Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*, **Reihe VII, Band 4. Mathematische Schriften, 1672–1673** Infinitesimalrechnung.

Es wird nachdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei der Präsentation aus in Bearbeitung befindlichen Bänden um vorläufige Ergebnisse handelt, bei denen bis zur Drucklegung noch substantielle Änderungen notwendig werden können.
Bitte beachten Sie die Bemerkung zum Copyright.

Die folgenden Handschriften von Leibniz zur Infinitesimalrechnung wurden von Walter S. Contro und Eberhard Knobloch am Leibniz-Archiv Hannover bearbeitet. Für die Erfassung der Stücke ist Susanne Bawah, aber auch Manuela Mirasch-Müller zu danken. Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino (Massachusetts) und Dominik Wujastyk (London) entwickelten TEX-Macropakets EDMAC erstellt worden.

Inhaltsverzeichnis:

24. 3. 2003

Inhaltsverzeichnis:

24. 3. 2003

It is emphatically pointed out that the presentation represents provisional results from volumes in preparation for which, until final publication in print, substantial changes may be necessary.

This electronic presentation of Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe VII, Band 4 (representing work in progress) may not be used, either in part or in total, for publication or commercial purposes without express written permission. All rights of responsible editors and publishers are reserved. Contact address: Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, 30169 Hannover, Germany; telephone: +49 511 1267 328; fax: +49 511 1267 202; e-mail: Leibnizarchiv@mail.nlb-hannover.de

Es wird nachdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei der Präsentation aus in Bearbeitung befindlichen Bänden um vorläufige Ergebnisse handelt, bei denen bis zur Drucklegung noch substantielle Änderungen notwendig werden können.

Diese elektronische Präsentation von Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe VII, Band 4, (in Arbeit befindlich) darf ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung weder ganz noch teilweise zur Veröffentlichung oder für kommerzielle Zwecke verwendet werden. Alle Rechte der Bearbeiter und Herausgeber vorbehalten. Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, 30169 Hannover, Deutschland. Telefon: +49 511 1267 328; Fax: +49 511 1267 202; e-mail: leibnizarchiv@mail.nlb-hannover.de

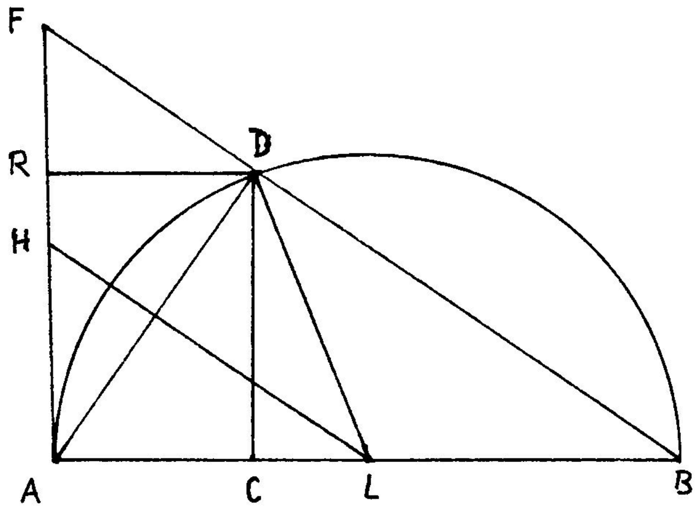
24. 3. 2003

20. DE DUCTIBUS
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 229–232. 2 Bog. 2°. 8 S. — Figuren 1–3 nicht vorhanden (Vorlage die entsprechenden Figuren aus N. 14 u. N. 15). Im Laufe der Überarbeitung umfangreiche Änderungen des ursprünglichen Textes vor allem auf dem 1. Bogen (bis Z. 11); Hinzufügung von Verweisen auf andere Sätze; substanzielle Ergänzungen (Sätze 4_2, 5_{2-3}, 6_{2-6}, 15, 16; der größte Teil der Abschnitte S. 17 Z. 1 – S. 18 Z. 16; Fig. 5 nebst den zugehörigen Abschnitten S. 21 Z. 7 – S. 22 Z. 12).
Cc 2, Nr. 697

Datierungsgründe:

Catalogus propositionum, quibus ductus curvilineorum ex circulo natorum, comparantur:



[*Fig. 1*]

13 *Fig. 1 erg. Hrsg. nach Text u. N. 17.*

∇^{la} similia: BDA et DCA. $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

sinus versus

diam. $\frown$ abscissa a vertice chorda arcus

$AB \qquad AC \qquad = \qquad AD\,\square$.

P r o p. 1. Semicubus [diametri] aequatur summae quadratorum semiparabolae, seu duplo momento semiparabolae ex axe libratae.

diam. sin. chord. chorda complementi

$\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{DC}$. Ergo $AB \frown DC = AD \frown DB$. seu

P r o p. 2. Parabola eiusdem altitudinis ac basi, ducta in se ipsam inverse, aequatur cylindro semicirculi sub diametro. Idem est de portionibus abscissis, quae aequantur cylindris semisegmentorum sub diametro.

chord. sin. chorda complem. sinus versus

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{DC}$. Ergo $AD \frown DC = DB \frown AC$. ergo

P r o p. 3. Ductus semicirculi rectus in parabolam aequatur ductui trianguli inverso in eandem, seu momento parabolae ex vertice.

Sed si ductus sit semisegmenti in parabolam, aberit momentum ex vertice abscissae portionis parabolae, per rectam basi parallelam, a basi ipsa AC distantem. Ecce rem admirabilem: semisegmentorum ductus in parabolam q u a d r a r i posse, parabolae in parabolam non posse.

∇^{la} similia: DCA et BCD. $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{DC}{AC}$.

chord. sinus vers. complem. chorda complem. sin.

$AD \frown CD = DB \frown DC$. est quodammodo inversa prioris.

P r o p. 4. Momentum parabolae vel a vertice abscissae portionis ex basi aequari portioni parabolae eiusdem a vertice abscissae inverse, ductae in semisegmentum circuli eiusdem altitudinis.

Praecedens ductus semisegmenti in parabolam erat rectus, posterior est inversus, itemque ductus est q u a d r a b i l i s .

P r o p. 4. n u m. 2. $BC \frown AC = DC\,\square$. quadrata sinuum momentis ex vertice

5 radii *L ändert Hrsg.* 14 Ductus *(1)* circuli vel semisegmenti | circularis *nicht gestr.* | inverso *(2)* semicirculi *L* 29 *(1)* P r o p. 4. n u m. 2: DB $\frown$ AC = AD $\frown$ BC. seu momentum chordarum supplementi ex basi *(2)* P r o p. 4. *L*

portionum diametri.

[∇^{la} similia FBA et ABD.] $\dfrac{FB}{AB} = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{FA}{AD}$. $FB =$ secans falsa.

chord. compl. diam.

Ergo $FB \frown DB = AB\,\square$. ergo

P r o p. 5. Parabola vel portio, seu summa chordarum complem. ducta in se ipsam, seu summa quadratorum parabolae portionisve (quae quadrari potest), aucta eadem parabola, seu summa chordarum arcuum complementalium, in summam FD ducta, aequatur cubo diametri.

C o r o l l. Cumque quadrata applicatarum parabolae summari possint, si a cubo diametri subtrahantur, residuum erit ductus parabolae inversus in figuram omnium FD. Is ergo ductus poterit q u a d r a r i .

P r o p. 5. n u m 2. $FB \frown AD = AB \frown FA$. seu secantes falsae in chordas aequantur diametro in tangentes falsas seu c y l i n d r o c o n c h o e i d i s f a l s a e .

P r o p. 5. num 3. $AB \frown AD = DB \frown FA$. diameter in chordas, chordis supplementi in tangentes falsas, seu c y l i n d e r p a r a b o l i c u s aequatur ductui inverso parabolico in conchoeidem falsam.

∇^{la} similia FDR et DCB. $\dfrac{FR}{DC} = \dfrac{FD}{DB} = \dfrac{AC = RD}{CB}$. Ergo

dist. a basi B chord. complem. dist. a basi A

$FD \frown CB = DB \frown AC$. seu

P r o p. 6. Momenta FD ex basi (eiusve portionis a vertice abscissae), aequantur momentis figurae chordarum seu parabolae eiusve portionis a basi abscissae, itidem ex basi.

At haec quadrari possunt. Ergo illa quoque.

C o r o l l. 1. Habetur ergo m o m e n t u m f i g u r a e o m n i u m FD ex basi, quadrabile. Adde inf. prop. 8. coroll.

2 ∇^{la} … ABD. *erg. Hrsg.* 2 FB = *(1)* chorda compl. aucta tangente arcus dimidii *(2)* secans *L* 7 summam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum *(2)* FD *L* 10 in *(1)* figuram tangentium dimidiorum *(2)* figuram *L* 19 *Über* FD *gestr.:* tang. dim. *L* 24 f i g u r a e *(1)* tangentium dimidiorum tam ex vertice quam ex basi, quadratus *(2)* o m n i u m *L*

Coroll. 2. Ergo et solidum revolutione reductum ad cylindrum.

Prop. 6. num. 2. $FR \frown DB = DC \frown FD$. seu [chorda supplementi in differentiam sinus] a tangente falsa = sin. $\frown FD$.

Prop. 6. num. 3. $FR \frown CB = DC \frown AC$. seu momenta ex vertice differentiarum inter sinus et tangentes falsas = momentis sinuum ex una diametri extremitate seu vertice circuli, si quadrans non excedatur, seu momenta tangentium falsarum ex basi aequantur momentis sinuum, ex utraque extremitate, id est sinuum cylindro. Add. prop. 2. et coroll. prop. 7. ubi quae huic aequantur.

∇^{la} similia: FDR et FAB. Ergo $\dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AB}{RD} = \dfrac{AF}{FR}$.

Prop. 6. num 4. $BF \frown RD = DF \frown AB$ secantis falsae momenta a vertice circuli, seu suo quoque aequantur diametro in earum differentias a chordis supplementi, seu cylindro omnium FD.

Secans autem falsa BF componitur ex chorda supplementi BD et ipsa DF seu FD. Ergo cum momentum chordarum supplementi detur, ad quadraturam omnium FD opus erit eorum momento ex circuli vertice.

Prop. 6. num 5. $BF \frown FR = DF \frown AF$. secans falsa in differentiam tangentis falsae a sinu = FD in tangentes falsas.

Prop. 6. num 6. $AB \frown FR = RD \frown AF$. differentia inter tangentem falsam et sinum in diametrum, seu cylinder conchoeidis falsae, demto cylindro portionis circularis, aequatur momento tangentium falsarum ex vertice.

Hoc ergo momentum supponit tetragonismum. Adde prop. 7. et prop. 6. num. 2. nimirum cylinder portionis circularis est momentum tangentium falsarum ex basi.

Semper autem NB. duo momenta, alterum ex vertice, alterum ex basi constituunt cylindrum.

