \odot \\ & & + \ f^2 & .. + 2f & .. & & \\ & & - 4z^2 & .. & & & \end{array}$$

Eodem modo $DE^2 \sqcap y^2 \sqcap \frac{a^2x^2 - 2a^2fx + a^2f^2}{a^2+2ax}$, sive

3 in *(1)* diametro *(2)* axe *L* 8 f. $\sqcap \frac{\cancel{2}\mathrm{ax} - \cancel{2}\mathrm{af}}{\cancel{2}\sqrt{\mathrm{a}^2+2\mathrm{ax}}}$. *(1)* porro EL est ad DB *(2)* porro *L* 10 f. $\sqcap \frac{\mathrm{f}+\mathrm{x}, \frown \sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2}}{2\mathrm{x}}$ *(1)* $\sqcap \frac{\mathrm{f}+\mathrm{x} \frown}{\quad}$ *(2)* Jam DE sit y, erit $\mathrm{y}^2 \sqcap$ *(3)* Jam | EL $\sqcap$ z *ändert Hrsg.* | $\sqcap \mathrm{f}^2$ *L*

9 $TL \sqcap \sqrt{x^2+2ax}$: Richtig wäre $TL = \sqrt{4x^2+2ax}$; auch die folgende Verhältnisgleichung ist falsch, es müsste $EL : TL = DM : TM = (f+x+a) : (2x+a)$ angesetzt werden. Die Fehler beeinträchtigen die weiteren Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2f & x^2 + f^2 & x \sqcap 0\,. & ☽ \\ \quad -\dfrac{2y^2}{a} & .. \;\; - y^2 & .. & \end{array}$$

Unde pro x^3 substituendo in priori ⊙ ejus valorem ex ☽ fiet:

$$\begin{array}{llll} \;\;2a & x^2 + 4af & x + 2af^2 & \sqcap\ 0. \\ +4f & .. \;\; + \;\; f^2 & .. & \\ +\dfrac{2y^2}{a} & .. \;\; - \;\; f^2 & .. & \\ & \;\;\;\;\;\; + \;\; y^2 & .. & \\ & \;\;\;\;\;\; - 4z^2 & .. & \end{array}$$

et pro x^2, substituendo ejus valorem ex ☽, nempe $\begin{array}{l} 2f \quad x - f^2 \\ +\dfrac{2y^2}{a} .. + y^2 \end{array}$ fiet:

$$\left.\begin{array}{lcl} \;\;2a & \frown & 2f \\ +4f & & \dfrac{2y^2}{a} \\ +\dfrac{2y^2}{a} & & \end{array}\right\} \begin{array}{l} +4\,af\ ,, \frown x \text{ etc.} \\ + \;\; y^2 \\ -4\,z^2 \end{array}$$

Sed cum ita calculus fiat prolixior quam velim, contrahendi causa primam aequationem ⊙ per brachylogiam ita scribemus: $x^3 + lx^2 + amx + 2af^2 \sqcap 0.$ ⊙ alteram ☽ ita: $x^2 + nx + ap \sqcap 0$. Unde ex ☽. erit $x^3 \sqcap -nx^2 - apx$. Unde ex ⊙ et ☽. fiet ☿:

$$\begin{array}{llll} +l & x^2 + am & x + 2af^2 & \sqcap\ 0. \\ -n & .. \;\; - ap & .. & \end{array}$$

et pro x^2 substituendo ejus valorem ex aeq. ☽. qui est $-nx - ap$. fiet:

$$\begin{array}{llll} +l & x^2 & \sqcap & -ln\ x - lap \\ -n & .. & & +n^2\ .. + nap \end{array}$$

19 valorem *(1)* |, fiet *streicht Hrsg.* | *(2)* ex aeq. ☽ *(a)* fiet *(b)* qvi *L*

$$\text{Unde aeq. ☿:}\quad \begin{array}{l} +am\,x^2 + 2af^2\,x \sqcap 0. \\ -ap \;..\; -lap \;.. \\ -ln \;..\; +nap \;.. \\ +n^2 \;.. \end{array} \quad \text{sive}\quad x^2 \sqcap \frac{\left\{\begin{array}{l}+2af^2\\ -lap\\ +nap\end{array}\right.}{\begin{array}{l}+am\\ -ap\\ -ln\\ +n^2\end{array}}\,x \sqcap -nx-ap.\ \text{Ergo}$$

$x \sqcap \dfrac{-a^2mp + a^2p^2 - lnap + n^2ap}{2af^2 - lap\boxed{+nap}, +nam\boxed{-apn} - ln^2 + n^3}$. Jam idem $x \sqcap \dfrac{-2af^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$. Sed cum n contineat y^2, patet ascendere incognitas ad sextam usque dimensionem. Et multo impeditior erit, si punctum D assumatur, extra axem. Et credam casum aliquem inveniri posse, in quo possit ita deprimi hinc nota aequatio, ut fiat inde aequatio ad Circulum; quo facto haberemus reductionem quadraturae Hyperbolae ad quadraturam Circuli.

Si D sit ipse vertex erit $DE \sqcap AC \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+2ax}}$. et $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$. Unde $EL \sqcap CL$ ponendo z, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax + x^2$. et $DE \sqcap AC$ ponendo y, fiet: $y^2 \sqcap \dfrac{a^2x^2}{a^2+2ax}$, et ex hac et: $x^2 \sqcap y^2 \frown \dfrac{a^2+2ax}{a^2}$. Unde inserendo hunc valorem in priore, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax + \dfrac{y^2 \frown a^2 + 2ax}{a^2}$, sive $4z^2a^2 \sqcap 2a^3x + a^2y^2 + 2ay^2x$, sive $x \sqcap \dfrac{4z^2a^{\cancel{2}} - a^{\cancel{2}}y^2}{2a^{\cancel{3}2} + 2\cancel{a}y^2}$; et $x^2 \sqcap \dfrac{16z^2a^2 - 8z^2y^2a^2 + a^2y^4}{4a^4, +8a^2y^2 + 4y^4}$. Unde $4z^2 \sqcap \dfrac{4z^2a^2 - a^2y^2}{\cancel{2}a^2 + \cancel{2}y^2} + x^2$ etc. Sed hinc judicatu

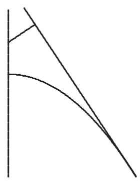
8 ad *(1)* sextum usque gradum *(2)* sextam *L* 12 vertex *(1)* | fiet *streicht Hrsg.* | *(2)* erit *L* 13 $+\mathrm{x}^2$. | qvae est ad Hyperbolam *gestr.* | et *L* 13 f. $\sqcap \dfrac{\mathrm{a^2x^2}}{\mathrm{a^2+2ax}}$ *(1)*. ordinandoqve *(2)*, et *L* 15 sive | ordinando *gestr.* | $\mathrm{4z^2a^2}$ *L* 15 $+\mathrm{2ay^2x}$, *(1)* sive $\mathrm{x^2} \sqcap \dfrac{\mathrm{4z^2a^2x - a^2y^2x}}{\mathrm{2a^3 + 2ay^2}} \sqcap \dfrac{\mathrm{a^{\cancel{2}} + 2\cancel{a}x}}{\mathrm{a^{\cancel{2}}}}$ et reducendo: $\mathrm{4z^2a^3x - a^3y^2x \sqcap 2a^4y^2 + 2a^3xy^2 + 2a^2y^4 + 2ay^4x}$, | sive *streicht Hrsg.* | $\mathrm{x} \sqcap$ *(2)* sive *L*

3 $x^2 \sqcap$: Vor der folgenden Klammer fehlt ein Minuszeichen. Dieser und ein weiterer Vorzeichenfehler beeinträchtigen die daraus berechnete erste Gleichung für x in Z. 7, die zweite wird direkt aus der Gleichung ☿ bestimmt. 12 $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$: vgl. die Erl. zu S. 208 Z. 9. 16 $x^2 \sqcap$: Konsequent gerechnet müsste der erste Term im Zähler der rechten Seite $16z^4a^2$ lauten. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

facile est, etiam in simplicissimo exemplo calculum sic satis prolixum, tanto magis in aliis. Sed persequi in omnibus Conicis valde operae pretium est, hinc enim in magnam Spem venio omnes Conicas ad se invicem reduci posse. Eadem serviet methodus etiam ad inveniendas dimensiones absolutas quarundam curvarum, dum scilicet quaeruntur quarum revolutione describantur curvae, quae aliarum quoque cognitarum revolutione describuntur, v. g. si Trochoeides paraboloeidis Heuratianae alterius quoque curvae Trochoeides esse possit, huc enim totius hujus schedae inquisitio redit, an fieri possit, ut una eademque curva sit Trochoeides plurium, eo ipso enim eae curvae erunt sygnotae; item an figurae quaedam cognitae, aliarum Trochoeides esse possint. Sed restat tantum inquirendum nonnihil, si punctum ipsum A non sit fixum, sed varians.

---

10 *Figur unter dem gestrichenen Text, nicht gestrichen:*



1 exemplo *(1)* rem sic satis *(2)* calculum *L* 3 venio *(1)* | posse *streicht Hrsg.* | *(2)* omnes *L* 7 enim *(1)* res *(2)* totius *L* 8 f. curvae *(1)* ad se invicem *(2)* erunt sygnotae *(a)*. Videndum *(b)*; item *L* 10 si *(1)* Tangens a *(2)* punctum *L* 10 varians. | sed de his vide parte 2. inqvisitionis in methodum Tangentium Cartesii inversam. 1674. *gestr.* | *L*

---

10 vide: N. 4 Teil 2.

29. APPENDIX SCHEDIASMATIS DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONE REDUCTARUM AD ORDINATAS

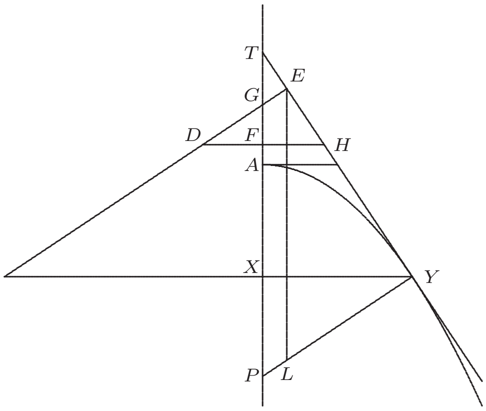
[Am oder kurz nach dem 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 15. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 15 r°. Bl. 15 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 829

Datierungsgründe: Das Stück ist nach dem auf den 24. Dezember datierten N. 28 entstanden.

Xb. 1674.

Appendix schediasmatis de Trochoeidibus et relatione Reductarum ad ordinatas



[*Fig. 1*]

Curva AY parabola, axis AX. tangens TY. punctum quoddam fixum D, ex quo perpendicularis ad tangentem DE. erit ergo parallela ipsi PY. Quaeritur relatio inter DE et EY. Datur DF, quam vocabimus $\underline{d}$, et FA, quam vocabimus $\underline{f}$. Est autem ex natura parabolae $XP \sqcap \underline{a}$, semilatus rectum et $TA \sqcap AX \sqcap \underline{x}$. et $XY \sqcap \sqrt{2ax}$. Ergo $TY \sqcap \sqrt{4x^2 + 2ax}$.

$\dfrac{GF}{DF \sqcap d} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{a}$. Ergo $GF \sqcap \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $TG \sqcap AT$ sive x, demtis $AF + GF$. Ergo $TG \sqcap x - f - \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $\dfrac{TE}{TG} \sqcap \dfrac{TY}{TP \sqcap 2x + a}$. Ergo $TE \sqcap$

---

21 $\sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{a}$: Richtig wäre $\dfrac{a}{\sqrt{2ax}}$. Der Fehler und weitere Versehen beeinträchtigen die folgenden Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzlichen Überlegungen.

$\frac{\sqrt{4x^2+2ax},\frown x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$ et $EY \sqcap TY - TE \sqcap \sqrt{4x^2+2ax} \frown 1 - \frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$ sive $EY \sqcap \sqrt{4x^2+2ax}\frown \frac{x+a+f+\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$.

Jam $DG \sqcap \sqrt{d^2+\frac{d^2}{a^2}2ax}$, sive $DG\sqcap\sqrt{\frac{d^2a^2+d^2 2ax}{a^2}}$, sive $DG \sqcap \frac{d}{a}\sqrt{a^2+2ax}$.

Et $GE \sqcap \sqrt{TG^2-TE^2}$. sive $GE \sqcap \sqrt{TG^2 - \frac{TY^2,TG^2}{4x^2+4ax+a^2}}$, sive $GE \sqcap \frac{TG}{2x+a}\sqrt{\boxed{4x^2}+2\boxed{4}ax+a^2,\boxed{-4x^2}\boxed{-2ax}}$

sive $GE \sqcap \frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}\sqrt{2ax+a^2}$.

Et $DE \sqcap \frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}+\frac{d}{a},\frown\sqrt{2ax+a^2}$, sive

$$\frac{xa-fa-d\sqrt{2ax}+2dx+ad}{\boxed{2ax+a^2}\sqrt{2ax+a^2}}\boxed{\sqrt{2ax+a^2}} \sqcap z.$$

sive $\frac{-d\sqrt{2ax}\; e\boxed{\begin{matrix}+a\\+[2]d\end{matrix}}\begin{matrix}x\\.\end{matrix}\; g\boxed{\begin{matrix}-f\\+d\end{matrix}}\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}{\sqrt{2ax+a^2}} \sqcap z$. et quadrando:

$$\frac{2d^2ax-2dex\sqrt{2ax}-2dga\sqrt{2ax},+e^2x^2+2egax+g^2a^2}{2ax+a^2}\sqcap z^2$$

---

1 f. *Am rechten Rand:* Quaeritur relatio inter DE et EY.
Am linken Rand, isoliert: Jam $\frac{FH}{\sqrt{2ax}} \sqcap \frac{TF\sqcap x-f}{2x}$. $\frac{z[\sqcap]DE}{\omega\sqcap EY}\sqcap\frac{DH\sqcap d+FH}{EL}$. $\frac{z}{\omega}\sqcap$ $\frac{d+x-f\frac{\sqrt{2ax}}{2x}}{EL\sqcap}$ [*bricht ab*]

4 $\sqcap \sqrt{TG^2-TE^2}$. *(1)* sive GE $\sqcap x^2-2fx-\frac{2d}{a}x\sqrt{2ax},+f^2+\frac{2df}{a}\sqrt{2ax}+\frac{d^2}{a^2}2ax,,-$ *(2)* sive *L*

Unde ordinando: $-\,2axz^2 - a^2z^2\;[+e^2x^2] + 2d^2\,ax + g^2a^2 \sqcap + 2dex\,\sqrt{2ax}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2eg \qquad\qquad\qquad + 2dga$

$$\text{Aequationes duae: } z \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\,\sqrt{2x+a}}\;\boxed{\sqrt{2x+a}} \frown \sqrt{a}$$

$$\omega \sqcap \frac{x + a + f + \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\,\sqrt{2x+a}}\;\boxed{\sqrt{4x^2+2ax}}\,\sqrt{2x} \frown \boxed{\sqrt{2x+a}}$$

$$\sqrt{2x+a} \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{z}\,\sqrt{a} \sqcap \frac{x + a + f + \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\omega}\,\sqrt{2x} \text{ sive}$$

$$+x - f \frown \omega\sqrt{a} - \frac{d}{a}\sqrt{a} \frown 2xz \sqcap \begin{array}{ll} & \frac{d}{\cancel{a}}\,\omega\,\cancel{a}\;\;\sqrt{2x} \\ + & x\;\;z \\ + & a\;\;. \\ + & f\;\;. \end{array}$$