1 revolutione *(1)* conchoeidis falsae | contractae *erg.* |, sic enim appellare placet *(2)* | eius *gestr.* | reductum ad cylindrum. | Et | esse *erg.* | aequale *(a)* cylindro sec *(b)* conoeidi parabolico homogeneumque *(c)* conoeidi circulari. *gestr.* | *L* — *Dazu interlinear, gestr.:* Conchoeidem autem falsam voco, cum secans exit non ex centro, sed ex altera diametri extremitate, tangens autem ex una A. ut AH est[,] dat conchoeidem falsam contractam. 2 f. sinus in chordam semisupplementi, demto sinu in differentiam sui *L ändert Hrsg.* 5 falsas = *(1)* cylindro sinuum, sub radio. Prop. 6. *(2)* momentis *L*
6 circuli, | quadrabilibus *gestr.* si quadrans non excedatur, *erg.* | seu *L*

Dictum paulo ante, quod chord. $\frown$ sin. $=$ chord. complem. $\frown$ sin. versus. Ergo

$$\text{sin} = \frac{\text{chord. complem.} \frown \text{sin. vers.}}{\text{chord.}}.$$

Ergo si applicatae semiparabolae basis altitudini aequalis, ex basi sumtae ducantur in rationes sinuum versorum ad applicatas eiusdem parabolae respondentes ex vertice sumtas (seu aeque distantes a vertice, ut illae a basi) producentur applicatae quadrantis circuli. Et summa illorum, dabit semisegmenta circularia ex radio abscissa per applicatam.

Aliter: si rationes applicatarum diverse sumtarum, ita tamen ut ex basi sumta sit antecedens, ex vertice sumta consequens, inter se ducantur in sinus versos applicatarum parabolae ex basi sumtarum, a vertice, producentur sinus seu applicatae quadrantis, et ex summa semisegmentum ex radio abscissum vel etiam quadrans.

Sunt autem applicatae parabolae[:]

$$\frac{\text{Rq} \llcorner \text{a}^2 - \beta \text{a} \lrcorner}{\text{Rq } \beta \text{a}} \qquad \frac{\text{Rq} \llcorner \text{a}^2 - 2\beta \text{a} \lrcorner}{\text{Rq } 2\beta \text{a}} \qquad \frac{\text{Rq} \llcorner \text{a}^2 - 3\beta \text{a} \lrcorner}{\text{Rq } 3\beta \text{a}} \qquad \frac{\text{Rq} \llcorner \text{a}^2 - 4\beta \text{a} \lrcorner}{\text{Rq } 4\beta \text{a}}$$

fiet

$$Rq \llcorner \frac{a^2}{\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{2\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{3\beta a} - 1 \lrcorner$$

seu

$$Rq \llcorner \frac{a}{\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{2\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{3\beta} - 1 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

quae si ducantur in

$$a - \beta \qquad a - 2\beta \qquad a - 3\beta$$

vel

$$Rq \llcorner a^2 + \beta^2 - 2a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 4\beta^2 - 4a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 9\beta^2 - 6a\beta \lrcorner$$

fient

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

---

22 $\dfrac{a^2 + \beta^2 - 2a\beta}{1} \quad \dfrac{—}{—} \quad \dfrac{a}{\beta} = \dfrac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2.$

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2 - a^2 - \beta^2 + 2a\beta \lrcorner \quad \text{sinus.}$$

$$\llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner Rq.$$

3 basis ... sumtae *erg. L* 7 f. ita ... consequens *erg. L*

sinus.

∇^{la} similia: BAF et BCD. $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo

Prop. 7. $AB \frown CD = CB \frown AF$. seu cylinder portionis circuli sub AC a vertice abscissa, aequatur momento tangentium duplorum arcuum dimidiatorum seu distantiis earum a basi.

Intelligendum est enim AF applicatam esse ubi est CD. basis eius seu maxima applicabitur in B. ergo CB. est applicatae distantia a basi; est autem AF tangentis arcus dimidii, AH duplum. Cylinder ergo portionis ACD sub AC aequatur momentis omnium AF applicatarum ad AC.

Coroll. Hinc momentum chonchoeidis falsae ex basi, et ductus parabolico-parabolicus inversus aequantur per prop. hanc iuncta prop. 2. adde prop. 6 num. 3. et prop. 19.

Pergendum in his aequationibus: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo

$$\underset{\text{diam.}}{AB} \frown \underset{\text{chord. complem.}}{DB} = \underset{\text{sin. vers.}}{CB} \frown \underset{\text{chord. compl.} + [FD]}{FB}.$$ Ergo

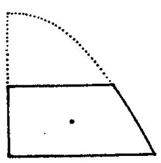
Prop. 8. Cylinder cuius basis portio semiparabolae a basi per applicatam abscissae, altitudo diameter, aequatur summae momentorum ex basi, tam chordarum, seu portionis parabolicae a basi per applicatam abscissae, quam omnium FD, seu portionis figurae omnium FD a vertice abscissae.

Coroll. Hinc rursus quadratura momenti figurae omnium FD. ut et supra prop. 6. coroll.

---

4 seu momento conchoeidis falsae

3 CB $\frown$ AF. *(1)* | seu *nicht gestr.* | semicubus radii, vel etiam *(a)* cylinder semiquadrati portionis regulae vel sinus versi *(b)* prisma sinus versi sub radio *(2)* seu cylinder portionis *(a)* quadrantis | sub *nicht gestr.* | radio *(b)* circuli *(aa)* altitudine AC *(bb)* sub *L* 9 f. ad AC. | At cum AF sit duplum FD. *(1)* et momen *(2)* vel AH. tangentium dimidiorum, seu applicatarum conchoeidis falsae contractae, et ostenderimus tangentium dimidiorum momentum aequari momento portionis parabolae a vertice abscissae, ex basi. Ergo cylinder portionis circularis, momento parabolico aequaretur. Quod si verum esset haberetur non tantum *(a)* qua *(b)* tetragonismus sed et goniotomia |. Et certe nondum invenio errorem. *gestr.* | modo haberi possit centrum gravitatis portionis semiparabolae a basi per applicatam abscissae.



Sin minus habetur saltem tetragonismus arithmeticus, *(aa)* isque non per approximationes, sed exactus, *(bb)* nimirum per infinitam seriem numerorum rationalium quod hactenus in circulo potuit nemo. Et quod est admirabilius, datur sectio angulorum universalis, seu inventio quotcunque proportionalium methodo eadem. *gestr.* | Coroll. *L*

11 inversus *(1)* quadrari possunt *(2)* aequantur *L* 13 tang. arcus dimid. *L ändert Hrsg.* 17 quam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum, seu conchoeidis falsae contractae *(2)* omnium *L* 19 momenti *(1)* conchoeidis falsae contractae. *(2)* figurae *L* 21 falsae | (protractae) *gestr.* | *L*

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{dupl. tang. arcus dimid.}}{AF} \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{chord. compl.}}{DB} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sin}}{CD} \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{chord. compl.} + FD}{FB}$. Ergo

P r o p. 9. Portio conchoeidis falsae a vertice abscissae, ducta in portionem semiparabolae a basi abscissae, aequatur portionis semicirculi a vertice abscissae, ductui in semiparabolicam a basi abscissae, demto ductu eiusdem portionis semicirculi in figurae omnium FD portionem a vertice abscissam. Eadem omnium portionum altitudine (AC) supposita.

Iam ductus parabolico-circularis quadrari potest, prop. 3. Ergo ductus parabolicus in conchoeidem falsam demto ductu circulari in fig. FD q u a d r a r i potest.

Antequam autem ad novas aequationes procedamus operae pretium est resumere atque examinare alibi iam explicatas, ac uno velut obtutu oculis sistere.

Diximus supra $FD \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{chord. compl.}}{DB}$ quadrari posse.

At quia etiam $\dfrac{FD}{DB} = \dfrac{DR = AC}{CB}$ portio regulae a vertice port. circ. / altera portio seu supplementum regulae.

Ergo $FD \frown CB = DB \frown AC$. ut iam habuimus. Ergo $FD = \dfrac{AC \frown DB}{CB}$. Ergo $\dfrac{AC \frown DB}{CB} \frown DB = FD \frown DB$. Ergo

P r o p. 10. $\dfrac{AC \frown \square DB}{CB} = FD \frown DB$. seu [solido] dato quia $FD \frown DB$ quadrabile est, sup. prop. 5. coroll.

---

3 NB. cum c o n c h o e i d e m dico, intelligo exemta circuli generatoris portione. Cum de ductibus loquor, intelligo iisdem regulae portionibus seu altitudinibus assumtis; et quod de totis, idem de partibus per applicatas abscissis intelligo.

1 chord. compl. + *(1)* tang. dimid. *(2)* FD *L* 5 f. in *(1)* conchoeidis falsae contractae *(2)* figurae *L* 13 supra *(1)* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{tang. dimid.}}{\text{FD}} \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{chord. compl.}}{\text{DB}} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{diam}}{\text{AB}} \square$. *(2)* FD *L* 16 FD $\frown$ DB *(1)* = *(a)* AB$\square$. Ergo P r o p. 10. $\dfrac{\text{AC} \frown \square\text{DB}}{\text{CB}} = \text{AB}\square$. *(b)* plano *(aa)* assignabili *(bb)* dato *(2)*. Ergo *L* 17 plano *L ändert Hrsg.*

At $\square^{\text{ta}}$ DB seu chordarum a maxima, seu ab AB ita procedunt:

$a^2 \qquad a^2-\beta a \qquad a^2-2\beta a \qquad a^2-3\beta a$

eae ducantur in suas distantias ab A. seu in AC.

$0 \qquad \beta \qquad 2\beta \qquad 3\beta$

fient

$0 \qquad a^2\beta-\beta^2 a \qquad 2a^2\beta-4\beta^2 a \qquad 3a^2\beta-9\beta^2 a \qquad$ etc.

Quae si dividantur per CB. seu distantias a B.

$a \qquad a-\beta \qquad a-2\beta \qquad a-3\beta$

[fiet]

$$\frac{0}{a} \qquad \frac{a^2\beta-\beta^2 a}{a-\beta} \qquad \frac{2a^2\beta-4\beta^2 a}{a-2\beta} \qquad \frac{3a^2\beta-9\beta^2 a}{a-3\beta} \qquad \text{etc.} \quad = \text{solido dato.}$$

C o r o l l. 1. Manifestum est, hoc solidum esse progressionis cuiusdam ad harmonicam accedentis, seu hyperboliformis, et tamen quadrari posse. Quod nulli hactenus quod sciam hyperboloeidi contigit.

Idem ex solido transferri potest in planum, divisis omnibus per a, unde apparet ipsum solidum esse spatii cuiusdam hyperboloeidis cylindrum, fiet enim basis:

$$\frac{a\beta-\beta^2}{a-\beta}+\frac{2a\beta-4\beta^2}{a-2\beta}+\frac{3a\beta-9\beta^2}{a-3\beta} \text{ etc.} = \text{solido dato per } a \text{ diviso.}$$

Hoc spatium habet asymptotam, sed in eo differt ab hyperbolico quod incipit a puncto, nam $\dfrac{a\beta-\beta^2}{a-\beta} = [\beta] =$ puncto, β enim est infinitesima ipsius a. Ipsae autem rectae a. $a-\beta$. $a-2\beta$ etc. sunt distantiae applicatarum ab aymptota continue decrescentes uniformiter, ut in spatio hyperbolico asymptoto. Habemus ergo

C o r o l l. 2. q u a d r a t u r a m p l a n i h y p e r b o l o e i d i s asymptoti infiniti.

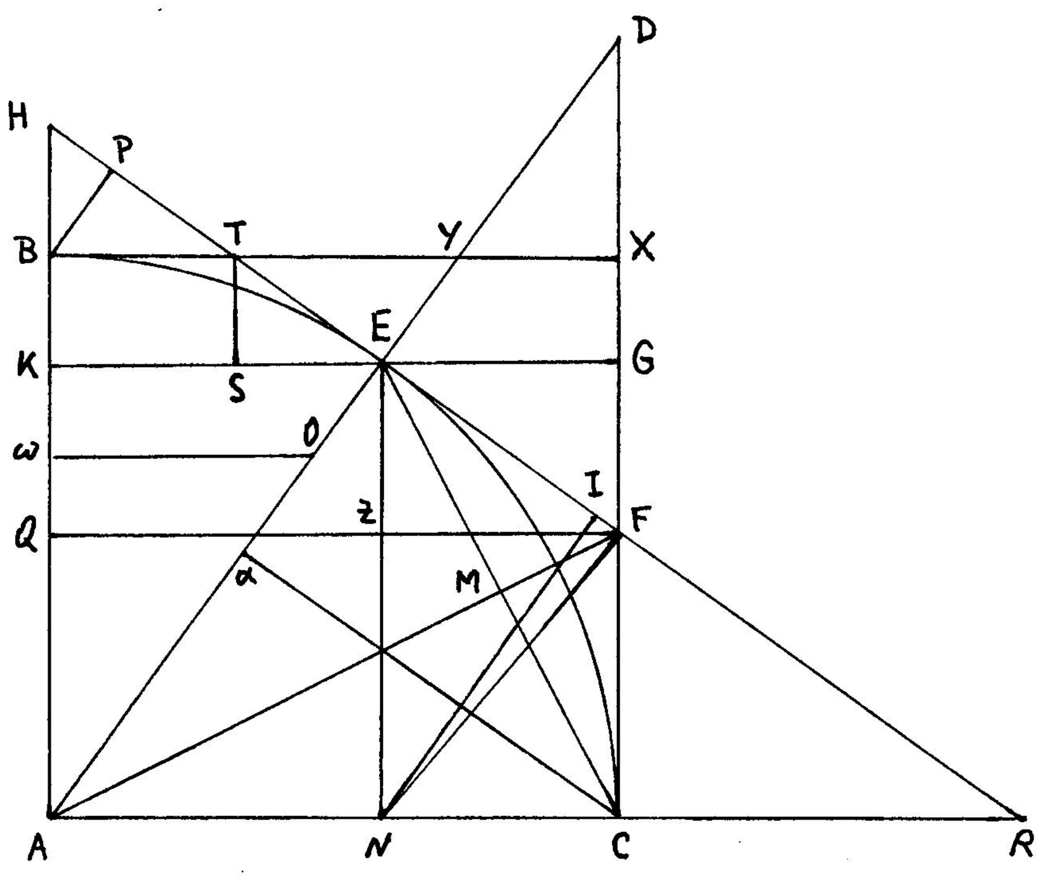
Quod hactenus quantum sciam nemo praestitit. Nam solidum hyperbolicum, seu ungulam spatii asymptoti, ideo quadrare facillimum fuit quia elementa eius non

9 fiet *gestr. L, erg. Hrsg.* 10 = *(1)* a^3. *(2)* solido *L* 15 cylindrum | sub a *gestr.* |, fiet *L* 16 = *(1)* a^2 *(2)* solido *L* 18 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$ *L ändert Hrsg.*

11 C o r o l l. 1. : Leibniz übersieht, dass $\dfrac{na^2\beta-n^2\beta^2 a}{a-n\beta} = na\beta$ ist, so dass sich keine Hyperbel- sondern eine Parabelquadratur bzw. eine Identität ergibt.

hyperbolice sed cylindrice, ut elementa rectanguli, progrediuntur, ex nota hyperbolae proprietate.

Figura II.



[*Fig. 2*]

∇^{la} ADC et EDF similia. Ergo $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{DC}{DE} = \dfrac{AC}{EF}$.

P r o p. 11. $AD \frown DE = DF \frown DC$. secans in seipsum radio demto = tangenti in seipsum, demto tangente arcus dimidii, adde inf. prop. 43. coroll. 1.
$d^2 - \cancel{ad} = c^2 - \cancel{ad} + a^2$. seu quadrata applicatarum spatii hyperbolici ad altitudinem, demto c y l i n d r o h y p e r b o l i c o , aequantur quadratis tangentium,

4 *Fig. 2 erg. Hrsg. nach Text u. N. 17.* 8 $\mathrm{d}^2 - \ldots + \mathrm{a}^2$. *erg. L*

seu applicatarum conchoeidis, demto rectangulo tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, seu ductu conchoeidis in conchoeidem falsam contractam, seu demto cylindro hyp. add. cub. rad. prop. 13. Ergo quadr. sec. = quad. tang. + quad. rad.

Caeterum quadrata ista applicatarum, credo summari non posse; quia ipsae applicatae sunt infinitae, nec refert, quod applicatae summari possunt. Nam omnia quadrata sunt momentum utique figurae seu omnium applicatarum ex altitudine, at momentum hoc est figura ducta in distantiam centri gravitatis, ab axe librationis. Quam distantiam necesse est esse assignabili qualibet maiorem. Semper enim quamcunque ducas rectam ex asymptota altitudini parallelam, patet ab uno eius latere finitas, ab altero infinitas longitudines esse. Pro longitudinibus autem seu distantiis continue pondera crescunt. Quare non est dubitandum haec spatia quibusdam quadrato-quadratis aequari, quemadmodum lineas infinitas aequari quadratis, alibi ostendi hyperbolae ipsius exemplo, in qua asymptota, quadrato illi, numeratori communi, aequalis est.

Unde praeclara consequentia ducitur, scilicet figuras quadratoquadratas, aliasque quascunque altiores non esse imaginarias, sed reapse posse exhiberi. Quod alioquin multis modis in partibus inassignabilibus ostendi potest, quemadmodum aliud paradoxum longe maius dari dimensiones medias inter puncta, lineas, superficies, corpora etc.

Ductus autem tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, finitus est ut mox ostenderimus. Nam maximus tangentium arcus dimidii est ipse radius, unde patet conchoeidem falsam, eiusque contractam esse finitae longitudinis, nec habere asymptotam.

Prop. 12. $AD \frown EF = DF \frown AC$. secans in tangentem arcus dimidii aequatur differentiae tangentium, arcus dati et dimidii, in radium, seu spatium hyperbolicum in conchoeidem falsam contractam, aequatur cylindro conchoeidis ve-

---

21 Nota quod dixi conchoeidem falsam eiusve contractam esse finitam intellige, si intra quadrantem sistatur, quod fit quotiescunque secantibus, scilicet ex radio ductis utimur, at quoties chordas ex adversa diametri extremitate venientes ipsamque diametrum adhibemus, tunc ultra quadrantem ad ipsum usque semicirculum progredimur, quod in conchoeidis falsae eiusve contractae dimensione notandum est.

2–4 seu demto ... quad. rad. *erg. L* 16–18 Quod alioquin ... corpora etc. *erg. L* rae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae, adde prop. 38.

Prop. 13 $DC \frown EF = DE \frown AC$. seu tangens arcus dati in tangentem arcus dimidii aequatur radio in differentiam secantis et radii.

Ergo ductus conchoeidis verae in falsam contractam, cylindro hyperbolico demto cubo radii, add. prop. 37.

Ergo cubus radii aequatur cylindro hyperbolico demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam. Quare si ductus iste quadrari posset, haberetur quadratura hyperbolae, unde apparet, quanti sit momenti haec ductuum doctrina.

Cylinder hyperbolicus demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam quadrari potest, semper autem aequatur cubo radii, quaecunque sit altitudo portionis regulae, quod notabile est.

∇^{la} DEF et DGE similia sunt. Ergo $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DE}{DG} = \dfrac{EF}{EG}$.

Prop. 14. $DF \frown DG = DE\square$. quadratum differentiae inter secantem et radium aequatur differentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii ductae in differentiam sinus et tangentis.

15 quadratum *(1)* complementi sinus | altitudinis seu portionis a vertice abscissae *erg.* | *(2)* differentiae *L* 17 et *(1)* secantis. $\text{sec.}\frown\text{sec.} + \text{rad.}\frown\text{rad.} - 2\text{rad.}\frown\text{sec.} = \text{sec.}\frown\text{tang.} - \dfrac{\substack{\text{tang.} - \text{tang. dim.}\\ \text{sec.} - \text{sin.}}}{\text{sin.} \frown \text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}} - \text{sec.}\frown\text{tang. dim.}$ Ergo semicubus portionis a vertice abscissae = ductui conchoeidis in spatium hyperbolicum addito ductu portionis circularis in conchoeidem falsam contractam, demto ductu portionis circularis in conchoeidem | *darüber nicht gestr.:* prop. 46. 20. |, demtoque ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam | *darüber erg. u. gestr.:* Coroll. seu demto cylindro conchoeidis verae, addito cylindro conchoeidis falsae contractae per prop. 14 |. Idem sic enuntiari potest: semicubus aequatur ductui hyperbolae in conchoeidem veram falsa contracta minutam, addito ductu portionis circularis in *(a)* eandem *(b)* falsam contractam, demto ductu eiusdem in veram | *darüber nicht gestr.:* (qui quadrari potest posita hyperb. quadr. prop. 20.) |. Mirabilis est ista figurarum usque adeo heterogenearum atque extraordinariarum quadratura. *Absatz.* Coroll. Eadem est quadratura si per prop. 14. pro ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam substituas cylindrum conchoeidis verae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae. *(2)* tangentis *L*

---

15 Prop. 14.: Die fehlerhafte 1. Fassung des Satzes hat Leibniz, wie die Verweise auf spätere Aussagen zeigen, bis zu Satz 48 beibehalten; erst dann hat er den Irrtum bemerkt und korrigiert.

sec. $\frown$ sec. + rad. $\frown$ rad. - 2 rad. $\frown$sec. =

tang. − tang. dim. [sec.$\frown$ rad. − quad. $\frown$rad.]

tang. − sin. \ /

tang. $\frown$ tang. − sin. $\frown$ tang. + sin. $\frown$ tang. dim. − tang. $\frown$ tang. dim.

seu $\cancel{2}$ rad. $\frown$ rad. −$\cancel{2}$ rad. $\frown$sec. = − sin. $\frown$ tang. + sin. $\frown$ tang. dim.