1+3 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* Error

1+3 $\sqrt{2\mathrm{ax}}$ *(1)* An brevius: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{x-f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x+a}}, \frown \sqrt{2\mathrm{ax+a}^2} \sqcap \mathrm{z}$. Ergo $\frac{\mathrm{x-f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x+a}}$ *(a)* $\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2} \sqcap -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2} + \mathrm{z} \sqcap$ *(b)* $\sqcap \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2}+\mathrm{z}}{\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2}} \sqcap \frac{\mathrm{EY} \sqcap \omega}{\sqrt{4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}}}$. adeoqve: $\frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{a}^2}2\mathrm{ax+a}^2 - \frac{2\mathrm{zd}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2}+\mathrm{z}^2}{2\mathrm{ax+a}^2} \sqcap \frac{\omega^2}{4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}}$. Jam $2\mathrm{ax+a}^2 \frown \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$ dat $4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}$ vel $4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax} \frown \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{x}} \sqcap 2\mathrm{ax+a}^2$ ergo dividendo utrobiqve per $2\mathrm{ax+a}^2$, fiet: $\mathrm{xd}^2 \frown \llcorner 2\mathrm{ax+a}^2 \lrcorner\lrcorner - 2\mathrm{d}\cancel{\mathrm{z}}\mathrm{xa}\;\boxed{\sqrt{2\mathrm{ax+a}^2}}\;\frac{\mathrm{xa-fa-d}\sqrt{2\mathrm{ax}}+2\mathrm{dx+ad}}{\cancel{\mathrm{z}}} + \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2\mathrm{x} \sqcap \mathrm{a}^3\omega^2$ sive $\frac{\mathrm{xd}^2 2\mathrm{ax} + \mathrm{xd}^2\mathrm{a}^2, -2\mathrm{dxaxa} + 2\mathrm{dxafa} - 2\mathrm{dxa}2\mathrm{dx} - 2\mathrm{dxaad} + \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2\mathrm{x} - \mathrm{a}^3\omega^2}{\cancel{\mathrm{d}}} \sqcap \sqrt{2\mathrm{ax}} \sqcap \frac{\begin{array}{c}-2\mathrm{axz}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{d}^2\mathrm{ax} + \mathrm{g}^2\mathrm{a}^2 \\ +2\mathrm{eg}\,.\,.\end{array}}{\begin{array}{c}+2\cancel{\mathrm{d}}\mathrm{ex} \\ +2\cancel{\mathrm{d}}\mathrm{ga}\end{array}}$ *(2)* Aeqvationes *(a)* tres: *(b)* duae *L* 5 f. $\sqrt{2\mathrm{x}}$ *(1)* $\sqcap$ *(2)* sive $\mathrm{x}\omega - \mathrm{f}\omega - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}$ *(3)* sive *(a)* $-\mathrm{x}+\mathrm{f}$ *(b)* $+\mathrm{x}-\mathrm{f}$ *L*

---

3 $z \sqcap$: Leibniz setzt für $z = DE$ irrtümlich den von ihm für GE berechneten Wert ein.

et ordinando

$$\begin{array}{llll} + & \omega\,\sqrt{a}\,x - \omega f\sqrt{a} \;\sqcap & x\,z\,\sqrt{2x} \\ -\,2\,z\,\dfrac{d}{a}\,\sqrt{a}\;. & & \omega\,d \\ & & +\,a\,z \\ & & +\,f\,z \end{array}$$

sive

$$\sqrt{2x} \sqcap \frac{\begin{array}{l}\omega\sqrt{a}\;x - \omega f\sqrt{a} \\ -\dfrac{2zd}{a}\sqrt{a}\;\;.\end{array}}{\begin{array}{l}xz + d\omega \\ az \\ fz\end{array}} \sqcap \frac{-z\sqrt{2x+a}}{\boxed{\sqrt{a}}} + x\sqrt{a} - f\sqrt{a},, \smile \frac{d}{a}\,\boxed{\sqrt{a}} \sqcap \frac{\omega\sqrt{2x+a} - \dfrac{d}{a}\sqrt{a}2x}{x+a+f}.$$

$$\text{Ergo } \sqrt{2x+a} \;\sqcap\; \frac{\begin{array}{l}\omega\;\sqrt{a}\;x - \omega f\sqrt{a} \\ -\dfrac{2zd}{a}\sqrt{a}\;\;.\end{array}}{\begin{array}{l}xz + d\omega \\ az \\ f\,.\end{array}} \;\frown\; d,,+f-x,,, \smile -z$$

$$\sqcap \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\frown\; x+a+f,, + \frac{d}{a}\sqrt{a}2x,,, \smile \omega.$$

Unde

$$\begin{array}{l}\omega\;\sqrt{a}\,x - \omega f\,\boxed{\sqrt{a}},, \frown + \dfrac{d}{z} \quad ,,, \dfrac{+f-x}{z}\,\boxed{\sqrt{a}} + \dfrac{d}{a\omega}2x\,\boxed{\sqrt{a}},, \frown xz + d\omega + a\,z \sqcap 0. \\ -\dfrac{2zd}{a}\sqrt{a}\;\;. \qquad\qquad \dfrac{x+a+f}{\omega} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +f\;\;.\end{array}$$

Unde reducendo patet x non assurgere ultra quadratum. Cum antea semper ad cubum assurgere videretur, quo specimine discimus non semper ad quadrationes et irrationalium ablationes properandum.

1 *(1)* et qvadrando: x^2 *(2)* et *L* 8–10 $\begin{array}{l}\smile -z \\ \smile \;\;\omega\end{array}$ *(1)* $\Big\}$ sive $\dfrac{\begin{array}{l}\omega\sqrt{2a}\;\;x - \omega f\sqrt{a} \\ -2z\dfrac{d\sqrt{a}}{a}\;\;.\end{array}}{\boxed{\begin{array}{r}x+d \\ a \\ f\end{array}}}, \frown \boxed{\begin{array}{c}d \\ \\ x \\ \\ a \\ f\end{array}},, + $ *(2)* Unde *L*

8 $+f-x$: Konsequent gerechnet müssten beide Terme mit $\sqrt{a}$ multipliziert werden.

Ex hac jam aequatione repertus valor ipsius x. inseratur in aliqua ex aequationibus superioribus, et evanescente x. solae restabunt incognitae z et ω.

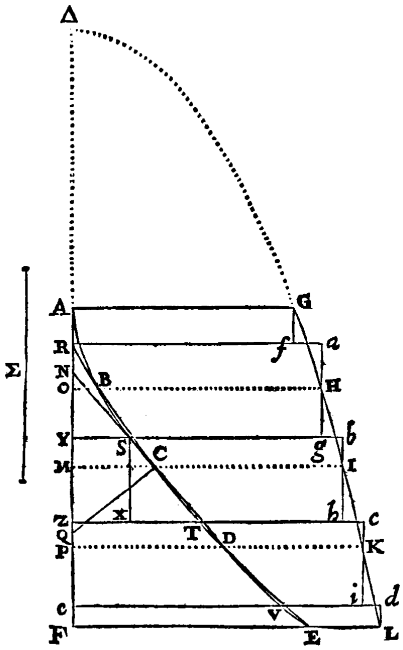
Quo facto videndum est an aequatio inde orta sit ejusmodi, ipsis, d. et f (: et inde pendente e :) pro arbitrio explicatis, ut possit aequatio producta dividi per aliam ad Circulum, $z^2 \sqcap 2a\omega - \omega^2 + 2ag$. in qua rursus g arbitraria est. Ope igitur trium arbitrariarum utique procederet divisio, et proinde curva eadem certo casu a circulo et a parabola provolutis describeretur, adeoque haberetur curvae circularis et parabolicae dimensio, vel quadratura Circuli et Hyperbolae simul.

30. CURVAE MENSURABILES HEURATIANAE
[**noch**]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 149. 1 Ausschnitt ca 18,0 x 6,2 cm. 11 Z. auf Bl. 149 r°. Bl. 149 v° leer. Überschrift ergänzt. Am unteren Rand Fragmente von Kurven in Blindtechnik.
Cc 2, Nr. 901

Datierungsgründe: [**noch**]

Curvae mensurabiles Heuratianae



[*Fig. 1; aus DGS I S. 518*]

Si sit aequatio: $ay^{z-1} \sqcap x^z$ semper inde Heuratii calculo, curva quadrabilis repe-

10 Heuratii: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I, S. 517–520.

rietur, nempe fiet (vide fig. Heurat. apud Schoten p. 518. 519) $MC. \sqcap \sqrt{(z-1)}\,\frac{x^z}{a}$. et $MC^2 \sqcap \sqrt{(z-1)}\,\frac{x^{2z}}{a^2}$. Unde aequatio:

$$\begin{array}{cccccc} s^2 & -2sx & +x^2 & +\sqrt{(z-1)\,\frac{x^{2z}}{a^2}} & \sqcap & v^2. \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2z}{z-1} & & 0. \end{array}$$

Videndum hic an liceat multiplicare hoc modo et an idem proveniat, quod provenit ablata irrationalitate.

4 f. *Darunter:* Formulae omnium dimensionum. Curvarum in rectum extensio.

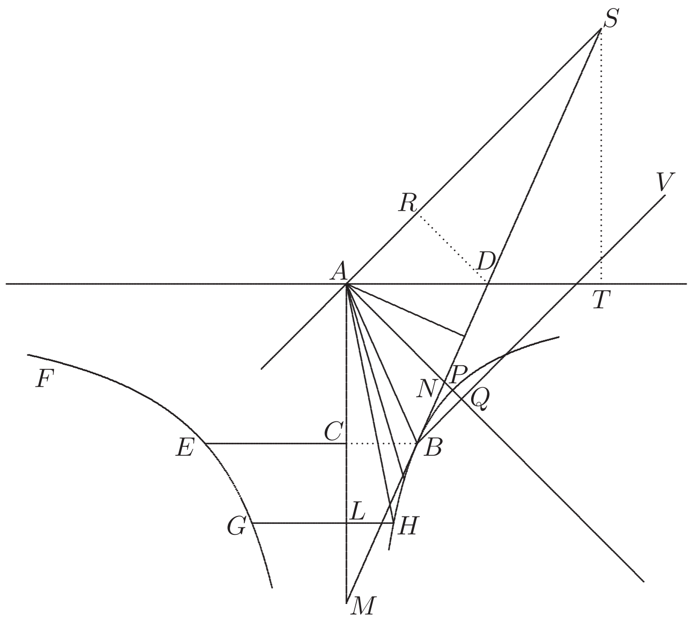
1 519) *(1)* MQ $\sqcap$ *(a)* $\frac{z}{2a}x^z$ *(b)* $\frac{z}{2a^z}x^z$, eiusqve qvadratum $\frac{z^2}{4a^{2z}}x^{2z}$. Cui adde y^2. Nempe y $\sqcap$ *(2)* MC. *L* 4 f. *(1)* Haec ad formu *(2)* Aeqvatio *(3)* Formulae *L*

31. THEOREMATA TETRAGONISTICA GENERALIA EX TANGENTIBUS
19. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 123. 1 Zettel ca 19,5 x 12,5 cm. 2 S. Datum u. Überschrift ergänzt. Auf Bl. 123 r° oben Cc 2, Nr. 1077 (gedr.: J. E. Hofmann, *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz*, 1970, S. 104).
Cc 2, Nr. 1076

19 Octob. 1675

Theoremata tetragonistica generalia, ex tangentibus



[*Fig. 1*]

A Centrum Hyperbolae, AC. abscissa ex Asymptoto[,] CB ordinata, BD tangens

8 *(1)* Quadraturae *(2)* problemata *(3)* theoremata *L*

occurrens alteri Asymptoto in D. Sit BCE recta, ita ut $CE \sqcap AD$. idque ubivis factum intelligatur. Curva FEG transire intelligatur per illa puncta (cui etiam DA et AC productae Asymptoti erunt). Erit exempli gratia spatium quadrilineum $ECLGE$, aequale trilineo $BAHB$. ut ex theoremate meo generali constat. Jam quaeramus calculo AD, vel CE. Ducta DBM, erit ACM dupla AC sive $AC \sqcap CM$. ex natura Hyperbolae aequilaterae. Ergo $AD \sqcap 2CB$. Sit $AC \sqcap x$. erit $CB \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. et $EC \sqcap \dfrac{2a^2}{x}$.

Hinc demonstratur illud sane pulcherrimum quod sector Hyperbolicus ABH, duplicatus aequetur ipsi $ECLGE$, id est duplo $BCLHB$, id est quod sector Hyperbolicus aequetur portioni respondenti ad Asymptoton. Ducatur Axis APQ. vertex P. axis transversus ARS. Sit DR. ad eum normalis, ob angulum RAD semirectum erit $AD^2 \sqcap \dfrac{2a^2}{x}\square, \sqcap \dfrac{4a^4}{x^2} \sqcap AR^2+RD^2$, et $AR^2 \sqcap RD^2$, et $RD \sqcap AR$, et $AR \sqcap \dfrac{a^2\sqrt{2}}{x}$. Eodem modo ST, perpendicularis ad $ADT, \sqcap AT. \sqcap AD+DT$. Ergo $ST \sqcap \dfrac{2a^2}{x}+DT$. Jam $\dfrac{ST}{DT} \sqcap \dfrac{AM}{AD} \sqcap \dfrac{2x}{\dfrac{2a^2}{x}} \sqcap \dfrac{x^2}{a^2}$ seu in duplicata ratione x ad a. ergo $ST \sqcap \dfrac{x^2}{a^2}\,DT \sqcap \dfrac{2a^2}{x}+DT$. Ergo $x^3DT-a^2xDT \sqcap 2a^4$. et $DT \sqcap \dfrac{2a^4}{x^3-a^2x}$ et $AT \sqcap ST \sqcap \dfrac{2a^4x}{x^2-a^2}$. et $AS \sqcap \dfrac{2a^4x\sqrt{2}}{x^2-a^2}$ quae etiam pendet ideo ex quadratura Hyperbolae, quod tamen et aliunde demonstrari potest, quia si addatur, Hyperbolae commensurabilis, quae est $2a^4\sqrt{2}a$, fiet $\dfrac{2a^4x\sqrt{2}+2a^5\sqrt{2}}{x^2-a^2}$,

---

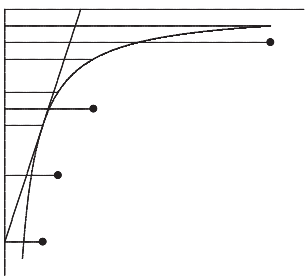
6 *Nebenbetrachtung:* $xy \sqcap a^2$. fiat $\not{x}l \sqcap -\not{x}y$.

2 Curva FGH *L ändert Hrsg.* 3 producta *L ändert Hrsg.* 3 erunt) *(1)* Spatium ei respondens *(2)* Erit ... spatium *(a)* mixtilineum *(b)* qvadrilineum *L* 4 ex *(1)* alibi *(2)* theoremate *L* 8 duplo BAHB *L ändert Hrsg.*

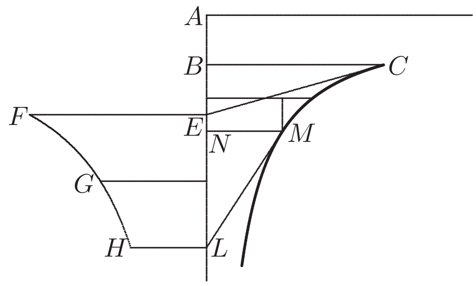
---

3 f. aequale ... $BAHB$: Die Aussage ist falsch. Die Fläche $ECLGE$ ist gleich dem Doppelten der Fläche $BAHB$. Leibniz wiederholt die Aussage unten Z. 7 f. in korrekter Form. 4 theoremate: Gemeint ist der Transmutationssatz. 14 $\dfrac{2a^4x}{x^2-a^2}$: Richtig wäre $\dfrac{2a^2x}{x^2-a^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler beeinträchtigt die allgemeine Überlegung nicht.

et dividendo per $x+a$, fiet: $\dfrac{2a^4\sqrt{2}}{x-a}$, ad Hyperbolam. Imo video errorem meum, non x seu AC. sed AQ. sumenda est.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

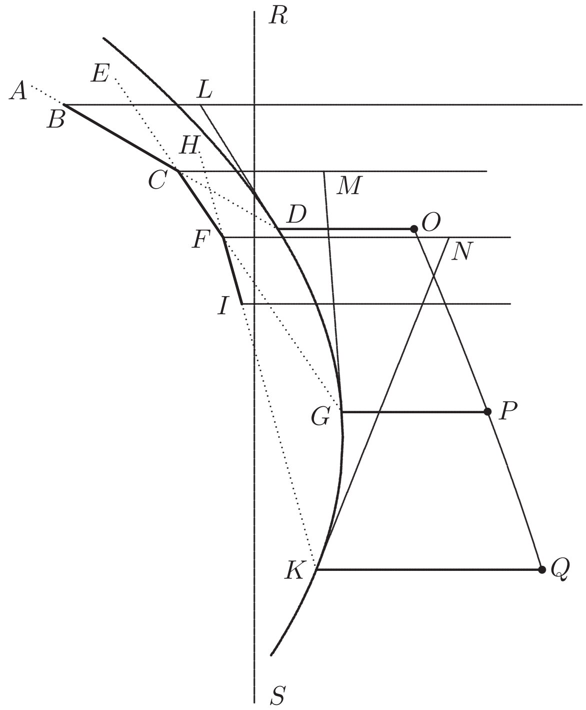
$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. $AE \sqcap 2AB$. $EF \sqcap BC$. erit $FGHLEF \sqcap$ bis $CELMC$. Est $AE \sqcap 2x \sqcap z$. Ergo $x \sqcap \dfrac{z}{2}$. et $EF \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{2a^2}{z}$. Unde illud rursus in Hyperbola memorabile[:] quadrilineum $CBNMC$. aequari quadrilineo $CELMC$ duplicato.