− ~~rad. $\frown$ sec.~~ + ~~rad. $\frown$ rad.~~

Iam sin. $\frown$ tang. = [sec. $\frown$ rad.] − rad. in sin. compl.

Ergo: rad. $\frown$ rad. = rad. in sin. compl. + sin. $\frown$ tang. dimid.

Vide infra post prop. 48.

P r o p. 15. $DF \frown EG = DE \frown EF$. seu differentiae tangentium a tangentibus arcuum dimidiorum ductae in distantias suas a vertice, seu eorum momenta aequantur differentiis inter radium et secantem in tangentem arcus dimidii ductis, seu ductui hyperbolae in tangentes arcus dimidii, demto c y l i n d r o tangentium arcus dimidii.

P r o p. 16. $DE \frown EG = DG \frown EF$. seu momentum ex vertice differentiarum inter secantem et radium (quod datur data hyperbolae quadratura) aequatur ductui differentiae inter sinum et tangentem, in tangentem arcus dimidii; seu cylindro hyperbolico demto cubo radii (id est tangenti in tangentem arcus dimidii) et demto ductu sinuum in tangentes arcuum dimidiorum.

Ergo is ductus habetur dato hyperbolae tetragonismo.

$$\cancel{da} - df - a^2 + af = \cancel{ad} - \cancel{a^2} - bi.$$

/\

$\cancel{a^2}$

Ergo sinus in tang. arc. dimid. $bi = a^2 - af$. seu sinus in tang. arc. dimid. = rad. in dist. a vertice. Ergo q u a d r a b i l e .

Regula artis combinatoriae in geometria:

Post lineas fundamentales, nulla facile recta ducenda est, quae non sit a puncto aliquo iam dato, ad aliud iam datum, aut quae non sit alteri cuidam parallela, aut aequalis, aut rationis ad eam datae, aut anguli aequalis, aut perpendicularis. Sed hoc inprimis

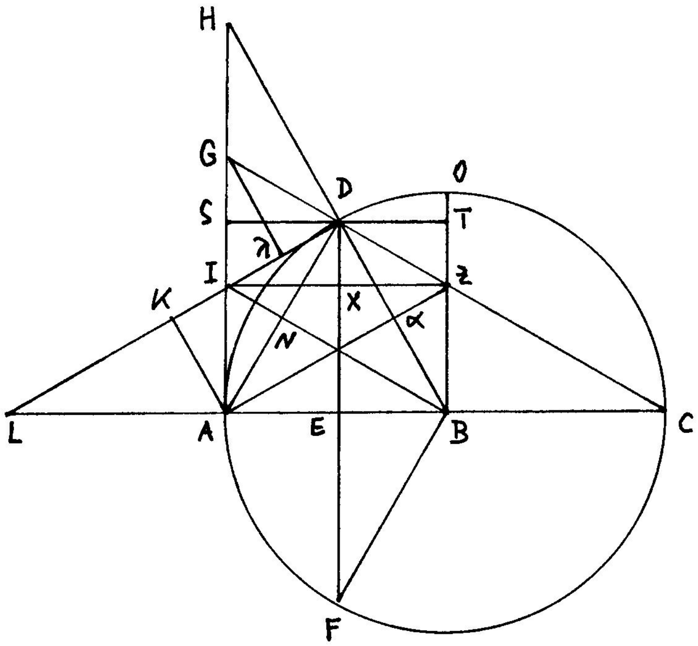
2 cyl. hyp. − *(1)* quad. rad. *nicht gestr.* *(2)* cub. rad. *L ändert Hrsg.* 7 cyl. hyp. *L ändert Hrsg.* 16 (quod *(1)* q u a d r a r i potest *(2)* datur *L* 19 f. dimidiorum. *(1)* Hoc ergo ductu habito haberetur h y p e r b o l a e t e t r a g o n i s m u s. *(2)* Ergo *L*

observandum, ut linea ex puncto dato ducta sit alteri parallela aut perpendicularis, aut aequalis, aut angulum faciens aequalem.

Inprimis autem magni momenti est, triangula similia, inprimis rectangula constituere, quoad eius fieri potest. In rectangulis enim triangulis inter se comparatis, sufficit unius anguli obliquorum aequalitas, ad perfectam similitudinem.

Porro ope similium triangulorum, habentur lineae proportionales. At harum ope omnis generis rectangula aequalia.

Sed et alius modus est inveniendi rectangula aequalia citra similitudinem diversorum ∇^{lorum}, si scilicet in eodem ∇^{lo} diversis modis assumtae altitudines in bases ducantur. Quod inprimis utile est, in triangulis quae rectilinea non sunt, nam in rectilineis res ad considerationem triangulorum similium redit.



[*Fig. 3*]

12 *Fig. 3 erg. Hrsg. nach Text u. N. 14.*

12 [*Fig. 3*]: Es ist zu beachten, dass Leibniz die urspüngliche spezielle Fassung der fig. 3. (s. N. 14) heranzieht und mit ihrer Hilfe die folgenden Beziehungen ableitet, die daher nicht immer allgemein gültig sind, so dass die darauf basierenden Integrationen falsch werden.

Fig. 3. ∇IDZ. ubi $IZ \frown XD = ID \frown \alpha D$. at $\alpha D = EA$. distantia a vertice.
NB. radius ductus in sinum demto tangente arcus dimidii aequatur momento tangentium arcus dimidii ex vertice.
Dato hoc momento et figura ipsa datur tetragonismus ut alibi.

∇IDB. tang. dimid. ID in radium DB = secanti dimidii BI in [sinum dimidii DN].

NI differentia inter NB regulae portionem ex centro, et BI secantem, ducta in sinum duplicatum AD aequatur ID in AK non tamen momento tangentium arcus ex vertice.
NB est dimidia CD. et BI dimidia CG.
Dato autem momento ex basi, datur momentum ex vertice et contra, saltem cylindris datis.
Hinc sequitur quadrabilem esse differentiam inter circularem portionem, et conchoeidis falsae contractae.

∇BDC. DE sinus in radium BC = chordae complementi DC in semisinum arcus.

Fig. 3. in ∇^{lo} ZDB. rad. BD. in $Z\alpha = AZ\ (= BI) - A\alpha\ (= DE)$ aequatur $ZB \frown BE$.
Radius in differentiam secantis arcus dimidii a sinu dati, aequatur $ZB \frown BE$ tangenti arcus dimidii in distantiam a basi, seu momento horum tangentium ex basi, ac denique aequatur differentiae DZ inter CD et CZ $(= BI)$, seu inter chordam supplementi, et secantem arcus dimidii in sinum arcus dimidii DN.
Horum ergo omnium per prop. 19. coroll. 6. q u a d r a t u r a haberi potest.

---

20 *Daneben (bezogen auf die Grundstufe) großes*

3 f. ex *(1)* circuli centro *(2)* vertice. | Dato hoc momento | et *(a)* conchoeide *(b)* figura ipsa *erg.* | datur ... alibi. *erg.* *(aa)* Nota datur autem hoc momentum *(bb)* Dato momento tangentium fig. sufficit momentum tangentium verarum ad tetragonismum. *erg. u. gestr.* | *L* 5 dimidium semi *L ändert Hrsg.* 6 inter *(1)* radium et secantem, ducta in sinum duplicatum (quadrabilis) aequatur momento tangentium arcus | dimidii *gestr.* | ex vertice, | sed eorum duplo *gestr.* | *(2)* NB | semicordam *(!)* complementi *erg. u. gestr.* | regulae *L* 10 saltem *(1)* in totis *(2)* cylindris *L* 18 aequatur *(1)* illi toties dicto TD | = GD. male, tota ZD non est = DG. *erg.* | *(2)* differentiae *L* 20 per prop. 19. coroll. 6. *erg.* *L*

---

6 NI: s. dazu auch S. 18 Z. 11. 14 ∇BDC.: s. dazu auch S. 18 Z. 3.

Et quia habetur ductus sinuum in chordas supplementi, habebitur ductus sinuum in secantes arcus dimidii.

NB. fig. 3. ∇BDC : BC rad. in DE sin. = chorda compl. in sagittam complementi. NB. sagitta est distantia a centro, non tamen ideo cylinder quadrantis aequatur momento semicirculi, quia intellegi debent applicari chordae ubi sunt sinus et tunc sunt parabolae, sed sagittae non sunt amplius earum distantiae a centro.

Fig. 3. ∇FBD. radius FB in sinum complementi arcus dimidii BN = duplo sinui arcus dati FD in BE sinum complementi.
Ergo summa sinuum complementi arcus dimidii q u a d r a r i potest. Ergo et summa sinuum versorum arcus dimidii.

Esto in fig. 3. ∇^{lum} AID. chorda arcus in diff. secantis et sinus complementi aequatur ID tangenti dimidii, in sinum versum $AK = AE$. seu momento tangentis dimidii ex vertice.
Hoc vero momentum quadrabile est, forte et sinus complementi in chordam, ergo tunc foret quoque quadrabilis ductus hyperbolicus in parabolicum.

In ∇BAD. AB rad. in ED sinum = sinus complementi arcus dimidii, in chordam.

Portiones conchoeidis falsae, ademtis portionibus cissoeidis, faciunt portiones cy-

---

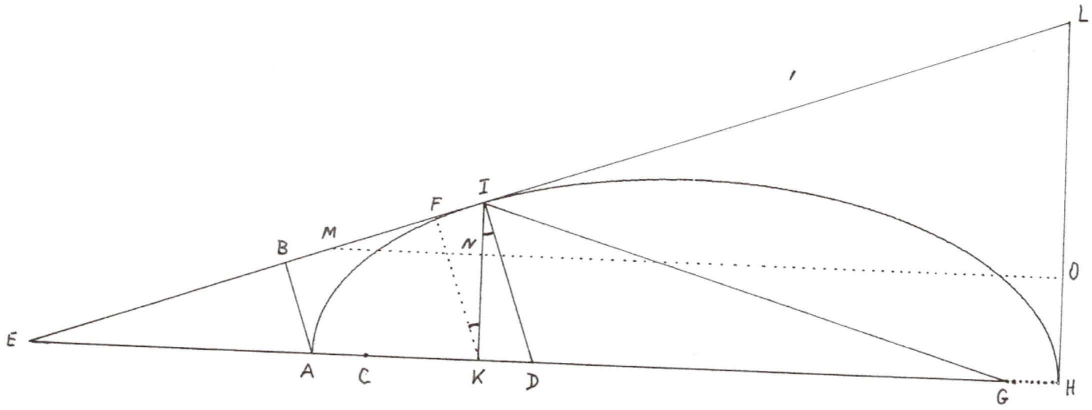
14 NB. hoc momentum ex vertice est quadrabile, quia figura (segmento) detracta ex portione circulari, residua manet rectilinea.

16 NB.

17,20–18,1 potest. *(1)* Quare differentia inter portionem circularem *(2)* At secans *(3)* Hinc data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae, et vicissim. Imo data dimensione partium hyperbolae, datur sectio angulorum universalis. | Imo forte error quia in prop. 19. coroll. 6. ponderant ex basi per centrum non per extremum diametri transeunte. Sed quicquid huius sit, si unum momentum datur, dabitur etiam alterum, modo et figurae dimensio detur, data enim distantia centri figurae, a basi per centrum circuli transeunte, dabitur et a transeunte per diametri extremum. Ergo data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae *(a)* non *(b)* et contra. Quia figurae dimensio pendet a circuli quadratura igitur et ex data circuli quadratura, dabitur curva elliptica et parabolica. *erg.* | *(4)* Et *L* 11 *(1)* NB. videtur etiam ductus hyperbolico-parabolicus quadrari posse *(2)* Esto *L* 14 forte *erg.* *L* 15 parabolicum. | Imo non est, nam *gestr.* | *L* cloeidis; modo scilicet a cycloeide portiones circulorum generantium ademtae intelligantur.

Lineae figuraeque epicyclicae dimensio.
Arnaldus, Bullialdus, Carcavius, Dalancius, Galloisius, Huetius, Hugenius, Oldenburgius, Thevenotus, Thomasius.

Conchoeis falsa contracta est momentum arcus circuli ex tangente, seu duplum eius segmentum.



[*Fig. 4*]

Si sit ellipsis AIH. foci C et G. punctum quodlibet in curva sumtum I. ex quo perpendicularis in distantiam focorum CG demissa ID. erit $\dfrac{CG}{AH} = \dfrac{DG}{IG}$. ut ostendit P. Fabri, *Synoψ. Opt.* prop. 51.
Ergo $CG \frown IG = AH \frown DG$. seu summa omnium rectarum ex uno focorum ad curvam ducibilium, ducta in distantiam focorum, aequatur abscissis a perpendiculari ex distantia focorum, ductis in diametrum transversam maiorem. Ergo bases horum cylindrorum erunt ut altitudines reciproce, seu summa ductarum ex foco ad curvam, erit ad summam abscissarum, ut est diameter transversa ad distantiam focorum.
Et hoc verum est, quomodocunque unitas in constructione assumatur, seu quaecunque

1 scilicet a | conchoeide et *gestr.* | cycloeide *L*

---

10 ostendit: *a. a. O.* S. 155. Auf dieser Seite hat Leibniz in seinem Handexemplar die fehlende Figurenangabe (fig. 127) ergänzt.

intelligatur regula, sive ea sit curva, sive CD. sive ipsa IG. continue crescens uniformiter.

In omni figura perpendicularis ex curva ad altitudinem, seu applicata, ut IK ∇^{lum} rectangulum EIK in similia secat. Hinc similia ∇^{la} EID. et EIK. et IKD.

Ergo $\dfrac{ED}{EI} = \dfrac{EI}{EK} = \dfrac{ID}{IK}$. Ergo $ED \frown EK = \underline{\underline{\square\, EI}}$. item: $ED \frown IK = EI \frown ID$. item: $EI \frown IK = EK \frown ID$.

Porro $\dfrac{EI}{ID} = \dfrac{EK}{IK} = \dfrac{IK}{KD}$. ergo: $EI \frown IK = EK \frown ID$. habuimus. $EI \frown KD = ID \frown IK$. denique $EK \frown KD = \underline{\underline{IK\,\square}}$. seu applicata est media proportionalis inter portiones quas facit in parte altitudinis inter tangentem et perpendicularem interiecta.

Tandem: $\dfrac{ED}{ID} = \dfrac{EI}{IK} = \dfrac{ID}{KD}$. Ergo $ED \frown IK = ID \frown EI$. habuimus $ED \frown KD = \underline{\underline{ID\,\square}}$. seu perpendicularis est media proportionalis inter totum intervallum perpendicularis et tangentis in altitudine sumtum, eiusque portionem minorem.

Demissa recta KF constat angulos KID et FKI esse aequales ergo ∇^{la} KFI et IKD similia ergo $\dfrac{ID}{IK} = \dfrac{IK}{KF} = \dfrac{KD}{FI}$. Ergo $ID \frown KF = IK\,\square$.

Si tangens EI continuetur dum perpendiculari HL occurrat in L. et ex applicata ducatur parallela ipsi EH. nempe MN. patet ∇^{la} MIN et MLO esse similia ergo

$$\frac{LI}{IM} = \frac{LO}{IN} = \frac{KH = NO}{MN}.$$

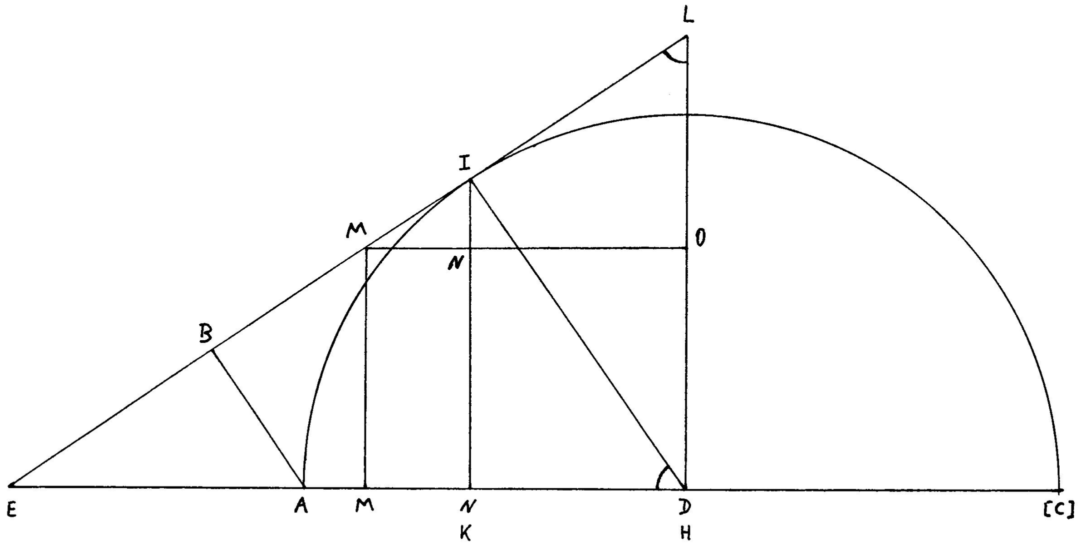
Ergo $LI \frown IN = IM \frown LO$. seu tangentes IL applicatae arcubus IM aequantur summae partium basis LH. demtis applicatis $OH = NK$.

Item $LI \frown MN = IM \frown KH$. Ergo momenta chordarum seu exiguorum arcuum ex basi aequantur summae portionum tangentium inter basin et punctum contactus interceptae altitudini applicatarum, nam ipsae MN sunt altitudinis partes, eamque exacte implent. Quibus si ipsae tangentes imponantur, posita divisione AH. si ponatur esse diameter circuli in infinitas MN inter se aequales, orietur figura tangentium, seu conchoeis circulo generatore deminuta, ea ergo aequalis est momento arcus.

17 f. seu *(1)* secantes *(2)* tangentes ... summae *(a)* tangentium *(b)* partium ... = NK. *erg. L*

16–21,5 Die Ähnlichkeitsbeziehung ist unrichtig. Dadurch wird die folgende Textaussage falsch; die beiden anderen sind im Ansatz richtig.

Idem universaliter verum est, quaecunque portio conchoeidis assumatur. Conchoeis ergo et quaevis eius portio abscissa quadrari potest, si curva illa sit circularis, quia curvae circularis momentum ex basi radio quadrari potest. Imo error, non tangentium summa sed tangentium arcus supplementi. Nec obest, quod tandem LI fit infinita MO semper manet finita, nam et $\underline{\underline{MN}}$ fit infinities minor IM puncto.



[*Fig. 5*]

$EID\nabla$ tangens in radium = secanti in sinum.

Secans in secantem complementi = radio in tang. + tang, compl. ob ∇ELD.

$\dfrac{LM}{IM} = \dfrac{OM}{NM} = \dfrac{LO}{IN}$. ergo

$LM \frown NM = IM \frown OM$. item $LM \frown IN = IM \frown LO$. $\quad OM \frown IN = NM \frown LO$.

$\dfrac{LE}{IM} = \dfrac{LH}{IN} = \dfrac{EH}{MN}$.

$LE \frown IN = IM \frown LH$. $\quad LE \frown MN = IM \frown EH$. $\quad LH \frown MN = EH \frown IN$.

∇^{la} similia EIK et MIN. Ergo $\dfrac{EI}{IM} = \dfrac{EK}{MN} = \dfrac{IK}{IN}$.

6 *Fig. 5*: H *L ändert Hrsg.* 7 | EID∇ *erg.* | *(1)* secans in radium = tangenti in sinum. Quo posito dabitur absoluta conchoeidis quadratura *(2)* tangens L

$EI \frown MN = IM \frown EK.$ $EI \frown IN = IM \frown IK.$ $EK \frown IN = MN \frown IK.$
sum. tang.

Item ∇^{la} similia EIH et IMN. Ergo $\dfrac{EH}{IM} = \dfrac{IH}{IN} = \dfrac{IE}{MN}$. Ergo

$EH \frown IN = IM \frown IH.$ seu in circulo secans in basin = radio in chordam seu arcum.
$IH \frown MN = IN \frown IE.$ ergo quadrari possunt omnia $IN \frown IE = IM \frown IK.$
$EH \frown MN = IM \frown IE.$ seu tangentes applicatae arcubus aequantur hyperbolae.

Tandem similia ∇^{la} EBA et IMN. nam $\vee BEA = IMN$. Ergo $\dfrac{EA}{IM} = \dfrac{AB}{IN} = \dfrac{BE}{MN}$. Ergo

$EA \frown IN = AB \frown IM.$ Ergo EA applicatae basi aequantur segmento figurae duplicato (utile hoc in cycloeide, ubi quadratura cuiusdam segmenti).
$AB \frown MN = IN \frown BE.$ in circulo $AB = AK$.
$EA \frown MN = IM \frown BE.$

∇^{la} AHE et AEN similia sunt. Ergo: $\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{EN} = \dfrac{HE}{AN}$.

Prop. 17. $AH \frown EN = AE\,\square$. seu secans in sinum complementi aequatur quadrato radii. Quod aliunde constat, quia quadratum radii divisum per portionem regulae seu distantiam a basi seu sinum complementi, dat secantem. Hoc ergo idem est cum momento hyperbolae ex basi.

Prop. 18. $AH \frown AN = AE \frown HE$. secans in sinum = radio in tangentem. Ergo cylinder conchoeidalis aequatur ductui portionis circularis in hyperbolicam. Adde prop. 56.

4 *Hinter der Formel größeres* NB.

9 segmento *(1)* circuli *(2)* figurae *L* 15 per *(1)* distantiam a basi *nicht gestr.* *(2)* portionem *L*

13 ∇^{la} AHE et AEN: Von hier an greift Leibniz auf fig. 2. zurück. Die Figur gilt für die Sätze 17–76 sowie 79 u. 80.