Theorema illud meum memorabile, jam video non nisi Casum esse unicum ac simplicissimum generalioris, inspice figuram ⊙.

1 f. Imo … est. *erg.* *L* 6 aeqvari *(1)* tril *(2)* qvadrilineo CELMC duplicato | unde ▽CBE+ *gestr.* | *L*

6 quadrilineum … duplicato: Die Behauptung ist nicht richtig. Die beiden Flächen $CBNMC$ und $CELMC$ sind gleich.

fig. ⊙



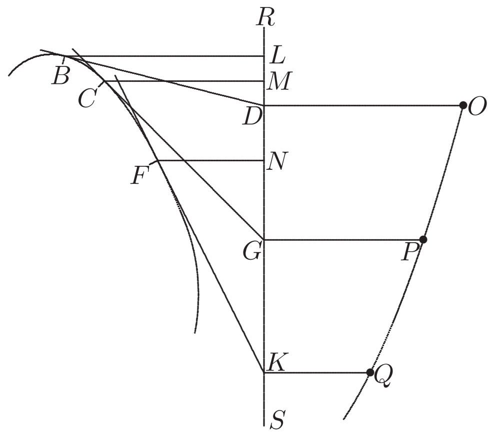
[*Fig. 4*]

Sit curva $BCFI$, cujus latera infinite parva BC, CF, FI. Sit alia curva DGK, cui in punctis $D.G.K.$ tangentes prioris nempe $ABCD, ECFG, HFIK$, occurrant. Jam per puncta $B.C.F.$ transeant rectae indefinitae, BL, CM, FN, et DL, GM, KN. sint tangentes curvae DGK, transferatur BL ad DO, CM ad GP. FN ad KQ. erit spatium $DGKQPO$ duplum spatii $BDGKIFCB$. Cujus theorematis casus, quo $BCFI$ est linea recta, dat theorema quod antea consideraveram.

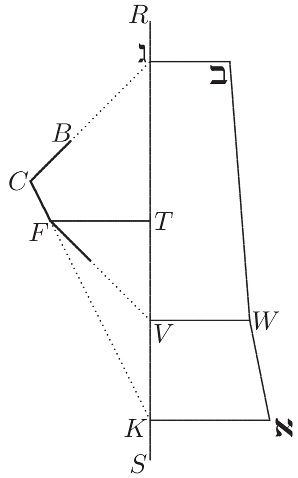
7 recta, *(1)* est illa qvam *(2)* dat L

1 *Fig. 4*: Eine skizzenhafte Vorstufe der Zeichnung wird nicht wiedergegeben. 7 antea: S. 221 Z. 4–6. Tatsächlich ergibt sich das dortige Theorem jedoch für den im folgenden betrachteten Spezialfall, in welchem DGK als gerade Linie angenommen wird.

fig. ☽



☿

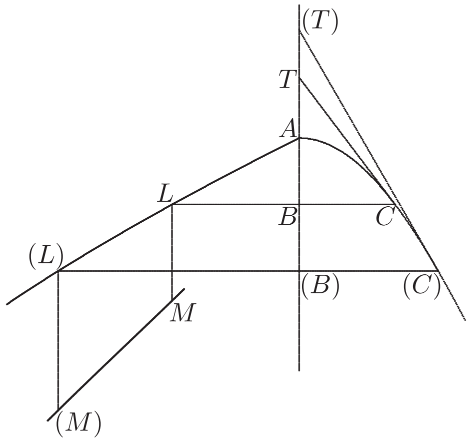


[*Fig. 5*] [*Fig. 6*]

Alter casus fingi potest, simplicissimus quo fingitur DGK linea recta, qualis RS. Sit in eam rem alia figura ☽, ubi curva BCF, cujus tangentes BD, CG, FK, occurrunt rectae RS, curvam DGK repraesentanti in punctis D, G, K. et translatis BL, in DO, CM in GP, parallelismo servato, erit spatium $ODKQPO$ spatii $BDKFCB$ duplum. Nec refert quem angulum ad eas faciat recta RS. Nec refert sitne curva BCF concava an convexa, vide fig. ☿. Ubi et illud annotatur, si ordinatae a curva BCF, ad rectam RS ut FT, quae sunt scilicet ad angulos, applicentur eidem ad angulos rectos, sed ibi ubi tangentes curvae BCF rectae RS. occurrunt, ut si transferatur FT. in VW. erit spatium בג*K*א*W*ב ipsius *B*ג*KFCB* duplum.

5 BLKFCB *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 6*: Die hier wiedergegebene Linie *FT* hat Leibniz in seiner Zeichnung irrtümlich gestrichen. 6–10 Nec ... duplum: Leibniz entgeht, dass das Verfahren im Fall des Auftretens einer zu *RS* parallelen Tangente so nicht anwendbar ist. Der Verlauf der Kurve א*W*א in Fig. 6 und die Aussage über die Flächenstücke אג*K*א*W*א und *B*ג*KFCB* sind nicht korrekt.



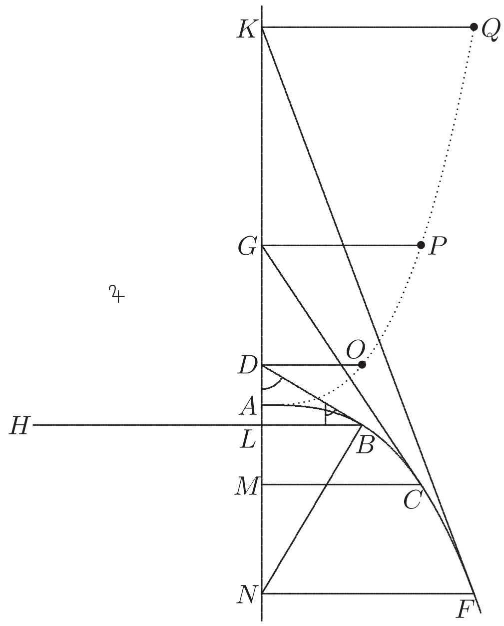
[*Fig. 7*]

Hinc aliud notabile. Si $C(C)$ sit curva, intervalla tangentium ab ordinatis in axe BT, $(B)(T)$ applicentur axi in $BL, (B)(L)$. et in punctis $L, (L)$ ipsae BC, ipsis BL normaliter applicentur, in $LM, (L)(M)$. erit spatium $LM(M)(L)L$ spatii $CT(T)(C)C$ duplum.

1–4 [*Fig. 7*] ... duplum *erg.* *L*

4 erit ... duplum: Die Behauptung ist falsch. Die Fläche $LM(M)(L)L$ ist gleich der Summe der Fläche $BC(C)(B)B$ und des Doppelten der Fläche $CT(T)(C)C$.

Quae mira satis theoremata sunt et foecunda.



[*Fig. 8*]

Primum in fig. ♃. Curva BCF. tangentes BD, CG, FK. et DO, GP, KQ, parallelae et aequales, LB, MC, FN. Erit spatium $ODKQPO$ duplum spatii $FKDBCF$. Sit v. g. $ABCF$ quadrans circuli cujus centrum N. ubi si $NL \sqcap x$. erit LD ad LB, ut LB ad x. sive $LD \sqcap \dfrac{a^2 - x^2}{x} \sqcap \dfrac{a^2}{x} - x \sqcap y$. et $ND \sqcap y + x \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap z$. Unde ut obiter dicam

---

6–226,3 *Daneben:* Vide plura 24 Octob. 1675.

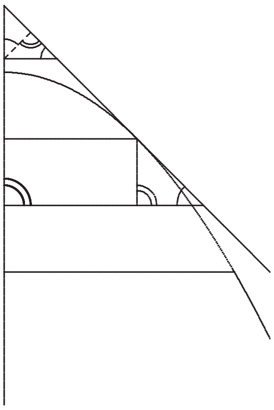
6–226,3 plura *(1)* 23 *(2)* 24

---

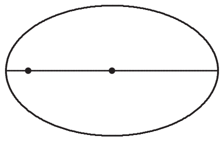
2 *Fig. 8*: Leibniz hat als charakteristisches Dreieck offensichtlich irrtümlich GCM ausgezeichnet und den Winkel in G markiert. Dies wurde in der Zeichnung korrigiert. 6–226,3 plura 24 Octob. 1675: N. 32, 34 und 35.

ND translatae ad LH sunt ad Hyperbolam simplicissimam et ex $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ characteristico tangentes insistentes arcubus, aequantur portioni hyperbolicae seu secantibus ad axem. Sed hoc obiter. Jam ut pergam si LB, transferatur ad DO, cum sit $\sqcap$ $\sqrt{a^2 - x^2}$. et $z \sqcap ND \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. erit $x \sqcap \dfrac{a^2}{z}$. et: $DO \sqcap \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{z^2}} \sqcap \dfrac{a\sqrt{z^2 - a^2}}{z}$, et curva cujus aequatio: $z^2\omega^2 \sqcap a^2z^2 - a^4$, erit Circulo commensurabilis sive: $\dfrac{a^4}{a^2 - \omega^2} \sqcap z^2$. sive $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} \sqcap z$. pendet ex circuli quadratura et est illa ipsa cujus spatia angulis homogenea sunt.

[*Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

6 *Darunter:* Vide ellipsi 24. Octob.

6 ellipsi 24. Octob.: N. 32. 7 Fig. 9 diente möglicherweise als allgemeine Merkfigur für die Diskussion zu Fig. 1. Fig. 10 steht wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Anwendung der Methode auf die Ellipse in N. 32.

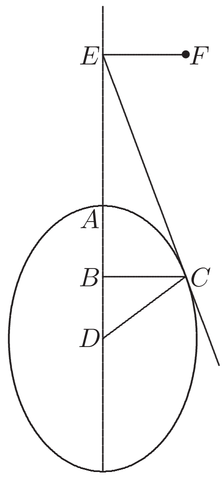
32. DIMENSIO CURVAE ELLIPSIS

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 147. 1 Streifen ca 19,2 x 5,3 cm. 8 Z. auf Bl. 147 r°. Bl. 147 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt. Bl. 147 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 34) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 35).
Cc 2, Nr. 1085

24 Octob. 1675

D i m e n s i o c u r v a e E l l i p s i s



[*Fig. 1*]

Ellipsis AC, in qua ABD axis, $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. erit $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. adeoque $2y^2 \sqcap 2al - \frac{2a}{q}xl$. et EB sive $l \sqcap \frac{y^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{2ax - \frac{a}{q}x^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} + x$ eritque $AE \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap z$. eritque $ax \sqcap az - \frac{a}{q}xz$. sive $ax + \frac{a}{q}xz \sqcap az$, sive $x \sqcap \frac{az}{a + \frac{a}{q}z}$. Ergo in $y \sqcap \sqrt{2ax - \frac{a}{q}x^2}$ pro

x substituendo ejus valorem, fiet: $EF \sqcap BC \sqcap \omega \sqcap \sqrt{\frac{2a^2z}{a+\frac{a}{q}z} - \frac{a}{q}\frac{a^2z^2}{a^2+2\frac{a^2}{q}z+\frac{a^2}{q^2}z^2}}$, vel: $\frac{\sqrt{2a^3[z]+2\frac{a^3}{q}z^2\boxed{-\frac{a^3}{q}z^2}}}{a+\frac{a}{q}z}$. Cujus proinde dimensio a quadratura Ellipseos sive Circuli pendet per theorema de quo sub finem 19. Octob.

3 pendet *(1)*. si sumeremus $\mathrm{a}+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{z}$ pro una qvantitate $\sqcap$ v, fiet $\omega \sqcap$ *(2)* per *L*

3 sub ... Octob.: N. 31 S. 225 Z. 3 – S. 226 Z. 6.

33. METHODUS TANGENTIUM INVERSA, IGNOTA
[**noch**]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 1. Ausschnitt von ca. 23,8 x max. 13,0 cm. Untere Schnittkante schräg geschwungen. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1v° leer. Überschrift ergänzt. Überschrift sowie Hervorhebungen im Text durch Unterstreichen und Randbemerkung in dunklerer Tinte.
Cc 2, Nr. 844

Datierungsgründe: [**noch**]

M e t h o d u s t a n g e n t i u m i n v e r s a , i g n o t a

Dicebam Cl$^{\text{mo}}$ Hugenio, videri mihi quaedam loca methodo Cartesii inveniri non posse, sive quasdam figuras Geometricas non posse aliquando ex ejus regulis duci; eas nimirum, ubi non applicatarum sed tangentium vel perpendicularium, aut linearum ad Tangentes relatarum data est ad abscissas relatio, breviter me non reperire in Cartesio methodum tangentium inversam.

Id verum esse fassus est Hugenius, sibique ipsi ea problemata videri difficillima: nec se nunc quidem quenquam mortalium nosse, qui ea solvendi certam habeat methodum, adeo ut ne illud quidem definiri possit an figura quaesita sit impossibilis. Attamen videri sibi Methodum ejusmodi fuisse notam Cartesio, neque enim aliter illas figurarum quarundam curvarum ad refractiones aptarum proprietates potuisse invenire.

Dixi fortasse invenisse casu. At respondit Hugenius s i b i i d v e r i s i m i l e n o n v i d e r i , quoniam figurarum quarundam ex illis aequationes ad gradus quosdam valdes

---

20 f. *Zu* s i b i ... v i d e r i : Postea aliter sensit, ex quo reperit methodum qua Cartesius ad suas figuras dioptricas in *Geometria* ejus expositas, facile pervenire potuit.

19 curvarum *erg. L* 21 aeqvationes *(1)* sint altis *(2)* ad *L*

---

10 methodo Cartesii: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106 [Marg.]. 18 figurarum: *a. a. O.*, S. 50–65. 20 f. reperit: [**noch**].

compositos ac prolixas aequationes ascendant.

Quaesivi an non putaret Huddenium aliquid tale habere, cum tantopere de maximis ac minimis laboraverit; negavit.

Cartesium id nemini quod sciat communicasse: se pauca quaedam in parabola aliisque nonnullis habere, sed quae longe absint a suo voto. Videri sibi Cartesium quaedam e sua Tangentium methodo subodoratum.

2 putaret *(1)* Hugeni *(2)* Huddenium *L*

---

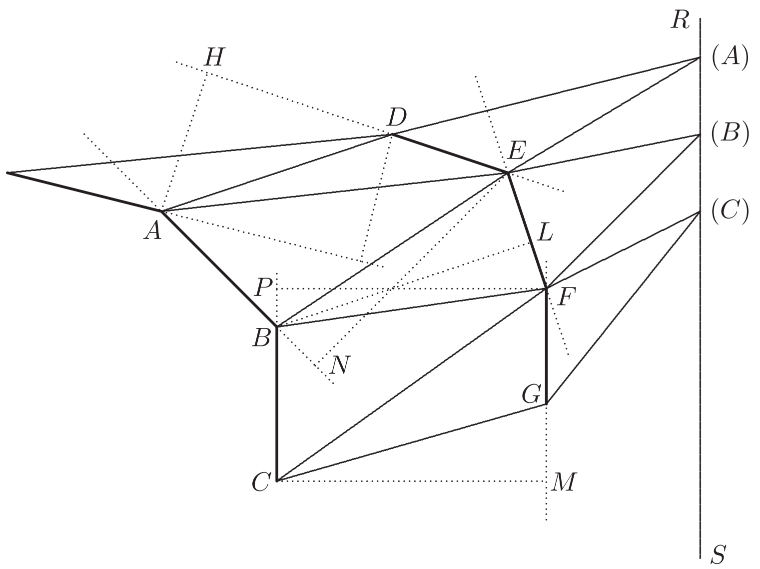
3 laboraverit: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 4 pauca: vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 59–90 [Marg.]. 6 Tangentium methodo: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–50 [Marg.].