P r o p. 19. $AE \frown AN = EN \frown HE$. seu c y l i n d e r c i r c u l a r i s aequatur m o m e n t o tangentium ex basi.

Hoc theorema conferendum cum p r o p. 7. Ibi diameter ductus in sinum, aequatur tangenti falso ducto in distantiam a basi, id est in distantiam ab altera diametri extremitate, seu si arcus minor quadrante, in distantiam a centro + rad. Hoc loco (ubi arcus quadrantem nunquam excedit) radius ductus in sinum, aequatur tangenti vero, ducto in distantiam suam a centro.

Esto radius a. sinus b. tangens verus c. falsus d. distantia a centro seu tangentis veri a basi e. tangentis falsi a basi $e + a$. Iam $ab = ce$. item $2ab = de + da$.

C o r o l l. 1: Ergo $2ce = de + da$.

C o r o l l. 2: Ergo $\frac{2ce}{d} = e + a$. Et quia $2ce - de = da$.

C o r o l l. 3: Ergo $2c - d = \frac{da}{e}$. Item quia $2ab - da = de$. erit

C o r o l l. 4: $2b - d = \frac{de}{a}$.

---

1 f. *Zu* P r o p. 19 *am Rande ergänzt:*
cyl. circ. = ab. momentum tangentium ex basi = ec. Iam vid. <u>15. et 12.</u> add. prop. 6. num 6. mom. tang. ex vertice, scilicet id = (prop. 15 + 12) cyl. conchoeid. ver. − cyl. quadrupli segmenti arcus (seu minus cyl. conchoeid. fals.) + (per duct. prop. 6. num. 6.) + cyl. conchoeid. fals. seu cyl. quadrupl. segm. sub rad. − cyl. port. circ.
Ergo, iungendo utrumque momentum: cyl. conch. = cyl. circ. + cyl. conch. − cyl. circ. Calculi comprobatio. Add. prop. 24.

5 f. loco *(1)* diameter *(2)* | (ubi ... excedit) *erg.* | radius *L* 8 f. seu *(1)* sinus *(2)* tangentis veri a basi *erg. L* 13–24,1 $\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{a}}$. | C o r o l l 5. Ergo omnes 2b − d. seu ductae in a = de. Seu | dupla *erg.* | summa sinuum | omnium *erg.* | id est quadrans | duplicatus seu semicirculus *erg.* |, demtis tangentibus falsis omnibus in quadrante, aequatur tangenti falso | maximo *erg.* | quadrantis, id est diametro, ducto in veri tangentis quadrantis radio scilicet applicati, distantiam a basi. Quae nulla est, tangentibus cum falsis continuo applicatis radio, maximus cadit in ipsum centrum. Hinc sequitur s u m m a m t a n g e n t i u m f a l s o r u m quadrantis, aequari | semi *gestr.* | circulo. Ecce modum probandi, *(1)* ubi de toto *(2)* dimensionem totius, sine partium dimensione. Sed partes alias metimur, generaliterque definiemus summam tangentium falsorum aequari duplo | semi *gestr.* | segmento arcus | , seu segmento arcus duplicati *gestr.* | . *gestr.* | Porro *L*

Porro

Coroll 1. etiam sic enuntiari potest: duplum momentum tangentium verorum ex basi per centrum transeunte aequari momento tangentium falsorum, addito cylindro eorum sub radio.

Coroll. 4tum ita enuntiari potest: summa sinuum duplicatorum demta summa tangentium falsorum, aequatur dicto momento tangentium falsorum, per radium diviso. Idque non tantum in quadrante, sed et in alia quacunque portione circulari minore.

Coroll. 6. Hinc dimensio momenti tangentium falsorum ex basi.

Nam summa sinuum duplicata est duplum semisegmentum arcus dati, seu segmentum arcus BE dupli. Summa tangentium falsorum est quater segmentum arcus BE [dimidiati]. Ergo differentia, seu ∇^{lum} BKE [duplicatum] ductum in radium, dabit momentum tangentium falsorum.

∇^{la} AEN (vel KEA) et HKE similia sunt. Ergo: $\dfrac{AE}{HE} = \dfrac{AK}{HE} = \dfrac{KE}{KH}$.

$AE \frown KE = HE \frown AK$. coincidit cum prop. 19.

Prop. 20. $AE \frown KH = HE \frown KE$. seu radius in differentiam secantis et distantiam a basi per centrum transeunte aequatur tangenti in sinum. Seu cylinder hyperbolicus demto prismate, cuius basis distantiae a basi (quadrabiles) aequatur ductui portionis conchoidalis in circularem.

Ergo ductus portionis conchoeidalis in circularem, prop. 14. 46, demto cylindro hyperbolico, quadrari potest. Add. prop. 27. et repetita prop. 14. post prop. 48.

4 f. radio. | Coroll. 2. ita enuntiatur. *gestr.* | *(1)* Ex corollario 4to praeter 5tum duco sextum. Coroll. 6tum *(2)* Coroll. 4tum *L* 13 dimidiati *erg. Hrsg.* 13 duplicatum *gestr. L, erg. Hrsg.* 14 f. falsorum. | Coroll. 7. ideo coneides tangentium falsorum reduci potest ad verum cylindrum, etsi area ad segmentum. *gestr.* | ∇^{la} *L* 17 HE $\frown$ KE. *(1)* seu differentia secantis a radio, *(a)* in momentu *(b)* in distantia a basi *(2)* seu *L* 18 f. Seu *(1)* momentum *(a)* hyp *(b)* differentiarum *(c)* applicatarum *(aa)* hyperbolae *(bb)* spatii hyperbolici radio cuilibet earum ademto (quod quadrari potest) *(2)* cylinder hyperbolicus demto *(a)* semiquadrato cui *(b)* prismate *L*

9 Coroll. 6.: In diesem Korollar setzt Leibniz entgegen der Ausgansformel $d = a - tg\dfrac{\varphi}{2}$.

Prop. 21. $AK \frown KH = KE\,\square$. seu quadratum sinus aequatur differentiae secantis a distantia a basi momento ex basi.

Utrumque autem quadrari dudum constat.

∇^{la} similia: AEH et BPH. Ergo: $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AE}{BP} = \dfrac{EH}{HP}$.

Prop. 22. $AH \frown BP = AE \frown HB$. secans in distantiam a circuli vertice = radio in differentiam radii a secante. Seu momentum spatii hyperbolici ex vertice, aequatur cylindro hyperbolico sub radio, demta summa radiorum, quae quadrabilis est in radium.

Ergo cylinder hyperbolicus demto momento spatii ex vertice, quadrari potest est enim momentum ex basi. Hoc per se patet.

Prop. 23. $AH \frown HP = HB \frown EH$. secans in differentiam inter sinum et tangentem aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem.

Radius a. sinus b. tangens c. secans d. ita $dc - db = dc - ac$.

Coroll. Ergo $db = ac$. seu secans in sinum = radio in tangentem.

Ergo ductus hyperbolicus in circularem, aequalis cylindro conchoeidali.

Prop. 24. $AE \frown HP = BP \frown EH$. radius in differentiam tangentis et sinus aequatur distantiae a vertice in tangentem, seu cylinder conchoeidalis, demto circulari, uterque sub radio, aequatur momento portionis conchoeidalis ex vertice.

∇^{la} similia: HPB et EGF. quia $\vee^{\text{li}}$ BHP et EFG. aequales. Ergo:

$$\frac{FE}{HB} = \frac{GF}{HP} = \frac{EG}{BP}.$$

Prop. 25. $FE \frown HP = HB \frown GF$. seu [tangentes] arcus supplementi dimidiati in differentiam tangentis et sinus, aequantur differentiae inter radium et secantem in differentiam inter distantiam a basi et tangentem arcus supplementi dimidii.

Seu posito radio a. secante d. distantia a basi f. tangente arcus suppl. dimid. e.

7 f. summa *(1)* distantiarum a vertice *(2)* radiorum ... est *(a)* (semiquadratum distantiae a vertice) *(b)* in *L* 23 seu *(1)* momenta tangentium arcus supplementi dimidiati, ex vertice circuli *(2)* | tangentium *ändert Hrsg.* | arcus *L* 25 inter *(1)* sinum *(2)* distantiam *L* 26 secante d. *(1)* sinu b. *(2)* distantia *L*

---

21 ∇^{la} similia: Bei der Behandlung der aus dieser Beziehung abgeleiteten Aussagen unterlaufen Leibniz verschiedene Versehen, welche trotz nachfolgender Korrekturen nicht alle behoben werden. Die Sätze 25–27 sind daher nur eingeschränkt gültig.

fiet $d-a, \frown f-e.$ seu $df-de-af+ae=ec-eb.$ seu momentum hyperbolicum ex basi demto ductu hyperbolico in tang. dim. suppl. demto momento sinuum ex basi addito denique cylindro tang. arc. suppl. dim. Si hic quadrari potest, ut alibi ostensum ergo momenta tang. arc. supplem. dim. addito ductu hyp. in tang. dim. suppl. quadrari possunt. Prop. 46. coroll. 2.

Prop. 26. $FE \frown BP = HB \frown EG.$ tang. dim. suppl. momentum ex vertice circuli = diff. inter distantiam a basi et radium in diff. rad. et sec. [;] seu ductus tang. suppl. dimid. in conchoeid. − tang. dimid. suppl. ductus in port. circ. $= a-f. \frown d-a. = ad-a^2-fd+fa.$ seu cylindro hyperbolico sub radio demtis radiis in radios, demto momento hyperbolico addito prismate distantiarum a basi.

Prop. 27. $GF \frown BP = HP \frown EG.$ differentia tangentis dimid. arcus supp. a distantia a basi, ducta in differentiam radii et distantiae a basi, aequatur differentiae inter tangentem et sinum in differentiam inter sinum et radium, seu $[e]-f \frown a-f = c-b \frown a-b.$

$[e]-f \frown a-f = ea-ef-fa+f^2 = c-b \frown a-b = ca-cb-ba-b^2.$ seu $ca-da+af-ba-b^2.$

Seu cylinder tangentium arcus dimidii supplementi $\underline{\underline{ea}}$, additis distantiarum a

---

6 *Zur Formel:* prop. 46. coroll. 2.

17 *Zur Streichung:* (quadrabilis) *mit gültigem* non *überschrieben.*

1 fiet *(1)* d − a, ⌢ b − e. seu db − de − ab + ae = | ec − eb. *erg.* | seu ductus hyperbolicus in circularem (cylinder conchoeidalis) *(2)* d − a, ⌢ f − e. *L* 2 suppl. *(1)* addito cylindro circulari *(2)* demto *L* 5 suppl. *(1)* et cyl. circ. | *darüber:* mom. arc. | demto cyl. conchoeid. *(2)* quadrari *L* 8 circ. *(1)* | b iam posito sinu *erg. u. nicht gestr.* | = a − b. ⌢ d − a = ad − a^2 − bd + ba. *(2)* = a − f. ⌢ d − a. *L* 10 demto *(1)* cylindro conchoeidis (=bd) *(2)* momento *L* 10 addito *(1)* cylindro circulari *(2)* momen *(3)* prismate *L* 11 dimid. arcus supp. *erg. L* 13 seu *(1)* c − f ⌢ a − f = c − b ⌢ a − b. c − f ⌢ a − f = $\cancel{ca}$ − cf − fa + f^2 = c − b ⌢ a − b = $\cancel{ca}$ − cb − ba − b^2. Ergo f^2 − cf − fa = b^2 − cb − ba. Ergo f^2 − cf − fa − b^2 + cb + ba = 0. Ergo f^2 + cb + ba = cf + fa + b^2. Seu quadrato distantiarum a basi aucta ductu conchoeido-circulari (qui demto cylindro quodam hyperbolico quadrari potest prop. 20.) et cylindro circulari, aequantur momento tangentium, radio in distantias a basi, sinuum quadratis. Hinc dari potest momentum tangentium, dato tetragonismo circuli et hyperbolae. Vicissim data quadratura hyperbolae eiusve partium, et momento conchoeidis *(a)* eiusve *(b)* eiusque partium datur tetragonismus circuli eiusque partium seu sectio angulorum universalis et quotcunque mediarum proportionalium inventio. *(2)* | c *ändert Hrsg.* | − f *L* 15 c *L ändert Hrsg.* 17 $\underline{\underline{\text{ea}}}$ | (quadrabilis) *gestr.* |, additis *L*

basi quadratis $\underline{\underline{f^2}}$ (quadrabilibus) et quadratis sinuum $\underline{\underline{b^2}}$ (itidem quadrabilibus), demtis $\underline{\underline{fa}}$ distantiis a basi in radium (itidem quadrabilibus), iisdem rursus additis (et ideo plane omissis), aequatur cylindro conchoeidali $\underline{\underline{ca}}$ addito momento tangentium arcus dimid. suppl. $\underline{\underline{ef}}$, demtis cylindris hyperbolico et circulari.

Cylindri autem isti omnes sunt sub radio, etsi altitudo partium abscissarum a vertice radio minor sit. Quodsi momenta tangentium arcus dim. suppl. redigi possunt vel ad figuram rectilineam vel saltem ad cylindrum circularem, ut credo, et verum est conchoeidis et hyperbolae et partium quadraturas a se invicem dependere, necesse est dari quadraturam circuli et partium eius, data quadratura hyperbolae; si etiam cylinder tang. semicomplementi quadrari queat, sed ille non potest.

∇^{la} similia: AEK et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC}{AK} = \dfrac{AC = AE}{KE}$.

Prop. 28. $AD \frown AK = AE \frown DC$. secans complementi in distantiam a basi per centrum transeunte seu sinum complementi, aequatur radio in tangentem complementi, seu cylinder tangentium complementi (quadrabilis de quo infra) aequatur momento secantium complementi ex basi quadrantis seu ipsius figurae secantium complementi ex vertice.

Ergo hoc momentum quadrabile est.

Adde prop. 40. Et adde prop. 23. coroll. *Trigonometriae inassignabilium.*

Prop. 29. $AD \frown KE = AE\square$. sinus in secantem complementi, aequatur quadrato radii, seu radius est media proportionalis inter sinum arcus dati, et secantem arcus complementi.

Quare ductus circularis in figuram secantium complementi inversus, aequatur

20 *Zu* $AD \frown KE$*:* add. prop. 41.

7 vel ... vel *erg.* *L* 14 seu sinum complementi *erg.* *L* 16 f. seu ... vertice *erg.* *L* 23 secantium *(1)* falsarum *(2)* complementi *L*

19 Et adde: s. N. 21 S. 51 Z. 9 f., weitere Hinweise auf dieses Stück finden sich in den Sätzen 43, 45, 47 (Korollar 2), 51 und 72.

prismati, cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus in vertice quadrantis. Ergo quadratur.

His adde prop. 33. corollar.

Prop. 30. $DC \frown KE = AK \frown AE$. sinus in tangentem complementi aequatur radio in distantiam a basi quadrantis.

Quare ductus portionis circularis in portionem figurae tangentium complementi inversus, aequatur radio in summam distantiarum a basi seu abscissam trianguli a basi, ergo ductus iste est quadrabilis.

∇^{la} similia: AEH et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{DC}{AE} = \dfrac{AC = AE}{HE}$.

Prop. 31. $AD \frown AE = AH \frown DC$. radius in secantem complementi, aequatur secanti in tangentem complementi, atque ideo cylinder secantium complementi sub radio aequatur ductui inverso secantium, seu portionis hyperbolicae in portionem figurae tangentium complementi.

Prop. 32. $AD \frown HE = AH \frown AE$. radius in secantem, aequatur secanti complementi in tangentem, atque ideo cylinder hyperbolicus aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis in portionem figurae secantium complementi. Vide post prop. 44. et 67.

Prop. 33. $DC \frown HE = AE\square$. tangens in tangentem complementi, aequatur quadrato radii. Adde prop. 43.

Atque ideo prisma, cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus a vertice quandrantis, aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis eiusdem altitudinis a vertice abscissae, in portionem figurae tangentium complementi a basi abscissam.

Coroll. atque ideo per prop. 29. sinus in secantem complementi, aequatur tan-

13 f. complementi. | Coroll. id est, iuncta prop. 35., cylinder secantium complementi, aequatur cylindro *erg. u. gestr.* | Prop. 32. *L* 14 f. secantem | (complementi) *erg., streicht Hrsg.* |, aequatur secanti complementi | (secanti) *erg. u. gestr.* | in tangentem | (complementi) *erg. u. gestr.* |, atque *L* 20 sinus *erg. L* 21 eiusdem altitudinis *erg. L*

14 Prop. 32.: Bei der Ausformulierung erkennt Leibniz die Dualität von Satz 32 zu Satz 31. Er versucht dies mittels beigefügter Klammereinschüben auszudrücken, hat den Versuch aber schließlich doch abgebrochen; s. aber unten die Sätze 48 und 52.

genti in tangentem complementi ductusque circularis inversus in figuram secantium complementi, ductui conchoeidali inverso in figuram tangentium complementi. Adde prop. seq. 34. et 37.

∇^{la} similia: HEK et ADC. ergo $\dfrac{DA}{HE} = \dfrac{DC}{EK} = \dfrac{AC}{HK}$.

Prop. 34. $DA \frown EK = HE \frown DC$. secans complementi in sinum = tangenti in tangentem complementi, habuimus prop. 33. corollar., quadrabile.

Prop. 35. $DA \frown HK = HE \frown AC$. differentia inter secantem et sinum complementi in secantem complementi, aequatur tangenti in radium, atque ideo cylinder conchoeidalis aequatur ductui inverso figurae hyperbolicae in figuram secantium complementi, add. prop. 38, demto momento (quadrabili prop. 28) secantium complementi ex basi quadrantis seu vertice suo. Adde prop. 44. et prop. 45.

Prop. 36. $DC \frown HK = EK \frown AC$. radius in sinum = tangenti complementi in differentiam secantis et sinus complementi. Atque ideo cylinder portionis circularis aequatur ductui inverso hyperbolae in figuram tangentium complementi (= cylindro secantium complementi, prop. 31.) demto momento tangentium complementi ex vertice suo seu basi quadrantis.

∇^{la} similia: ADC et HQF. Est autem QF = radio, HF = tangenti arcus dati + tangenti arcus dimidii complementi, et HQ est differentia inter secantem et tangentem compl. dimid. vel est summa ex differentiis duabus, altera inter secantem et sinum complementi, altera inter sinum complementi et tangentem complementi dimidii. Hinc iam:

$$\frac{AD}{HF} = \frac{DC}{QF = AC} = \frac{AC}{QH}.$$

Prop. 37. $AD \frown AC = HF \frown DC$. secans complementi in radium = tangenti complementi in summam ex tangente et tangente complementi dimidii vel in secantem. Atque ideo cylinder secantium complementi sub radio, aequatur tangentibus complementi in tangentes (quadrabilibus, per prop. 33. coroll. et prop. 34.) additis tangentibus complementi in tangentes complementi dimidii.

Atqui tangentes complementi in tangentes complementi dimidii, aequantur radio

24 vel in secantem *erg. L*

in secantes complementi, demto radio in radios; seu cylindro secantium complementi, demto quadrato radii in distantiam a vertice circuli, per prop. 13.

Utraque ergo proposito, 13. et 37. eodem redit, argumento veritatis calculi. Adde prop. 45.

Prop. 38. $AD \frown QH = HF \frown AC$. secans complementi in differentiam secantis et tangentis complementi dimidii, aequatur radio in summam ex tangente et tangente complementi dimidii, atque ideo:

Cylinder conchoeidalis, addito cylindro tangentis complementi dimidiati, aequatur ductui hyperbolico inverso in figuram secantium complementi (qui per prop. 35. = cylindro conchoeidali momento secantium complementi, ex basi quadrantis, quadrabili, quod et cylindro tangentium complementi aequatur, prop. 28., aucto), demto secante complementi in tangentem complementi dimidii.

Atqui secans complementi, in tangentem complementi dimidii aequatur DF differentiae inter tangentem complementi, et tangentem complementi dimidii, in radium, supra prop. 12.

Hinc talis aequatio orietur. Esto radius a. tangens c. secans d. secans complementi g. tangens complementi h. tangens dimidii complementi e. literis superioribus retentis. Ergo:

$$gd - ge = ac + ae.$$

Sed quia pro $\underline{gd}$ substitui potest per prop. 35. $ac + ah$. et per prop. 12. pro $\underline{ge}$ substitui potest $ah - ae$. fiet aequatio talis: $ac + ah - ah + ae = ac + ae$. seu $ac + ae = ac + ae$. insigni documento calculi recte positi.

Prop. 39. $DC \frown QH = AC\square$. tangens complementi; in differentiam secantis, et tangentis semicomplementi, aequatur quadrato radii.

Atque ideo figura tangentium complementi inverse ducta in hyperbolicam, seu per

---

17 *Zu* supra *zusätzlich:* 46.

9 cylindro *(1)* conchoeidis falsae dimidiatae arcus *(2)* tangentis *L* 12 f. quod et ... prop. 28. *erg. L* 22 ac + *(1)* $\frac{a^2}{\alpha}$ ($\frac{a^2}{\alpha}$ significat quantitatem quadrabilem) *(2)* ah *L* 27–31,1 seu ... complementi *erg. L*

prop. 31. cylinder secantium complementi, demto suo ductu in figuram tangentium semisupplementi, seu per prop. 13. 37. demto cylindro secantium complementi, addito quadrato radii in distantiam a vertice circuli, seu sagittam, aequatur quadrato radii in sagittam; rursus omnia eodem redeunt certissimo argumento veritatis.

∇^{la} similia: ADC et DEG. Ergo $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{DC}{DG} = \dfrac{AC}{EG}$.

P r o p. 40. $AD \frown DG = ED \frown DC$. secans complementi in differentiam inter tangentem complementi et sinum complementi, aequatur differentiae inter secantem complementi et radium in tangentem complementi, seu

$$gh - gf = hg - ha.$$

Ergo $gf = ha$. quod iam supra, prop. 28.