34. THEOREMA TETRAGONISTICUM EX SPATII SECTIONE
24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 4. Ca. 1/2 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 4 r°. Bl. 4 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt. Bl. 4 bildete ursprünglich den oberen Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 32) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 35).
Cc 2, Nr. 1086

24. Octob. 1675.

T h e o r e m a t e t r a g o n i s t i c u m e x s p a t i i s e c t i o n e



[*Fig. 1*]

Sint duae lineae, rectae curvaeve una ABC, altera $DEFG$ quocunque inter se situ ac positione ista ut latera illius infinite parva sint AB, BC, hujus DE, EF, a puncto A ducantur rectae AD, AE. a puncto E, rectae EA, (quae jam ducta est) EB, a puncto

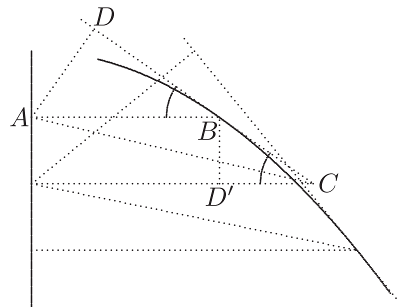
13 (qvae ... est) *erg. L*

B rectae BE, BF, a puncto F rectae FB, (quae jam ducta est,) FC. a puncto C rectae CF, CG etc. Et spatium inter ABC, et $DEFG$ interceptum, seu spatium comprehensum duabus lineis ABC, et $DEFG$, et rectis AD, CG aequabitur summae $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ ADE, EAB, BEF, FCG. In DE productam, seu tangentem curvae $DEFG$ ad punctum DE, demittatur perpendicularis AH. similiter ad tangentem in EF, perpendicularis BL, et ad tangentem in FG perpendicularis CM. Erit AH in DE, $\sqcap$ [duplo] ADE, et ita in caeteris et ita AH in $DE, +BL$ in $EF, +CM$ in $FG, \sqcap$ duplo $\overline{ADE, +BEF, +CFG}$.

Eodem modo, erit, EN in $AB, +FP$ in BC $\sqcap$ duplo $\overline{EAB, +FBC}$. Et ita summa rectangulorum illorum pariter et horum, aequabitur duplo summae triangulorum illius pariter et hujus lateris, sive illis pariter quae basin in una[,] verticem in altera habent curva, quam quae contra. Itaque summa duarum superficierum curvarum, ex superpositione AH in DE etc. et EN in AB etc. aequabitur duplo Spatio inter duas curvas propositas intercepto, unde nova methodus superficies curvilineas dimetiendi in cylindro, variis curvis terminatas. Semper enim inveniri poterit alia, quae cum data faciat, spatium planum commensurabile.

Quod si in eodem plano AH ipsi DE applices, idemque de caeteris spatium hians relinquetur; quod methodo calculi satis subtilis a me initi, complendum erit. Idemque est si contra ad aliam curvam perpendiculares applicentur. Sed si alterutra linearum, ut ABC, degeneret in rectam RS. tunc recta RS, quomodocunque secta in partes, $(A)(B), (B)(C)$ etc. curvaque etiam quomodocunque secta; patet summam ordinatarum ex curva in rectam perpendicularium, in ipsas AB, BC. junctam perpendicularibus ipsi curvae impositis aequari spatio $DEFG(C)(A)D$.

7–9 duplo *erg. L dreimal* 16 hians *erg. L* 21 perpendicularium, *(1)* si modo recta *(a)* aeqv *(b)* in partes aeqvales *(2)* qvae determinata erit, si recta in partes aeqvales divisa *(3)* in *L* 21 junctam *(1)* Superficiei *(2)* momento curvae *(3)* perpendicularibus *L*



[*Fig. 2*]

Hinc novum Theorema: Perpendiculares ex punctis axis in tangentes productas, curvae impositae ut AD impositam in BC, aequatur ordinatae ad axem seu AB ad BD', tum, quia BDA et $CD'B$ similia, tum quia AD in BC, aequale duplo $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ ABC quod a rectangulo ABD' non differt.

3 f. ordinatae *(1)* in punctum *(2)* ad L

8 *Fig. 2*: Leibniz hat in der Vorlage die Bezeichnung D für zwei Punkte verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird in Figur und Text der zweite Punkt mit D' benannt.

35. LOGARITHMI IN HYPERBOLA DEMONSTRATI
24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 99. 1 Zettel ca 19,2 x 11,0 cm. 1 S. auf Bl. 99 r°. Bl. 99 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt. Bl. 99 bildete ursprünglich den unteren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 34) und LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 32).
Cc 2, Nr. 1087

24 Octob. 1675

Logarithmi in Hyperbola demonstrati.
Logarithmi. Incognitae in exponente

In Hyperbola si abscissae AB, AC, AQ, sint progressionis Geometricae, etiam applicatae BD, CE, QF ejusdem erunt progressionis; ergo et differentiae earum. Caeterum applicatae et abscissae sunt in ratione reciproca, ergo et differentiae earum. Si sint x inter se progressionis geometricae, erunt curvae latera progressionis hujus, $\dfrac{\sqrt{1x^4 - a^2}}{1x}$.

---

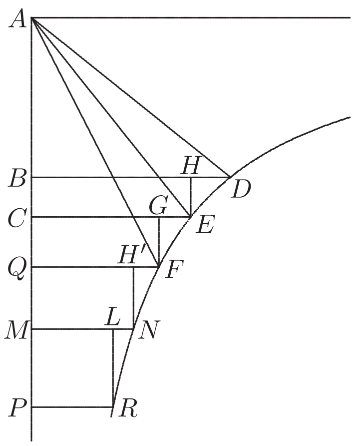
8 *Darüber Nebenbetrachtung:* $\dfrac{\frac{a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}} \sqcap \dfrac{x}{a} \quad \dfrac{a}{x} \sqcap \dfrac{a^2}{x^2}$ [*bricht ab*]

9 *Darüber:* Nova hic et quae hactenus frustra quaesiveram[:] Adhiberi potest haec methodus etiam ad obliquas applicatas.

11 In *(1)* Ellips *(2)* Hyperbola *L* 13 earum, *(1)* Curva repraesentatur per $\sqrt{\mathrm{x}^2 - \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^2}} \sqcap \dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^4 - \mathrm{a}^2}}{\mathrm{x}}$. Item si $\mathrm{x}^4 - \mathrm{a}^2$ *(2)* si *L*

---

14 curvae latera: Die Ausdrücke für die Größen AD, AE und AF müssten $\dfrac{\sqrt{x^4 + a^2}}{1x}$, $\dfrac{\sqrt{16x^4 + a^2}}{2x}$ und $\dfrac{\sqrt{256x^4 + a^2}}{4x}$ lauten, wenn man $y = \dfrac{a}{x}$ als Hyperbelgleichung ansetzt. Leibniz übernimmt den Vorzeichenfehler in den folgenden Ausdrücken, was jedoch die allgemeinen Aussagen nicht beeinträchtigt.



[*Fig. 1*]

$\dfrac{\sqrt{16x^4 - a^2}}{2x}$. $\dfrac{\sqrt{64x^4 - a^2}}{4x}$ etc. Unde jam transitus habetur ad hujusmodi progressiones quae a Geometricis pendent in quibus ambigua in exponente, ut progressio hoc loco: $\dfrac{\sqrt{\mathrm{I}^y{}^4 - a^2}}{\mathrm{I}^y}$ cujus summa invenietur per curvam hyperbolicam. Cumque detur superficies hyperbolica ex data Hyperbolae quadratura, hinc ducendo in I^y videtur et hujus seriei $\sqrt{\mathrm{I}^y{}^4 - a^2}$ summa ex data Hyperbolae quadratura haberi.

Ecce transitum admirabilem ad calculos in quos exponentes ingrediuntur. Loco $\mathrm{I}^y{}^4$ scribi etiam poterit simpliciter: I^{4y}.

Interim[:] Nota in hyperbola rectangulum EHD aequari rectangulo FGE posita pro-

---

5 *Unter* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{I}^y{}^4 - a^2}}{\mathrm{I}^y}$: Imo haec expressio inutilis.

8 *Darüber:* I m o i n u t i l e.

---

2 *Fig. 1*: Leibniz verwendet die Bezeichnung H für zwei verschiedene Punkte. Zur Verdeutlichung wird in Figur und Text einer der Punkte mit H' benannt.

gressione continua geometrica rectarum AB, AC, AQ. Hinc jam videtur elegantissime demonstrari posse aequalitas spatiorum $DBQFD$ et $QPRFQ$. positis AB, AQ, AP, sive positis BD, QF, PR progressionis continuae. Nam BQ, pariter et QP subdividatur in infinitum, alias medias proportionales continue interponendo, ut CE, MN. erunt DHE, EGF, etc. item FHN, NLR etc. aequales. Imo generaliter si BC[,] CQ. et similes sint infinite parvae, spatiola ipsa sive rectangula infinite parvae latitudinis, $HBCE, GCQF$ erunt inter se aequalia, fient enim ex ductu $\frac{a^2}{x}$ in $\frac{\beta}{a}x$. ponendo $BH \sqcap \frac{a^2}{x}$ et $BC \sqcap \frac{\beta}{a}x$ si β sit quantitas constans infinite parva. Continuando ergo interpositionem, manifestum est totidem spatiola interponi inter B et Q, quot inter Q et P. si AB, AQ, AP continue proportionales. Habemus ergo demonstrationem planam ac facilem pulcherrimi theorematis Gregorii a S. Vincentio, quaeque ad longe subtiliora aditum facit.

Si ordinatae sint x^2y. sive $y \sqcap \frac{a^3}{x^2}$, erunt y in reciproca duplicata: Hinc si x progressionis Geometricae, erunt et y progressionis Geometricae. Hinc si AB, AC, AQ. progressionis Geometricae, erunt spatiola $\frac{a^2\beta}{x}$. Hinc sequetur spatia ordinaria $DBQFD$. $FQPRF$ fore etiam progressionis Geometricae, adeoque abscissis reciproce proportionalia.

5 aeqvales. *(1)* Ergo Spatia *(2)* Differentiae *(3)* Imo *L* 6 sive rectangula *erg.* *L*

10 theorematis: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch VI prop. CVIII S. 585 f.

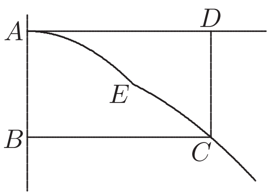
36. ANALYSIS TETRAGONISTICA EX CENTROBARYCIS
25. und 26.[?] Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. Überschrift ergänzt. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Brief*, 1851, S. 344–348; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 117–121; 3. *LBG*, 1899, S. 147–151; 4. (engl. Übers. von 2.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 65–72.
Cc 2, Nr. 1089, 1090

Datierungsgründe: Möglicherweise wurde der zweite Teil der Aufzeichnung (ab S. 241 Z. 15) am 26. Oktober 1675 geschrieben; die entsprechende Datumsangabe in S. 241 Z. 13 f. kann sich sowohl darauf als auch auf das an gleicher Stelle erwähnte Stück N. 37 beziehen. **[noch]**

25. Octob. 1675

A n a l y s i s T e t r a g o n i s t i c a e x C e n t r o b a r y c i s


[*Fig. 1*]

Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit $AB \sqcap DC \sqcap x$. et ultima $x \sqcap b$ et $BC \sqcap AD \sqcap y$. et ultima $y \sqcap c$. Patet Omn. yx. ad x. $\overset{(1)}{\sqcap}$ $\frac{b^2c}{2}$,, $-$ Omn. $\overline{\frac{x^2}{2}}$, ad y. Nam momentum spatii $ABCEA$ ex AD, fit ex rectangulis ex $BC \sqcap y$, in $AB \sqcap x$. At vero momentum spatii $ADCEA$ ex AD, seu complementi prioris, fit ex summa quadratorum DC, sive $\frac{x^2}{2}$, dimidiata; quod momentum, si auferatur a momento totius

---

12 *Darunter:* Vid. ejusdem part. 2. alia scheda.

11 *Darüber:* vide eiusdem part. 2. alia scheda *L streicht Hrsg.* 15 et *(1)* maxima *(2)* ultima y ⊓ c. *erg. L* 16 $\overset{(1)}{\sqcap}$ *(1)* omn x^2. ad y. *(2)* Mom *(3)* $\frac{b^2c}{2}$ *L*

---

12 part. 2.: N. 38.

rectanguli $ABCD$, ex AD, id est a c in Omn. x. sive a $\frac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii $ABCEA$. Unde habetur aequatio quam dixi. Qua reformata sequitur Omn. $\overline{yx, \text{ad}\, x} +$ Omn. $\overline{\frac{x^2}{2}\,\text{ad}\, y} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{b^2c}{2}$. adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex.

Sit aequatio curvae naturam exprimens: $ay^2+bx^2+cxy+dx+ey+f \overset{(3)}{\sqcap} 0$. Ponatur $yx \overset{(4)}{\sqcap} z$. fiet $y \overset{(5)}{\sqcap} \frac{z}{x}$. quo valore in aequatione 3. inserto fiet: $a\frac{z^2}{x^2}+bx^2+cx\frac{z}{x}+dx+\frac{ez}{x}+f \overset{(6)}{\sqcap} 0$. sive sublatis fractionibus fiet $az^2+bx^4+cx^2z+dx^3+ezx+fx^2 \overset{(7)}{\sqcap} 0$. Sit rursus $x^2 \overset{(8)}{\sqcap} 2\omega$ eumque valorem inserendo in aeq. 3 fiet: $ay^2+2b\omega+cxy+dx+ey+f \overset{(9)}{\sqcap} 0$. adeoque erit $x \overset{(10)}{\sqcap} \frac{-ay^2-2b\omega-ey-f}{+cy+d} \overset{(11)}{\sqcap} \sqrt{2\omega}$ et quadrando utrobique, fiet:

$$a^2y^4+4aby^2\omega+2aey^3+2afy^2, +4b^2\omega^2+4be\omega y$$
$$+4bf\omega, +e^2y^2+2efy+f^2, -2c^2y^2\omega-4cdy\omega-2d^2\omega \overset{(12)}{\sqcap} 0.$$

Quod si jam curva describatur secundum aequationem 7. itemque alia secundum aequationem 12. ajo quadraturam figurae unius pendere ex quadratura figurae alterius, et contra. Quod si jam loco aequationis 3. aliam sumamus altiorem, seu tertii gradus, rursus duas alias habebimus loco 7. et 12. Et ita continuando dubium non est, quin certam quandam progressionem ipsarum 7, et ipsarum 12 habituri simus, ut sine calculo continuari possit in infinitum, non difficili opera. Ex data autem una alicujus curvae aequatione omnes aliae generali expressione exhiberi possunt; ex quibus compendiosissima eligi potest.

Datis figurae cujusdam momentis ex duabus quibusdam rectis, dataque figurae ejus-

---

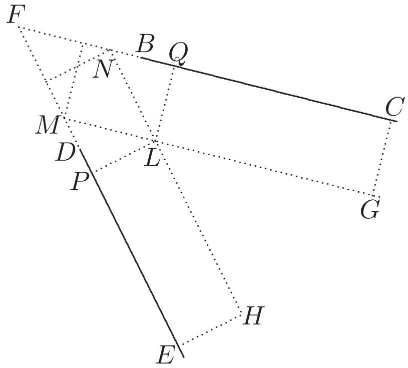
2 f. *Am Rande:* Hodie sic exprimo $\int \overline{yxdx} + \int \frac{1}{2}xxdy = \frac{x^2y}{2}$.

2 f. = *(1)* b^2c *(2)* | x^2y *ändert Hrsg.* | *L* 16 simus, *(1)* unde dignosci possit *(2)* ut *L*

---

2 f. Hodie: Die Anmerkung stammt aus Hannoverscher Zeit.

dem area, habetur ejus centrum gravitatis. Dato autem figurae cujusdam (aut etiam lineae) centro gravitatis et magnitudine habetur ejus momentum ex aliis quibuscunque rectis. Itaque data figurae cujusdam magnitudine, et momento ex duabus quibusdam rectis, datur ejus momentum ex qualibet recta data. Hinc etiam multae quadraturae ex quibusdam datis. Momentum autem cujusdam figurae ex recta qualibet etiam generali calculo exprimi potest.

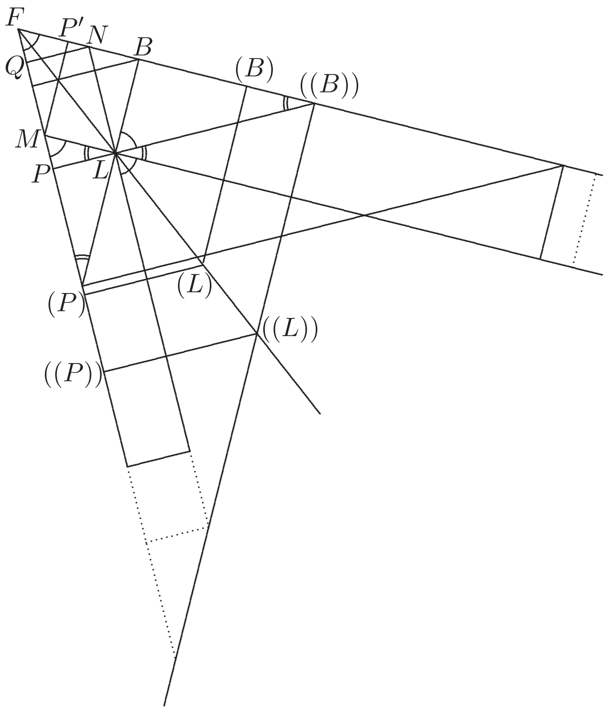


[*Fig. 2*]

Momentum divisum per magnitudinem dat distantiam centri gravitatis ab axe librationis. Sint in eodem plano rectae positione datae sive parallelae sint, sive productae concurrant in F. Momentum ex BC inventum sit ba^2. Momentum ex DE inventum sit ca^2. Area figurae sit v, erit distantia centri gravitatis a recta BC, nempe $CG \sqcap \dfrac{ba^2}{v}$. et distantia ejus a recta DE, nempe $EH \sqcap \dfrac{ca^2}{v}$. Ergo CG ad EH est ut b ad c. sive rationem habent datam. Ponatur jam rectam EH in eodem plano manentem percurrere normaliter ipsam DE, et rectam CG percurrere normaliter ipsam BC, et apicem G rectam GM, apicem vero H rectam HN, vestigium scilicet suum relinquere. Necesse est si BC et DE alicubi concurrunt etiam GM et HN alicubi concurrere, sive intra sive extra,

1 f. (aut etiam lineae) *erg. L* 2 et *(1)* area *(2)* magnitudine *L* 3 cuiusdam *(1)* area *(2)* magnitudine *L* 5 autem *(1)* rectae cuiusdam datae *(2)* curvae *(3)* cuiusdam ... ex *(a)* data *(b)* recta *L* 8 f. axe *(1)* aeqvilibrij *(2)* librationis. *(a)* qvod si ergo non sint datae *(b)* sit momen *(c)* Sint *L* 13 in ... manentem *erg. L* 14 et | ex *streicht Hrsg.* | apicem *L*

F. concurrant in L. Erit angulus HLG aequalis angulo EFC. et angulus PLQ. (ponendo $PL \sqcap EH$ et $LQ \sqcap CG$) erit supplementum ipsius anguli EFC ad duos rectos; adeoque erit datus. Juncta PQ habebitur Triangulum PQL cujus dabitur angulus verticis L ad rationem laterum ad verticem QL, ad LP.



[*Fig. 3*]

Cum ergo sumta BL vel $(B)(L)$ quantacunqve, angulus BLP semper maneat idem; ac

3 f. ad ratio laterum L *ändert Hrsg.* 4–6 LP. | Datur angulus MFP. ergo datur MP $\sqcap$ ψ. dabitur FP $\sqcap$ dψ. Eodem modo data NQ $\sqcap$ eψ. dabitur FQ $\sqcap$ deψ *gestr.* | Cum L

5 *Fig. 3*: Die Punktbezeichnung P wird von Leibniz in Figur und Text (Lesart zu Z. 4–6) doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung erhält einer der beiden Punkte in der Figur die Bezeichnung P'.

praeterea sit, ut BL ad LP, ita $(B)(L)$ ad $(L)(P)$[;] erit etiam ut BL ad $(B)(L)$, ita LP ad $(L)(P)$ quod contingere patet si etiam FL ipsis proportionalis, seu recta transit per $FL(L)$ etc. Unde cum non dentur plura hic loca, sequitur locum esse rectam. Datis ergo duobus momentis figurae ex duabus rectis non parallelis dabitur linea recta transiens per centrum gravitatis. Quare datis tribus figurae momentis ex tribus axibus librationis qui non sint omnes paralleli inter se, dabitur figurae area et centrum gravitatis. Ecce apicem Centrobarycae. Si dentur duo ejusdem figurae momenta ex duabus rectis inter se parallelis dabitur figurae area, sed non centrum gravitatis.

Cum sit finis Centrobarycae ex datis momentis invenire dimensiones hinc habemus duo theoremata generalia[:] Si dentur ejusdem figurae momenta duo ex duabus rectis sive axibus librationis parallelis inter se, dabitur ejus magnitudo. Item si ex tribus licet non parallelis. Hinc jam videtur methodus patere ad inveniendas curvas Ellipticam et Hyperbolicam, ex datis Circuli et Hyperbolae quadraturis. De quo Schediasmate peculiari. 26. Octob. 1675.

Alia Analysis Tetragonistica haberi potest, ope Curvarum. Scilicet eadem curva in diversa resolvetur Elementa, prout ad diversas rectas ordinatae referuntur. Unde diversae quoque oriuntur figurae planae curvae propositae Elementis homogeneae, cumque ex data curvae dimensione, inveniantur omnes, sequitur ex data unius figurarum hujusmodi dimensione, etiam caeteras haberi.

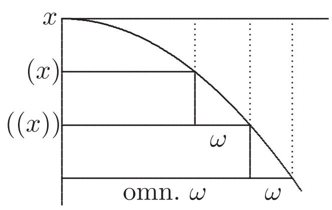
Aliis modis inveniri possunt figurae quae ex alia pendent, si ordinatae figurarum quarum quadratura habetur, aut quarum quadratura ex data habetur adduntur datae. Quemadmodum tractabiliora sunt spatia quam curvae, quoniam pluribus modis secari ac resolvi possunt. Ita tractabiliora sunt solida planis et generatim superficiebus. Itaque ubi methodum qua superficies examinamus ad solida transferemus, multa nova detegemus, et facile saepe demonstrabimus de superficiebus per solida; quae in ipsis superficiebus difficulter habentur. Eleganterque observavit Tschirnhausius pleraque ab Archimede demonstrata, ut quadraturam parabolae, et quae ab his pendent circa sphaeram, conum, Cylindrum, ex sola solidorum r e c t i l i n e o r u m sectione ac compositione manifesta

7 apicem | artis *gestr.* | Centrobarycae *L* 9 invenire *(1)* qvadraturas *(2)* | dimensionis *ändert Hrsg.* | hinc *L* 10 eiusdem *(1)* magnitudin *(2)* magnitudinis *(3)* figurae *L* 10 f. sive ... librationis *erg. L* 13 datis *(1)* Ellipseo *(2)* Circuli *L*

13 Schediasmate: N. 37. 26 Tschirnhausius: **[noch]**.

ac palpabilia reddi posse.

Modi varii describendi nova solida. Si ex puncto in sublimi posito recta rigida descendens circa planum ducatur, cujuscunque illud sit figurae[,] Coniformium genera producentur. Nam si planum circuli Circumferentia terminatum sit, orietur Conus rectus vel scalenus. Ita si figura quae pro basi est, seu planum, aliquod centrum habeat, ut Ellipsis, orietur coniforme Ellipticum rectum, si punctum datum centro immineat, sin minus, scalenum. Aliud Conoeides aliud coniforme Ellipticum. Si linea rigida ex puncto descendens sit circularis aliave curva; tunc aut puncto vel polo illi ita affixa est, ut non nisi unius in eo motus libertatem habeat, scilicet circa quendam axem; et tunc necesse est ut basis seu planum sit circulus, et ut centro ejus immineat punctum vel polus. Sin aliter[,] necesse est ut linea rigida aliorum habeat motuum libertatem, nempe seorsum et deorsum, aliterve, secundum quandam rectam; et tunc semper ubi opus erit ascendet, descendetve, ut semper planum datum sua circumrotatione circa axem attingat. Et hoc est secundum Coniformium genus. Tertium genus est eorum, ubi praeter motum illum duplicem gyrationis cum axe, et exaltationis et descensionis curva sola vel axis solus, vel etiam figura cum axe; rursus alios interim motus exercent, vel ipsum etiam punctum interim movetur.



[*Fig. 4*]

Aliud: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem, aequantur complemento summae terminorum sive: Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum.

Sive omn. $\overline{x\omega}$ $\sqcap$ ult. $x, \overline{\text{omn.}\,\omega},$, $-$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\omega}$. Sit $x\omega \sqcap az$. fiet: $\omega \sqcap \frac{az}{x}$. fiet omn. $\overline{az}$ $\sqcap$ ult. $\overline{x\,\text{omn.}\,\frac{az}{x}}$ $-$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x}}$. Ergo, omn. $\overline{\frac{az}{x}}$ $\sqcap$ ult. x. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}}$ $-$

2 rigida *erg. L* 8 aut *(1)* rigida est, et circulus e *(2)* centro *(3)* puncto *L* 11 libertatem, *(1)* | v. g. *streicht Hrsg.* | seorsum et deorsum *(2)* nempe *L* 15 descensionis *(1)* figura, vel *(2)* curva *L*

$\text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{az}{x^2}}$. Quo valore in aeq. praecedenti inserto fiet:

$$\text{omn.}\ \overline{az} \sqcap \text{ult.}\ x^2\, \overline{\text{omn.}\ \frac{az}{x^2}} - \text{ult.}\ x, \overline{\text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{az}{x^2}}} - \text{omn.}\ \overline{\overline{\text{ult.}\ x.\text{omn.}\ \frac{az}{x^2}} - \overline{\text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{az}{x^2}}}}.$$

Et ita iri potest in infinitum.

$\text{omn.}\ \frac{a}{x} \sqcap \text{ult.}\ x.\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x^2}} - \text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x^2}}$. Et $\text{omn.}\ a \sqcap \text{ult.}\ x.\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x}} - \text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x}}$. Quod postremum theorema exhibet summam logarithmorum ex data Hyperbolae quadratura.

Numeros abscissas repraesentantes soleo appellare ordinales, quia ordinem terminorum sive ordinatarum exhibent.

Si quadrato ordinatae figurae quadrabilis addas quadratum rectae constantis, radices summae duorum quadratorum repraesentabunt curvam quadratricis. Quod si radices summae duorum quadratorum dent figuram quadrabilem, etiam curva erit rectificabilis.

Datae progressionis curvam describere. A Termino progressionis quadrato auferatur quadratum quantitatis constantis; Radicum ex duobus quadratis figura quadratrix descripta curvam habebit quaesitam. Curva rectificabilis non ideo est descriptibilis. Descriptae curvae elementa pluribus diversis modis enuntiari possunt. Comparentur diversi modi enuntiandi elementa curvae cum diversis modis enuntiandi figuram ei homogeneam, prout ad diversa refertur. Imo et solidum curvae homogeneum adhuc pluribus modis enuntiari potest; et superficies homogenea curvae vel figurae.

9 ordinatae *(1)* a curva *(2)* ad *(3)* figurae *L* 10 qvadratricis. *(1)* itaqve si descriptio curvae *(2)* qvod *L* 16 enuntiandi *(1)* curvam ei ho *(2)* figuram *L*

38. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS SECUNDA
29. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 3/4 S. Datum ergänzt. Anstreichungen unbekannter Hand mit Rotstift in Höhe von S. 246 Z. 16 und S. 250 Z. 7. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Brief*, 1851, S. 348–354; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 121–127; 3. *LBG*, 1899, S. 151–156; 4. (engl. Übers. von 2.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 76–83.
Cc 2, Nr. 1092

29. Octob. 1675

Analyseos Tetragonisticae pars 2^da^.

Credo nos tandem dare posse methodum, qua cujuslibet figurae Analyticae figura analytica quadratrix inveniri potest, quando id possibile, aut quando id fieri non potest, poterit tamen semper figura describi analytica, fungens vice quadratricis, quam proxime. Hoc ita concipio. Proposita sit aequatio figurae cujus incognitae x. et v[,] cujus quaeritur quadratrix. Sumatur aequatio ad curvam indeterminatam: $0 \overset{(1)}{\sqcap} b + cx + dy + ex^2 + fy^2 + gyx + hy^3 + lx^3 + myxy + yxx$ etc. Ordinetur ad tangentes, hoc modo: $-dy - 2fy^2 - gyx - 3hy^3 - 2mxy^2 - x^2y$ etc. $\overset{(2)}{\sqcap}$ $ct + 2ext + gyt + 3lx^2t + my^2t + 2yxt$ etc. Jam $\frac{t}{y} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{a}{v}$. Ergo ex aequatione $\frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{v}$. tollendo ipsas t et y. ope aequationum 1. et 2. debet prodire aequatio illa ipsa, quae est figurae curvilineae ad quadrandum propositae. Et conferendo terminos productae terminis datae, si nulla est in conferendo impossibilitas, habemus quadraturam. Sin oritur impossibilitas, certum est figuram ana-

10 *Daneben:* Refertur ad praecedentem 25. Octob. 1675.

11 methodum, *(1)* qva qvaelibet figura Analytica qvadrari potest analytice, qvando id possibile est *(2)* qva *L* 14 cuius ... v *erg. L* 19 est *(1)* curvae cuius *(2)* figurae *L* 21–245,1 figuram *(1)* unam per aliam qvadrari non posse. *(2)* analyticam *L*

10 praecedentem: N. 36.

lyticam propositam non habere analyticam quadratricem. Facile autem apparebit, si quae ei addantur, quae eam insensibiliter immutent[,] posse inde figuram fieri quadrabilem, ob aliam plane aequationem prodeuntem. Caeterum ut impossibilitas appareat, considerandae sunt difficultates.

Nimirum, obstat quod aequatio producta est prolixitatis infinitae; data autem definita. Respondeo eo ipso dum comparantur, videbitur quousque maximae potestates incognitarum indefinitae excurrere possint. Regeri potest, fieri posse; ut producta aequatio indefinita plures habet terminos quam finita data et tamen ad eam reduci possit, quod scilicet per aliam vel finitam vel indefinitam dividi possit. Haec difficultas me diu jam anno abhinc tenuit. Sed nunc video non debere nos ea deterreri. Nam nunc fieri potest, ut methodo tangentium ex figura quadam determinata (cujus aequatio sit indivisibilis per rationalem) oriatur figura ambigua, quia non potest ad unum punctum figura quaelibet nisi unam habere tangentem. Ergo aequatio producta neque per finitam dividi potest neque etiam per indefinitam[,] nam etiam figurae indefinitae revera, seu quarum ordinatae exprimuntur aequatione infinita habent ordinatas, easque aliquando finitas quae deberent satisfacere. Tametsi difficultatem adhuc exiguam praevideam, quod scilicet videatur fieri aliquando ut radices aequationum omnes non servant ad problematis solutionem. Ego tamen ut verum fatear, credo.

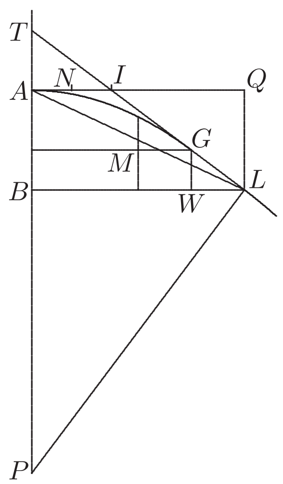
Alia est difficultas satis magna, quod scilicet fieri possit, ut aequatio finita exprimatur etiam per indefinitam, adeo ut aequatio producta coincidere possit cum data, etsi id non appareat, v. g. $y^2 \sqcap \dfrac{x}{1+x} \sqcap x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6$ etc. et ita infinitae aliae possunt formari variis compositionibus et divisionibus. Hic fateor difficilis nodus. Sed responderi sic potest: Si quam habet figura quadratricem analyticam, utique ipsa sub indefinita intelligi potest. Et tunc non dabit utique indefinitam sed finitam datae aequivalentem. Eodem modo certum est etiam quadratricem datae ordinarie tractatam si qua est, datam solam non ambiguam daturam. Adeoque et illa quae ab ea non nisi nomine differt.

13 tangentem. *(1)* qvo *(2)* sic ergo figura *(3)* ergo *L* 15 aeqvatione *(1)* indefinita *(2)* infinita *L* 22 f. nodus. *(1)* Crediderim tamen non posse evenire qvandocunqve *(2)* sed *L* 23 analyticam *(1)* debet utiqve prodire ordinario mo *(2)*, utiqve *L*

10 anno abhinc: **[noch]**.

Una superest difficultas[:] non videri judicari posse quis sit ultimus vel primus terminus productae indefinitae; quia potest fieri ut termini inferiores destruantur; et tunc ipsa sit divisibilis vel per y. vel per x. vel per yx. aut horum potestates. Et hoc non video quod prohibeat. Eademque manet difficultas sive a minimo sive maximo gradu incipias assumtam initio aequationem indefinitam. Pone ergo in aequatione producta dividi posse[,] necesse est absit quantitas cognita, item absint omnes termini, ubi sola x. vel si mavis, omnes termini ubi sola abest y. quod si id examinando continue inciditur in impossibilitatem. In calculo hoc generali, tunc pro certo habere poterimus solutam esse hanc difficultatem nec unquam posse evenire talem divisionem post calculum. Sin fieri potest tunc alii post alios destruentur, ut deprimi possit aequatio producta, et instituenda comparatio. Et tunc videndum an non generaliter evinci possit, procedere non posse, comparationem, utcunque procedamus destruendo.

Forte si figurae quadratricae redigantur antea ad simplicissimas aequationes facilius detegentur impossibilitates. Nam et quadratrix praesumitur fore simplicior. Succurrit adhuc aliud auxilium, quod scilicet varii ad idem ducentes plane diversi inter se calculi institui possunt, quorum producti comparabiles.



[*Fig. 1*]

4 prohibeat. *(1)* Hoc tamen videtur regeri posse *(2)* Eademqve *L* 8 generari *L ändert Hrsg.*

$BL \sqcap y$. $WL \sqcap l$. $BP \sqcap p$. $TB \sqcap t$. $AB \sqcap x$. $GW \sqcap a$. $y \sqcap$ omn. l.

Ut obiter dicam sunt numeri compositi qui sibi addi non possunt vel demi per partes nempe denominati a potestatibus seu sub potestatibus sive surdi. Sunt alii numeri denominati qui nec in se multiplicari possunt per partes: Et tales sunt numeri summarii v. g. omn. l. non possunt multiplicari in omn. p. nec enim fieret $y^3 \sqcap 2\,\overline{\text{omn. omn.}\,pl}$. Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur; sic agendum: Volumus spatium quod repraesentet omnes p. in omnes l. Non poterunt servire ductus Gregorii a S. Vincentio quibus figurae in figuras dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes; sed una ordinata in unam. At inquies si una ordinata ducenda in alias omnes, prodibit spatium sursolidum. Summa nimirum infinitorum solidorum. Huic malo remedium reperi sane admirabile. Repraesententur omnes l, per lineam infinite parvam WL. id est opus est linea quadratrix omn. l. Erit linea $BL \sqcap$ omn. l. quae ducatur in omnes p. figura plana repraesentatas fiet solidum. Si omn. l. sint recta et omnes p, curva fiet superficies curvilinea ductui homogenea; sed haec vetera. Ecce jam novum. Si ipsis WL, MG seu omnibus l. imponatur singulis eadem curva repraesentans omnes p. debet autem certa curva p. esse ejusdem plani, et sibi semper parallelo ejus plano existente per curvam AGL ferri, et habebitur quod desideramus. Loco curvae et planum variis modis terminatum ita ferri potest per curvam, et fiet solidum; priore modo superficies curvilinea; et superficiei sive solidi sectio semper eadem. Possumus tamen fingere quod decrescant interim inter ferendum; videndum an certus sit numerus superficierum analyticarum ut linearum analyticarum. Sed haec obiter.

Nota superficies curvilinea facta motu curvae sibi parallelae per curvam; aequabitur cylindro curvae sub BL, summa omnium l. Sed haec obiter.

1 f. omn. l. | $y^2 \sqcap 2\,\overline{\text{omn}\,p}$ *gestr.* | | (+ *streicht Hrsg.* | Ut *L* 2 compositi *erg. L* 2 f. vel ... partes *erg. L* 4 denominati *erg. L* 10 nimirum *(1)* plurium *(2)* infinitorum *L* 15 certa *erg. L*

7 Gregorii a S. Vincentio: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch VII.

Porro $\frac{l}{a} \sqcap \frac{p}{\text{omn.}\, l \sqcap y}$. Ergo $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a}\, l$. Itaque omn. $\frac{yl}{a}$. non vult dicere omn. y in omn. l. nec $y \frown$ omn. l. quare cum sit $p \sqcap \frac{y}{a}\, l$ sive $p \sqcap \frac{\text{omn.}\, l}{a}\, l$. hoc vult dicere. omn. l. ductas in unum illud quod uni illi p respondet. Ergo omn. $p \sqcap$ omn. $\overline{\frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a}.\, l}$. Atqui aliunde demonstravi omn. $p \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive $\sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2}$. Ergo habemus theorema quod mihi videtur admirabile, et novo hujus calculo magni adjumenti loco futurum, nempe quod sit, $\frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2} \sqcap$ omn. $\overline{\overline{\text{omn.}\, l}\,\frac{l}{a}}$, qualiscunque sit l. Id est si omnes l. ducantur in ultimam, et aliae omnes l, rursus in suam ultimam; et ita quoties id fieri potest[,] summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum quorum latera sunt summae ipsorum l, seu omnes l. pulcherrimum ac minime obvium theorema.

Tale est etiam Theorema: omn. $\overline{xl} \sqcap x\,\overline{\text{omn.}\, l} - \text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\, l}$. ponendo l. esse terminum progressionis, et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l. ei respondentis, seu x. esse numerum ordinalem, l. rem ordinatam.

Nota in his calculis observari potest lex homogeneorum. Nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea, si lineae fit superficies, si superficiei fit

---

1 *Zur gestrichenen Lesart:* Errores

Neben omn $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{a}$: male

1 p $\sqcap \frac{\overline{\mathrm{Omn\,l}}}{\mathrm{a}}$ l. | Ergo *(1)* $\mathrm{y}^2 \sqcap 2\,\mathrm{omn}\,\overline{\mathrm{l}\frac{\overline{\mathrm{omn\,l}}}{\mathrm{a}}}$, sive $\overline{\mathrm{omn\,l}}\,\boxed{2} \sqcap 2\,\mathrm{omn}\,\overline{\mathrm{l}\frac{\overline{\mathrm{omn\,l}}}{\mathrm{a}}}$ *(2)* Ergo omn p $\sqcap \frac{\overline{\mathrm{omn.\,l}}\,\boxed{2}}{\mathrm{a}}$. Ergo Omn. p. $\sqcap \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}}$. Brevius. $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}} \sqcap \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{y}}$. Ergo p $\sqcap \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}}\mathrm{l}$. Ergo erit omn. p $\sqcap$ Omn $\frac{\overline{\mathrm{yl}}}{\mathrm{a}}$ (Nota Omn. non debet esse sub sua linea). At si dicam omnes, 2, 3. *(a)* non dico omnes *(b)* seu omnes senarios non dico Omnes binarios in Omnes ternarios; sed diconi omnes ternarios bis; at qvidni ergo etiam omnes *(aa)* ternari *(bb)* binarios ter, qvae duo non coincidunt, itaqve e r r a v i m u s. *gestr.* | itaqve *L*

---

4 aliunde demonstravi: N. 20, S. 000 Z. 000–000 **[noch: Satz (4)]**. 8 f. aequabitur . . . ipsarum l: Richtigerweise müsste es heißen: aequabitur dimidio quadrato cujus latera sunt summae ipsarum l. 10 Theorema: s. N. 36, S. 242 Z. 22.

corpus, et ita in infinitum etiam ad dimensiones.

Utile erit scribi $\int$. pro omn. ut $\int l$ pro omn. l. id est summa ipsorum l. Itaque fiet $\dfrac{\overline{\int l}^{2}}{2}$ $\sqcap \overline{\int \overline{\int l} \dfrac{l}{a}}$ et $\int \overline{xl} \sqcap x \overline{\int l} - \int \overline{\int l}$. Et ita apparebit semper observari legem homogeneorum, quod utile est, ut calculi errores vitentur.

Nota si analytice detur $\int l$. dabitur etiam l. Ergo si detur $\int\int l$ dabitur etiam l. sed non si datur l. dabitur et $\int l$.

Semper $\int x \sqcap \dfrac{x^2}{2}$.

Nota omnia haec theoremata vera de seriebus in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili.

$\int x^2 \sqcap \dfrac{x^3}{3}$.

Nota jam si termini summandi affecti sint, quomodo hinc afficiatur summa regulam generalem, talem: v. g. $\displaystyle\int \overline{\frac{a}{b}\, l} \sqcap \frac{a}{b}\, \overline{\int l}$. scilicet si $\dfrac{a}{b}$ sit terminus constans, ducendus est in maximum ordinalem. Quod si sit terminus inconstans tunc tractari non potest, nisi ad ipsum l. reduci possit, vel utcunque ad quantitatem communem nempe ordinalem.

Nota quotiescunque in aequatione Tetragonistica non nisi una est litera varians ut l. tunc potest poni esse terminus constans, et $\int l$ erit $\sqcap$ x. Et huic fundamento innititur theorema: $\dfrac{\overline{\int l}^{2}}{2} \sqcap \overline{\int \overline{\int l}\, l}$ id est $\dfrac{x^2}{2} \sqcap \int x$. Eodem ergo modo statim innumera similia possunt solvi, ut $\displaystyle\int \overline{c\, \overline{\int l}^{2} + ba^2}\ +[\int]\overline{\int l}^{3} + \int l^3 \ \sqcap\ ea^3$ quaeritur qualis sit e. Fiet $a^3 e$

$\boxed{1 \quad\quad 2 \quad\quad 3 \quad\quad 4}$

2 $\dfrac{\overline{\int \mathrm{l}}^{2}}{2\mathrm{a}}$ *L ändert Hrsg.* 12 $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *(1)* x. *streicht Hrsg.* *(2)* $\overline{\int \mathrm{l}}$ *L* 13 inconstans *(1)* vel *(a)* ref *(b)* exprimatur relatione ad ordinalem, vel non *(2)* tunc *L* 15 varians *erg. L* 18 $\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\, \overline{\int \mathrm{l}}^{2}$ *L ändert Hrsg.*

18 Fiet: Leibniz benutzt im Folgenden bis S. 250 Z. 2 inkonsistent $l = 1, \int l = x$ und $l = a, \int l = ax$ nebeneinander; die grundsätzliche Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

$\sqcap \frac{cx^3}{3} + ba^2x + \frac{x^4}{4} + xa^3$. Nimirum $\int l^3 \sqcap x$. quia $l \sqcap a$ supponitur calculi causa.

$\boxed{1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4}$

$\frac{\int l}{a} \sqcap x$. $\int \overline{c\overline{\int l}^2} \sqcap \frac{cx^3}{3}$. id est $\sqcap \frac{c\overline{\int l}^3}{3a^3}$. $\int ba^2 \sqcap \int l\ ba$. Intelligitur autem a. esse unitatem. Satis haec nova et notabilia. Cum novum genus calculi inducant.

Pono ut ad priora redeamus. Datur l. relatio ad x. quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo scilicet si sit $\int l \sqcap ya$. ponemus $l \sqcap \frac{ya}{d}$. Nempe ut $\int$. augebit ita d. minuet dimensiones. $\int$. autem significat summam, d. differentiam: Ex dato y. semper invenitur $\frac{ya}{d}$, sive l. sive differentia ipsarum y. Hinc aequatio una mutari potest in aliam, sublatio ut ex aequatione: $\int \overline{c\overline{\int l}^2} \sqcap \frac{c\overline{\int l}^3}{3a^3}$, facere possumus: $c\overline{\int l}^2 \sqcap \frac{c\int l^3}{3a^3 d}$.

Nota $\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2a}{e} \sqcap \int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2a}{e}}$. Eodem modo $\frac{x^3}{db} + \frac{x^2a}{de} \sqcap \frac{\overline{\overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2a}{e}}}}{d}$.

Sed ut ad superiora redeamus. Investigare possumus $\int l$ bis. Primum sumendo y. et quaerendo $\frac{ya}{d}$. $\sqcap l$. datae. Deinde aliter sumendo $\frac{z^2}{2a} \sqcap y$. sive sumendo $\sqrt{2ay} \sqcap z$ et inde $\frac{z^2}{t} \sqcap p \sqcap l \sqcap \frac{ya}{d}$. Quare si in aequatione indefinita ⟨ex⟩ yx; y. et x tollamus y, substituendo in ejus locum, $\frac{z^2}{2a}$: et investigemus ipsam t. Hujus novae aequationis indefinitae ut ante prioris denique ope valoris $\frac{z^2}{t} \sqcap l$. et novi valoris t. ex indefinita z continente ipsas z. et t. tollamus[,] restabit sola ex istis quatuor $y.z.t.l.$ litera l. et debet rursus aequatio prodire quae eadem esse debet tum cum data, tum cum paulo ante producta. Unde cum habeamus duas aequationes indefinitas earundem non tantum capitalium sed et arbitrariarum nonnihil tamen dissimiles quae coincidere debent, facere apparebit an aliqui termini possint tolli; an possibilis sit ista comparatio; aliaque id genus, et quod caput est qui termini vere maximi et minimi seu numerus terminorum aequationis. Sed quoniam in

12 si *(1)* pro aeqvatione superiore, in qva *(a)* yx *(b)* y. et *(2)* in *L* 15 istis | tribus *ändert Hrsg.* | y. z. t. | l. *erg.* | litera *L*

Triangula similia TBL, GWL, LBP. nondum intravit abscissa x. seu punctum fixum A. Nimirum ex puncto quodam fixo, A. ducatur AIQ indefinita ipsi LB. parallela; occurrens tangenti LT in I. et sit $AQ \sqcap BL$. Bisecetur AI in N. Ajo summam omnium QN. aequari semper Triangulo ABL. ut facile demonstrari potest, ex alibi a me dictis. Quae rursus novum dant calculi fundamentum. Nimirum $\frac{xv}{2} \sqcap y$. ponendo $BL \sqcap v$. et $QN \sqcap l$. et $y. \sqcap \int l$. $\frac{AI}{v} \sqcap \frac{t-x}{t}$ (signa ambigua). Ergo $AI \sqcap \frac{t-x}{t}v$. et $QI \sqcap v - AI \sqcap v - \frac{t}{t}v + \frac{x}{t}v$. $QI \sqcap \frac{xv}{t}$, et $QN \sqcap QI + \frac{AI}{2} \sqcap \frac{xv}{t} + \frac{v}{2} - \frac{xv}{2t} \sqcap \frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. Et ope hujus aequationis $\frac{xv+tv}{2t}, \sqcap l$. et hujus $y \sqcap \frac{xv}{2}$. et illa ipsa prima aequatione indefinita seu generali, jam tertium resumta, tollendo primo y, deinde t ope inventi valoris ipsius t ad x. in aeq. ex x. v. indefinita; ac denique v ope aeq. $\frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. habebitur rursus aequatio in qua solae capitalium restabunt x. et l. ut ante, quae coincidere debet iterum datae. Habemus ergo tres aequationes productas, diversis viis inventas, quae inter se et cum data coincidere debent; et hae quidem tres non tantum sunt coincidentes, sed et iisdem constare debent literis et vocabulis. Quod an fieri possit analytice profecto, mox apparebit.

De figuris secundariis multa credo determinari posse inventis primariarum areis et centris gravitatis. Hinc enim et momenta habebuntur ex rectis quibusdam minus principalibus, quae momenta plerumque in figuras secundarias cadere solere arbitror. Operae pretium erit pro eo instituere calculum generalem.

13 tantum *(1)* similes *(2)* sunt 14 et *(1)* terminis *(2)* vocabilis *L*

---

4 alibi: [**noch: Transmutationssatz, VII, 4**].

39. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS TERTIA

1. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 3. 1 Bl. 2°. Ca. 1 2/5 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Brief*, 1851, S. 354–358; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 127–131; 3. *LBG*, 1899, S. 157 bis 160; 4. (engl. Übers. von 1.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 84–90. Cc 2, Nr. 1106_1

1. Novemb. 1675

Analyseos Tetragonisticae pars III.
Usus Centrobarycae

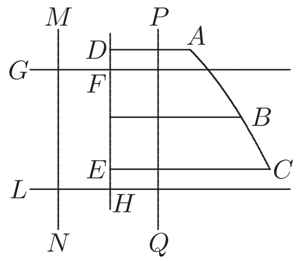


fig. 1.

Diu est quod observavi dato curvae ABC vel figurae curvilineae $DABCE$ momento ex duabus rectis inter se parallis ut GF, LH; (vel $MN. PQ.$) haberi aream figurae, quo-

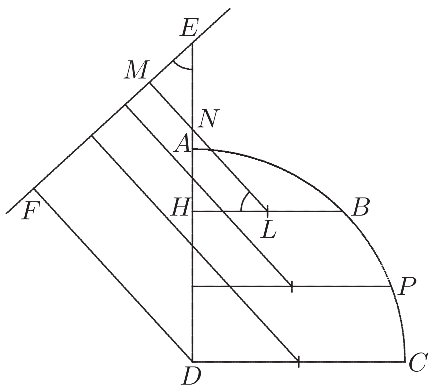
8 f. *Rechts daneben:* Prima erat 25. Octob. 2[da] 29. Octob.
Unter Fig. 2: Scheda 2[da] notanda de differentiali calculo tunc mihi rudius cognito, et satis tantum quantum ad scopum.

9 Usus Centrobarycae *erg. L*

8 f. Prima: N. 36; 2[da]: N. 38. 8 f. Scheda: **[noch]** 11 observavi: **[noch]**.

niam duo momenta different inter se cylindro figurae cujus altitudo distantia parallelarum. Hoc verum est in omnibus progressionibus, sive Numericis sive linearibus. Id est etiamsi non adhibeantur figurae curvilineae sed polygona ordinata. Id est tametsi differentiae inter terminos non sint infinite parvae. Sit quaelibet quantitas ordinata, ut z. sit numerus ordinalis x. erit $b\,\overline{\text{omn } z} \sqcap - \text{omn } \overline{zx} + \text{omn}\,\overline{z \frown x + b}$. idque per se patet ex solo calculo. Ope hujus regulae inveniuntur summae terminorum progressionis Arithmeticae replicatae reciprocae. Et haec multiplicatio locum habet, cum quaeritur momentum ordinatarum ex recta ad axem perpendiculari.

Sed si quaeratur momentum ex alia recta, regula generalis haec est: ex quantitatum quarum summae momentum quaeritur, singularum centris gravitatis ducatur perpendicularis ad rectam librationis. Summa rectangulorum sub distantiis sive perpendicularibus et quantitatibus aequabitur momento ex recta data. Unde si sit recta aequilibrii axi eadem, statim sequitur momentum figurae ex axe, aequari summae quadratorum dimidiatorum. Et cum axi parallela est, ab eo differre data quantitate: sed sumamus aliam rectam in circulo exempli causa fig. 2.



[*Fig. 2*]

1 f. parallelarum. *(1)* | Hinc si qva *streicht Hrsg.* | sit series *(2)* Hoc *L* 5 ǂ omn $\overline{\text{zx}}$ ǂ omn $\overline{\text{z} \frown \text{x} + \text{b}}$ *L ändert Hrsg.* 7 reciprocae. *(1)* Sed si *(a)* numerus non sit *(b)* momentum qvaeratur *(aa)* in plano *(bb)* ex rectae in in [*!*] eodem plano sitae non axi perp *(2)* Et *L* 11 rectam *(1)* (planum in solido *(2)* aeqvil *(3)* librationis. *(a)* Harum *(aa)* summa *(bb)* in ipsas datas ductarum summa *(b)* summa *L*

5 erit: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung sind nur jeweils die unteren Vorzeichen korrekt. 6 inveniuntur: s. VII, 3 N. 38_2 S. 384.

Sit quadrans $ABCD$. vertex A. centrum D. Detur alia recta EF. ita scilicet, ut data sit DF perpendicularis et FE quo diameter ei occurrit, adeoque et DE. Sit ordinata circuli HB. cujus dimidium punctum L. Ducatur LM perpendicularis ad FE. patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ EFD. et EMN (N punctum intersectionis ML. AD) et LHN esse similia. Sit $HD \sqcap x$. erit $HL \sqcap \frac{y}{2} \sqcap \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}$. Jam ob triangula similia $\frac{NH}{HL} \sqcap \frac{DF \sqcap d}{FE \sqcap f}$. Ergo $NH \sqcap \frac{d}{2f}\sqrt{a^2-x^2} \sqcap \frac{y}{2}\,\frac{d}{f}$. Ergo $EN \sqcap DE\,(\sqcap e) - HD\,(\sqcap x) - NH\,(\sqcap \frac{d}{2f}y)$. Ergo $EN \sqcap e - x - \frac{dy}{2f}$. Jam $NL \sqcap \sqrt{NH^2+HL^2} \sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4f^2}y^2+\frac{y^2}{4}} \sqcap \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}$. et $\frac{MN}{EN} \sqcap \frac{NH}{NL}$. sive $MN \sqcap \frac{NH, EN}{NL}$. adeoque $MN \sqcap \frac{\frac{yd}{2f}, \frown\, e-x-\frac{dy}{2f}}{\frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}} \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}}\;\overline{e-x-\frac{dy}{2f}}$.

et $ML \sqcap MN+NL \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}}\;\overline{e-x-\frac{dy}{2f}}+\frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}$. ($e \sqcap \sqrt{f^2-d^2}$[)] sive $ML \sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}-x-\frac{d}{2f}y}+\frac{d^2+f^2}{2f}y}{\sqrt{d^2+f^2}} \sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}-x}+\frac{f}{2}y}{\sqrt{d^2+f^2}}$. Qui calculus cuilibet curvae communis est sumta semper x. pro abscissa, et y pro ordinata.

Rectangulum ergo sub ML et $HB(\sqcap y)$ sive momentum cujusque ordinatae ex recta EF ponderatae sive ωa erit $\sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}y-xy}+\frac{f}{2}y^2}{\sqrt{d^2+f^2}}$.

1 vertex | B. *ändert Hrsg.* | centrum *L* 4 ML. *(1)* ND *(2)* AD) *(a)* esse *(aa)* communia *(bb)* similia. Ergo *(b)* et *L* 13–255,1 $\sqcap$ $\left|\frac{\mathrm{d}\,\overline{\sqrt{\mathrm{f}^2-\mathrm{d}^2}\mathrm{y}-\mathrm{xy}}+\frac{\mathrm{f}}{2}\mathrm{y}^2}{\sqrt{\mathrm{d}^2+\mathrm{f}^2}}\right.$ *ändert Hrsg.* $\Big|$. *(1)* Unde patet ad habendum curvae momen *(2)* Ergo *(a)* | ex *streicht Hrsg.* | dat *(b)* omn. *L*

9 $e \sqcap \sqrt{f^2-d^2}$: Richtig wäre $e \sqcap \sqrt{f^2+d^2}$. Leibniz rechnet konsequent mit dem falschen Wert bis S. 255 Z. 17 f.; dies beeinträchtigt jedoch nicht die allgemeinen Überlegungen.

Ergo omn. ω. habebuntur ex datis omn. y. omn. xy. et omn. y^2. vel etiam si ex his quatuor dentur tres dabitur quartum. Jam omn. xy. aequantur momento figurae ex vertice. omn. y^2. aequantur [duplo] momento figurae ex axe. Ergo datis tribus figurae momentis, ex duabus scilicet rectis inter se perpendicularibus, et tertia qualibet datur ejus area. Sed hoc tamen theorema minus generale est, quam prius in prima hujus Schediasmatis pagina, ubi nihil refert quis sit angulus rectarum, modo dentur tria momenta. Intelligitur autem semper, in eodem plano. (Hoc interim theorema sufficit ad curvam Hyperbolae primariae.[)] Si f sit infinita seu si FE et ED. parallelae, fiet $dy + \frac{y^2}{2} \sqcap \omega a$. quod dudum constat.

Notandum diversis calculis hac schediasmatis plagula, et prima[,] aream quantitatis cujus centrum gravitatis (etsi NB. non ipsa tota) in plano dato positum est, ex datis tribus momentis ex tribus ejusdem plani rectis inveniri. Unde videndum an non comparati inter se eventus quiddam novum praebeant. Si non figurae sed curvae ut omnium BP, PC etc. momenta quaerantur ex punctis $B. P. C.$ tantum ad rectam dimittendae perpendiculares sive ordinatae. Nihil enim refert ex extremo an medio ipsius BP. v. g. ducantur, differentiae enim infinite parvae inter duas ejusmodi perpendiculares. Ergo curvae elementum appellando z. momentum curvae ex recta EF, fiet: $\frac{d\sqrt{f^2 - d^2}z - dxz + fyz}{\sqrt{d^2 + f^2}}$.

Pleraque theoremata Geometriae indivisibilium quae apud Cavalerium , Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant statim ex calculo patent, ut v. g. perpendicula-

---

7 f. *Am Rande:* NB. ista ad curvam si applicentur, [*bricht ab*]

2 momento *(1)* curvae *(2)* figurae *L* 5 Sed *(1)* hic calculus tamen minus *(2)* hoc *L* 10 hac ... prima *erg. L* 13 praebeant. *(1)* Vel ideo qvoniam duorum v. g. in curva *(2)* si *L* 20–256,1 v. g. *(1)* superficiem ex axe aeqvari summae superfici *(2)* perpendiculares *L*

---

5 f. prima ... pagina: N. 36 S. 241 Z. 10–12; 19 Cavalerium: B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, 1635. 19 Vincentium: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647. 20 Wallisium: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* 1, S. 355 bis 478); *Mechanica*, 1670–1671 (*WO* 1, S. 570–1063). 20 Gregorium: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668; *Exercitationes geometricae*, 1668 [Marg.]; *Geometriae pars universalis*, 1688. 20 Barrovium: I. BARROW, *Lectiones geometricae*, 1672 [Marg.].

res ad axem aequari superficiei seu momento curvae ex axe; patet calculo. Nam invenies perpendicularem aequari rectangulo ex curvae Elemento in ordinatam. Talia igitur theoremata non aestimo, quemadmodum illa quoque de applicationibus interceptarum in axe, (inter tangentes et ordinatas) ad basin. Talia ergo theoremata nihil novi detegunt; nec nisi calculi compendias praebent. At meum theorema de dimensione segmentorum rem detegit novam, quia spatium cujus quaeritur dimensio aliter resolvit, nempe non tantum in ordinatas sed in triangula. Centrobaryca etiam forte aliquid detegunt novum. Poterit forte facilis methodus tradi, qua sine figuris calculo deducantur ex figura quae ex ea pendent. Gregorii theorema, de ductibus parabolarum subalternis aequalibus cylindro patet statim ex calculo[,] nam circuli ordinata $y \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$, id est $\sqcap \sqrt{a+x}$ in $\sqrt{a-x}$, eodem modo $\sqrt{2av - v^2} \sqcap y$. ergo $y \sqcap \sqrt{v}\,\frown$ in $\sqrt{2a - v}$. quae duo eodem redeunt.

Si eadem ordinata y per quandam quantitatem z, multiplicetur, et postea per eandem z† cognita sive constante b, erit differentia summarum productorum aequalis cylindro figurae: ut $zy,, - zy + by \sqcap by$. Hoc etsi per se manifeste pateat in genere, applicationes tamen non semper manifestae, sit v. g, $\dfrac{x^2}{ax - b^2}$. id est $\dfrac{x, x}{\sqrt{ax} + b, \sqrt{ax} - b} \sqcap y$. multiplicando per $\sqrt{ax} + b$ fiet $\odot$ $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax} - b}$. et multiplicando per $\sqrt{ax} - b$ fiet: $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax} + b}$ ☽. Quoniam autem pro $\dfrac{ax^2}{ax - b^2}$, fieri potest $x + \dfrac{b^2 x}{ax - b^2}$ quae pendet ex quadratura hyperbolae, itaque una ex his duabus data, ☽. et $\odot$. dabitur et altera supposita hyperbolae quadratura. $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax} + b} \sqcap x\sqrt{ax} - \dfrac{bx\sqrt{ax}}{\sqrt{ax} + b}$.

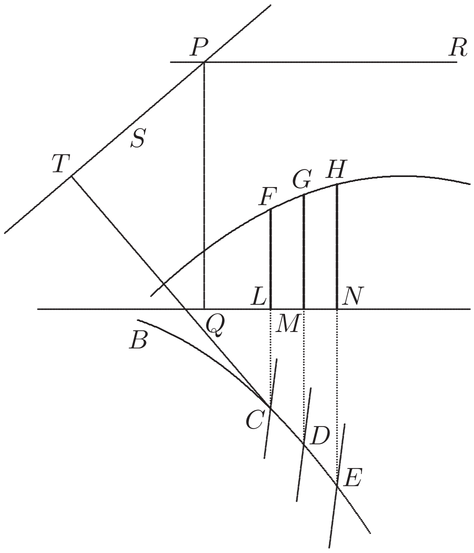
---

13 f. *Dazu am Rande:* Idem est si sit $z + b$ et $z + d$.

1 f. calculo *(1)*, si valorem super *(2)* nam invenies *(a)* superfi *(b)* perpendicularem *L* 5 de … segmentorum *erg. L* 13 productorum *erg. L*

---

5 theorema: [**noch**]. 9 Gregorii theorema: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch VII prop. LXXXIV S. 762 f. 19 $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax} + b}$: Es müsste $\dfrac{ax^2}{\sqrt{ax} + b}$ heißen.



[*Fig. 3*]

Suppone curvae cuidam in aliquo plano positae $BCDE$, in punctis C, D, E, imponi alterius curvae FGH ordinatas, perpendiculariter ad planum, et ita ut medium ordinatae punctum incidat in planum. Patet ipsas LC, MD, NE, ductas in FL, GM, HN, id est in $C. D. E$, impositas curvae $BCDE$ seu rectangula, FLC, GMD, HNE, sive ductum horum duorum planorum in seinvicem, aequari momento omnium LC, MD, NE, etc. Unde si PR sit alius axis et intervallum a QL. recta PQ. momentum ex PR, differet a

---

3 *Über* perpendiculariter: (imo et aliter)

7 si *(1)* PQ sit recta constans, et momentum ex *(2)* PR *L* 7 a | QE. *ändert Hrsg.* | recta *L*

6–8 momento … PQ: Die Produkte $FL \cdot LC$, $GM \cdot MD$, $HN \cdot NE$ etc. geben nicht das Moment der LC, MD, NE etc., sondern dasjenige der mit ihrem Schwerpunkt nach C, D, E etc. verschobenen Längen FL, GM, HN, etc. bzgl. der Achse QL. Dementsprechend unterscheiden sich die Momente bzgl. der Achsen PR und QL nicht um das Produkt des Achsenabstandes PQ und der Längen LC, MD, NE etc., sondern um dasjenige von PQ und den Längen FL, GM, HN etc., d. h. der längs der Kurve CDE errichteten krummlinigen Fläche.

momento ex QL, cylindro ipsarum LC, MD etc. in PQ. Quod si jam tum ex recta PQ tum alias ex alia recta ut TS. aliud haberetur momentum ejusdem figurae ordinatarum LF, in C impositarum, tunc haberetur etiam cylinder omnium LF. quod probo: Quia appellando QL, x. CL, y. erit $TC \sqcap \frac{f}{a}x + \frac{g}{a}y + h$. quae ducta in ipsam z. dabit: $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$. Jam zx. datur, supposito momento ex PQ. quod semper idem sive sint ipsae z. ubi erant in LF, MG, etc. sive sint positae in C. D. E. Datur et yz. sive rectangulum pro FLC, sive ductus ex hypothesi. Ergo si detur adhuc unum momentum, ordinatarum curvae in C. D. E impositarum, sit ipsum aequale $\frac{f}{a}zx+\frac{g}{a}yz+hz$. dabitur hz. seu cylinder quaesitus. Hinc eligendae curvae $BCDE$, tales, ut per diversas earum ordinatas vel in axem QL, vel in axem TS. multiplicari possint ordinatae curvae datae, cum utilitate quadam seu simplicitate. Ad quod eae curvae utiles, quae plures habent axes utiles, ut Hyperbola Circularis, seu primaria quae duas habet asymptotos, et axem, et axem conjugatum.

2 *Am Rande:* LF, vel $MG \sqcap z$.

9 ejusdem *(1)* curvae qvae eodem modo p *(2)* figurae *L* 10 et *(1)* diametrum *(2)* axem *L*

42. DE QUADRATURIS PER SUMMIS ORDINATARUM
[Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 407. 1 Zettel ca. 17,5 x 17,3 cm. Linke Kante geschwungen. 1 S. auf Bl. 407 r°. Bl. 407 v° leer. Überschrift und Hervorhebungen durch Unterstreichen in anderer Tinte ergänzt.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: **[noch]**

De quadraturis per summas ordinatarum

Si per omnes possibiles combinationes Ordinatarum inferiorum curvarum procedatur, habebimus omnes curvas superiores quarum quadratura ex datarum combinatione pendet: e. g. $\dfrac{y^2}{a} + \dfrac{a^2b}{y^2} \sqcap z$. Ergo $\dfrac{y^4+a^3b}{ay^2} \sqcap z$. Hujus ergo figurae datur dimensio: Fiet aequatio: $y^4 + a^3b \sqcap zay^2$. Inde: $y^4 - azy^2 + \dfrac{a^2z^2}{4} \sqcap a^3b + \dfrac{a^2z^2}{4}$. Ergo $\mp y^2 \pm \dfrac{az}{2} \sqcap a\sqrt{ab+\dfrac{z^2}{4}}$ et $y \sqcap \sqrt{\dfrac{az}{2} + a\sqrt{ab+\dfrac{z^2}{4}}}$. Datur ergo summa harum radicum, etsi summa harum

---

8 *Am oberen Rand, außerhalb des Textes:*
Gestrichen: $x^2 + bx \sqcap 60750\,a^2$. $x^2 \sqcap -bx + a^2$. $a^2 + 2b$ *Nicht gestrichen:* a

12–260,3 *Am Rande:* Ex numero cognitarum agnosci potest, in quot simplices resolubilis sit ordinata curvae, hoc loco, a. b.

12 $+\dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}}{\mathrm{y}^2}$ *(1)* $\sqcap$ *(2)*. summa *(a)* x *(b)* y *(3)* $\sqcap$ *(a)* v *(b)* z *L*   12 ergo | *(1)* curv *(2)* figurae *erg.* | datur *L*

---

13 $\sqcap a^3b$: Richtig wäre $-a^3b$. Leibniz rechnet konsequent weiter, der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Überlegung nicht.

$\sqrt{ab + \frac{z^2}{4}}$ non detur.

$\sqrt{az} + \frac{ab}{y} \sqcap z$. Ergo $\sqrt{az} \sqcap \frac{yz - ab}{y}$ sive $az \sqcap \frac{y^2z^2 - 2abyz + a^2b^2}{y^2}$ et fiet $y^2z^2 - y^2za - 2abyz + a^2b^2 \sqcap 0$.

Inquirendum est etiam in divisores aequationum quae sunt duarum incognitarum pluriumve.

$\frac{\pm x \pm b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. summa scilicet aut differentia x et b. Ergo $\pm x^2 \pm bx \sqcap ac$. sive $x^2 \sqcap \mp bx \pm ac$. Unde jam patet hoc modo semper cum bx est affectum signo $+$, alterum $\underline{ac}$ affectum signo $-$, nisi uno casu quo utrumque affectum signo $+$, ergo etiam x^2 aequatur summae aut differentiae ipsarum $bx.\,ac$.

Sic clarius: $\frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. Ergo $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap ca$. sive $x^2 \sqcap (\omega\alpha\alpha)bx\,(\alpha\alpha\omega)ca$.

$\frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{(\beta\beta\psi)x(\beta\psi\beta)c}{x}$. Unde fiet $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap (\beta\beta\psi)ax(\beta\psi\beta)ca$ sive $x^2 \sqcap \left(\frac{\beta\beta\psi}{\alpha\alpha\omega}\right)ax \left(\frac{\beta\psi\beta}{\alpha\alpha\omega}\right) ca$.

$(\omega\alpha\alpha)\ b..$

Hac methodo omnes varietates signorum possibiles possumus indagare, et determinationes etiam, pro qualibet analogia necessarias. Ita agnoscemus quoque ex ipsis formis aequationum in quas analogias sint resolubiles. Et in primis an agnosci possint ex ipsis analogiis, an imaginariae futurae aequationes. Neque enim puto analogiam posse esse intelligibilem, et tamen radicem omnem imaginariam.

Aequationes duobus generantur modis ex radicibus et ex analogiis. Illis in se, his per crucem multiplicatis. Utraque analysis utilis, illa ad inveniendas radices Arithmetice, seu ad inveniendas valores vel exactos, vel propinquos; ut analogiae usum videntur habere ad loca investiganda et ad valores Geometrice inveniendos, quod saepe ope curvarum satis compositarum compendiosissime fit, ut nihil aliud restet, quam ratio eas commode describendi, imprimis filis ex focis.

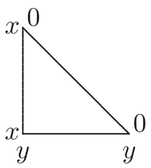
10 sic *(1)* rectius *(2)* clarius *L* 14 omnes *(1)* formas *(2)* varietates *L* 18 omnem *erg. L*

43. ORDINATARUM IN PARTES RESOLUTIO AD QUADRATURAS
[September 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 94. 1 Bl. 2°, von dem das obere Drittel abgeschnitten wurde. 4/5 S. auf Bl. 94 r°. Bl. 94 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 788

Datierungsgründe: **[noch]**

Ordinatarum in partes resolutio ad quadraturas



[*Fig. 1*]

Si sit Aequatio $y^2 + x^2 \sqcap 0$. seu $y^2 \sqcap -x^2$. quaeritur modus inveniendi ipsam y. Erit $y \sqcap x\sqrt{-1}$. Sane nondum video quomodo id quidem instrui queat, nisi ita procedamus forte: $ya \sqcap xa\sqrt{\dfrac{-a}{a}}$. Pro $-a$ substituatur b, et pro $+a$, ponatur $-b$, fiet: $\cancel{+}y\cancel{b} \sqcap \cancel{+}x\cancel{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Sed ne hoc quidem satisfacit.

Si inde facias $y^2 + a^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $y^2 + a^2 \sqcap a + x \frown a - x$. Jam $y^2 + a^2$, potest intelligi facta ex $ay \frown \dfrac{y}{a} + \dfrac{a}{y}$, fiet $\dfrac{ay^2}{a} + \dfrac{aya}{y}$, sive $y^2 + a^2$, fiet $\dfrac{ay}{a+x} \sqcap \dfrac{a-x}{\dfrac{y}{a} + \dfrac{a}{y}}$ sive

8 *(1)* Constructio *(2)* Si *L* 9 ipsam *(1)* x, e⟨r⟩ *(2)* y *(3)* | x *ändert Hrsg.* | Erit *L* 10 qvidem *(1)* construi *(2)* instrui *L* 10 forte: *(1)* y ⊓ x$\sqrt{\dfrac{-a}{a}}$ *(2)* ya ⊓ xa | $\sqrt{-a}$ *ändert Hrsg.* | pro *L*

$\sqcap \dfrac{a^2y - xay}{y^2+a^2}$ sive $\dfrac{a}{a+x} \sqcap \dfrac{a^2-xa}{y^2+a^2}$. Idem quod ante.

Caeterum haec observatio de dissolutione ipsius a^2+y^2, in partes ex quibus componitur, $ay \frown \dfrac{y}{a} + \dfrac{a}{y}$ ad multa esse potest, inprimis autem ad destruendum; item ad resolvendum locum in lineas rectas, quod utile ad quadraturas.

$$\frac{yx}{a\rightmoon} + \frac{y}{y+b} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\rightmoon a},\ \text{fiet}\ \frac{x\cancel{y}}{\rightmoon a} + \frac{\cancel{y}}{y+b} \sqcap \frac{a\cancel{y},\frown \frac{y}{a}+\frac{a}{y}}{\rightmoon a},\ \text{sive}\ \frac{x}{\rightmoon a} + \frac{1}{y+b} \sqcap \frac{y+\frac{a^2}{y}}{\rightmoon a}.$$

Unde fit $x \sqcap y + \dfrac{a^2}{y} - \dfrac{\rightmoon a}{y+b}$.

Ordinata ergo curvae ad quam est locus propositus componitur ex ordinata ad Triangulum, et duabus ordinatis ad duas quasdam Hyperbolas. Quod ex aequatione ipsa: $\dfrac{yx}{a\rightmoon} + \dfrac{y}{y+b} \sqcap \dfrac{a^2+y^2}{\rightmoon a}$ nemo judicasset, reducatur analogia in aequationem, fiet: $\dfrac{y^2x+byx+a\rightmoon y}{\rightmoon ay+ba\rightmoon} \sqcap \dfrac{a^2+y^2}{\rightmoon a}$, et multiplicando per crucem:

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{xa}{x^2+a^2}$

$\dfrac{x}{a} - \dfrac{x^3}{a^3} + \dfrac{x^5}{a^5} - \dfrac{x^7}{a^7} \sqcap \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{b^4}{4} + \dfrac{b^6}{6} - \dfrac{b^8}{8}$ etc. vel si $b \sqcap 1$. fiet: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10}$ sive $\dfrac{2}{8} + \dfrac{2}{80}$ etc.

1 $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{a}^4}$ *L ändert Hrsg.* 2 $\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2$ *L ändert Hrsg.* 3 $\frown \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}} + \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}}$ *(1)* mire utilis esse potest ad multa, *(a)* in *(b)* inprimis autem ad deprimendas dimensiones, ut si sit: $\dfrac{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}{\rightmoon \mathrm{a}} \sqcap$ *(aa)* $\dfrac{\mathrm{y}}{\sqrt{\langle - \rangle}}$ *(bb)* $\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{y}+\mathrm{b}}$ haec aeqvatio cuilibet Cubica videbitur, si reducatur *(aaa)* vid *(bbb)* fiet enim $\dfrac{\mathrm{a}^2 \quad \mathrm{y} + \mathrm{y}^3 + \mathrm{by}^2 + \mathrm{ba}^2}{\rightmoon \mathrm{a} \ \ldots}$, sed nostro tractandi modo fiet: $\dfrac{\mathrm{ay}, \frown \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}}}{\rightmoon \mathrm{a}} \sqcap \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{y}+\mathrm{b}}$, sive $\dfrac{\mathrm{y}+\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}}{\rightmoon \mathrm{a}} \sqcap \dfrac{1}{\mathrm{y}+\mathrm{b}}$. Unde reducendo habebimus: e. g. $\dfrac{\mathrm{ay}, \frown \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}}}{\rightmoon} \sqcap$ *(2)* sive *(3)* ad *L* 3 f. destruendum; *(1)* ut si sit *(2)* item ad *(a)* reso *(b)* efficie *(c)* resolvendum *L* 6 f. $-\dfrac{\rightmoon \mathrm{a}}{\mathrm{y}+\mathrm{b}}$. *(1)* Locus ergo ad aeqvationem propositam co *(2)* Ordinata *L* 7 ex *(1)* aeqvationi *(2)* ordinata *L*

---

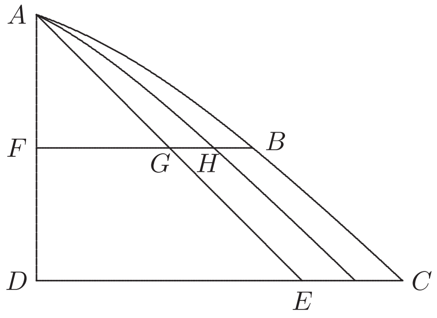
1 $\sqcap \dfrac{b^2}{2}$: Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der linken durch Quadratur. 1 $+\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10}$: Richtig wäre $+\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8}$ und anschließend $\dfrac{2}{8} + \dfrac{2}{48}$ etc.

$$\text{☽}\,ay^2x+b\,\text{☽}\,ayx\begin{array}{l}+\,a^2\,\text{☽}^2\\ -\,\text{☽}a^3\end{array}\begin{array}{l}y\\ \ldots\end{array}-\text{☽}\,ay^3-ba\,\text{☽}\,y^2-ba^3\,\text{☽}\sqcap 0.$$

vel ponendo $\dfrac{yx}{a\,\text{☽}}+\dfrac{\frac{e}{a}y}{\frac{f}{a}y+b}\sqcap\dfrac{c^2+y^2}{da}$, fiet $x\sqcap\dfrac{y+\frac{c^2}{y}}{\frac{da}{\text{☽}\,a}}-\dfrac{\text{☽}\,e}{\frac{f}{a}y+b}$, locusque propositus erit: $\dfrac{yx}{a\,\text{☽}}+\dfrac{eya}{fay+ba^2}\sqcap\dfrac{c^2+y^2}{da}$, sive $\dfrac{y^2xfa+ba^2yx+a^2\,\text{☽}\,ey}{a\,\text{☽}\,fay+ba^3\,\text{☽}}\sqcap\dfrac{c^2+y^2}{da}$, unde

2 f. erit: *(1)* $\dfrac{\mathrm{y^2x+byx+a\,☽\,y}}{\mathrm{☽\,ay+b}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{yx}}{\mathrm{a\,☽}}$ *L*

$$\left.\begin{array}{c} fa^2dy^2x + ba^3dyx + a^3 ☽ ed \;\; y - a ☽ fay^3 \; - ba^3 ☽ y^2 - ba^3 ☽ c^2 \\ - a ☽ fac^2 \ldots \end{array}\right\} \sqcap 0.$$



[*Fig. 2*]

Curvae ad quam locus iste est, dimensio, utique patet ex quadratura Hyperbolae; cum componatur ejus ordinata FB ex FG ordinata Trianguli ADE et GH. HB. ordinatis duarum diversarum Hyperbolarum.

Utilis est conversio aequationum in analogias, qualem vides; ita enim modus etiam reperitur, quo quam plurimae rectae diversae, inseri possunt, ut hoc loco 6[:] $f. d. b. c. e.$ ☽. ita ut habeatur aliqua jam supernumeraria, cum non possint in Constructionibus esse aequationes collatitiae nisi 5. Sed non sunt ad figuram datam, verum ad quamlibet. Non refert hic qualia sint signa.

Inquirendum est in formulas, quarum ope cujuslibet formulae datae divisores tam rationales quam irrationales haberi possint. Quod ad formandas analogias utile est. Item ad curvas ex aliis curvis componendas metiendasque.

1 $-$a ☽fac^{2}y^3 *L ändert Hrsg.* 1 f. $\sqcap$ 0. *(1)* Huius curvae dimen *(2)* Curvae *L* 4 componatur *(1)* ex *(a)* tri *(b)* ordinata Trianguli et *(aa)* tribus o *(bb)* duabus *(2)* eius *L* 13 nisi 5. *(1)* $2ax ǂ \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, unde $\dfrac{2a ǂ \frac{a}{q}x}{y} \sqcap \dfrac{y}{x}$, | unde *streicht Hrsg.* | *(2)* Sed *L*