P r o p. 41. $AD \frown EG = ED \frown AC$. secans complementi in differentiam radii a sinu, aequatur radio in differentiam secantis complementi et radii. Seu $ga - gb = ag - a^2$. adde prop. 29.

P r o p. 42. $DC \frown EG = DG \frown AC$. tangens compl. in differentiam sinus a radio, aequatur radio in differentiam tangentis complementi a sinu complementi. Cumque posterior terminus aequationis det summam quadrabilem, erit quadrabilis prior quoque. Ergo

C o r o l l. 1. D u c t u s tangentium complementi in differentias sinuum a radio q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo d u c t u s tangentium complementi in sinus q u a d r a r i potest.

∇^{la} similia: AHR et AEH. ergo $\dfrac{HR}{AH} = \dfrac{AR}{AE} = \dfrac{AH}{HE}$. Est autem

$ER = CD$. et $AR = AD$. et ∇^{lum} $EAR =^{\text{le}}$ et simile ∇^{lo} ADC.

P r o p. 43. $HR \frown HE = AH \square$. seu secans est media proportionalis inter tangentem

---

25 *Zu* media proportionalis: adde *Inass.* prop. 41.

13 Seu | momentum radiorum, demto momento sinuum *gestr.* | ga *L* 21 f. potest. | Nam ductus tangentium complementi in differentias secantium complementi a radio qui quadrari potest, aequatur ductui tangentium complementi in secantes complementi, demto radio in tangentes complementi, qui radii ductus seu cylinder, etiam quadrari potest. Ergo et residuum seu ductus tangentium complementi in *(1)* secantes *(2)* sinus complementi. *gestr.* | *L* 23 f. Est ... ∇^{lo} ADC. *erg.* *L*

arcus dati, et tangentem arcus dati auctum tangente arcus complementi.

Atque ideo quadrata secantium aequantur quadratis tangentium, ductu tangentium in tangentes complementi auctos. Confer cum prop. 45.

At sup. prop. 11. ostensum est quadrata secantium, demto cylindro hyperbolico sub radio aequari quadratis tangentium, demto ductu tangentium in tangentes arcus dimidii, prop. 46. coroll. 2., seu demto cylindro hyperbolico addito quadrato radii in altitudinem. Ergo

C o r o l l. 1. quadrata secantium = quadratis tangentium quadrato radii in altitudinem, seu a vertice circuli abscissam, auctis.

Hoc ita posito patet tangentem arcus dati in tangentem arcus complementi, aequari quadrato radii, quod iam habuimus prop. 33.

P r o p. 44. $HR \frown AE = AH \frown AR$. compositum ex tangente et tangente arcus complementi in radium, aequatur secanti in secantem complementi.

Hoc facile conciliabis cum prop. 36. et 28.

$$AR \frown HE = AE \frown AH.$$ habuimus, vide prop. 32.

∇^{la} similia: AHR et ADC. ergo $\dfrac{HR}{AD} = \dfrac{AR}{DC} = \dfrac{AH}{AC}$.

P r o p. 45. $HR \frown DC = AD \frown AR = AD\square$. tangens tangente complementi auctus in tangentem complementi, prop. 33. 37., aequatur quadrato secantis complementi. Seu secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi, et tangentem complementi, tangente auctum, confer cum prop. 43.

Ergo quadrata secantium complementi, excedunt quadrata tangentium complementi, ductu tangentium complementi in tangentes.

---

18 *Zu* aequatur: quadrato radii in arcum, *I n a s s i g n a b.* p r o p. 19.

6 addito *(1)* cubo *(2)* quadrato *L* 11 f. prop. 33. | *Absatz:* ∇^{la} similia: AER et AEH. ergo $\dfrac{\text{AR}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{ER} = \text{CD}}{\text{AE}} = \dfrac{\text{AE}}{\text{HE}}$. Triangulum AER aequale et simile ∇^{lo} ADC. *Absatz:* P r o p. 44. CD $\frown$ HE = AE$\square$. sed hoc iam habuimus, prop. 33. et passim. *gestr.* | P r o p. 44. *L* 22–33,1 tangentes. | At ductus tangentium comp. *gestr.* | C o r o l l. *L*

---

18 aequatur: Der Bezug der zugehörigen Anmerkung auf N. 21 enthält einen Irrtum.

C o r o l l. Ergo differentia inter quadratum tangentis et secantis, aequatur differentiae inter quadratum tangentis complementi, et quadratum secantis complementi. Eaque differentia est q u a d r a b i l i s per prop. 43. coroll. 1.

$HR \frown AC = AD \frown AH$. haec iam ex prop. 28. et 35.

$AR \frown AC = DC \frown AH$. habuimus prop. 31.

∇^{la} similia HKE et EFG. $\dfrac{HE}{EF} = \dfrac{KE}{EG} = \dfrac{KH}{GF}$.

P r o p. 46. $HE \frown EG = KE \frown EF$. tangens in differentiam inter sinum et radium, aequatur tangenti arcus semicomplementi in sinum arcus dati $= AE \frown GF$, adde prop. 63.

Seu cylinder conchoeidalis sub radio, demto, prop. 14. 20. 27., ductu spatii conchoeidalis in circulare (qui demto cylindro hyperbolico quadrabilis est, p r o p. 20.) aequatur ductui tangentium semicomplementi in sinus seu portionem circularem.

Porro ductus secantium complementi (qui sunt $\dfrac{a^2}{b}$. posito a radio, b sinu) in tangentes semicomplementi (e) aequatur cylindro tangentium complementi, demto cylindro tangentium semicomplementi per prop. 38. et 12. Quod esto x^2a. erit $\dfrac{a^2e}{b} = x^2$.

Quaeramus rationem $\dfrac{a^2e}{b}$ ad $\dfrac{be}{1}$. ea erit $\dfrac{a^2}{b^2}$. ergo si ductus secantium complementi in tangentes semicomplementi sit ut a^2. ductus circularis erit ut b^2. Et vicissim

$$\text{ductus } \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.}}{\text{sin. in tang. semicompl.}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

---

1 *Zum Korollar am Rande.* NB.

18 *Unter* ad*:* ×

18 $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$. seu si ergo si *L ändert Hrsg.*

---

12 seu: Dieser Schluss ist unzulässig. 16 erit: Auch dieser Schluss ist unzulässig; dennoch bleibt das Folgende im Wesentlichen richtig.

Ergo

$$\frac{\text{sin. in tang. semicompl.}}{b^2} = \frac{\text{secant. compl. } \dfrac{a^2}{b}\text{. in tang. semicompl.}}{a^2}.$$

atque ideo

$$\text{sin. in tang. semicompl.} = \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.} \frown b^2}{a^2}.$$

Ergo

$$[\text{ductus}]\ \frac{\text{tang. complementi} - \text{tang. semicomplementi}}{a} \text{ in } b^2$$

$$= \text{cylind. conchoeid.} + \text{cyl. hyp.} - \text{aliquid } \textit{quadrabile}.$$

Coroll. Dimensio *ductus circularis in figuram tangentium semicomplementi* supponit dimensionem conchoeidis et hyperbolae.

Prop. 46. *num.* 2: $HE \frown GF = KH \frown EF$. tangens c in differentiam sinus complementi f et tangentis semicomplementi e, aequatur tangenti semicomplementi e in differentiam secantis d et sinus complementi f. Ergo $cf - ce = ed - ef$. ergo $\dfrac{cf}{e} - c = d - f$.

Coroll. 1. Ergo summa quartarum proportionalium, ad has tres., tangentem semicomplementi, tangentem, sinum complementi, aequatur spatio hyperbolico demto aliquo quadrabili.

Coroll. 2. Aliter $cf + ef = ed + ce$. Seu momenta tangentium ex basi (ex q. circ. 19.), addita momentis, prop. 26., tangentium semicomplementi (quadrab.), aequantur, prop. 25., secantibus in tangentes semicomplementi, additis, prop. 43., tangentibus in tangentes semicomplementi. Prop. 25. supra.

Prop. 47. $HF \frown EN = AC\ (= AE) \frown AE$ seu $AE\square$. sive momenta tangentium et tangentium semicomplementi simul ex basi quadrantis, aequantur quadratis radii. Ergo sunt *quadrabilia*.

Coroll. 1. Hinc sequitur summam ex tangente et tangente dimidio comple-

---

25 Coroll. 1. ita brevius demonstres: in ∇^{lo} AHF altitudo AE = altitudini FQ. ergo basis HF = basi AH.

5 f. Ergo | cylinder *gestr., ändert Hrsg.* | *L*

menti, aequari secanti, seu $HF = AH$. quia $AH = \frac{AE\square}{EN}$. et $HF = \frac{AE\square}{EN}$.

C o r o l l. 2. Hinc differentiae inter conchoeidem et hyperbolam, aequatur tangentibus semicomplementi, de quibus 35. *Inass.*

C o r o l l. 3. Item tangens arcus dimidii, auctus tangente complementi, aequalis secanti complementi. Item $HQ = HE$.

C o r o l l. 4. Momenta tangentium semicomplementi ex basi q u a d r a b i l i a , adde prop. 61.

C o r o l l. 5. Ergo iunct. p r o p. 25 *Duct.* hyperb. in tang. semicompl. q u a d r a b i l .

P r o p. 48. $AD \frown EF = DF \frown FQ$ $(FQ = AE)$ ob ∇^{lum} ADF. ergo secans (complementi) in tangentem arcus dimidii (complementi) aequalis radio in differentiam tangentis (compl.), et tangentis arcus dimidii (compl.).

C o r o l l. Hinc haberi possunt et tangentes arcus dimidii in tang. arcus dimid. compl. si a tang. arc. dimid. in sec. auferatur tang. arc. dimid. in tang. quia sec. = tang. + tang. compl. arc. dimid.

R e p e t i t i o p r o p. 1 4 :

$DE\square = DF \frown DG$. seu quadratum differentiae secantis et radii, est aequale differentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii, ductae in differentiam inter tangentem et sinum.

Esto secans d. radius a. tangens c. tangens arcus dimidii i. sinus b. fiet:

---

6 *Über* q u a d r a b i l i a *:* male, ex q. circ.

8 *Zu* C o r o l l. 5.*:* Error

2 hyperbolam, | q u a d r a r i potest *gestr.* | aequatur *L* 10 | ∇^{la} similia: AEF et EST *gestr.* | P r o p. 48. *L*

$$\underset{\substack{\text{prop. 11.}\\ \cancel{c^2}+\underbrace{a^2}_{\cancel{2a^2}}}}{d^2} + a^2 - \cancel{2}da = c-i, \frown c-b. = \cancel{c^2} + \underset{\substack{\text{prop. 16.}\\ \cancel{a^2}-af}}{bi} - \underset{\substack{\text{prop.13.}\\ -\cancel{da}+\cancel{a^2}}}{ci} - bc.$$

$$da = bc + af.$$

Adde prop. 20. ubi idem a l i t e r demonstratum, insigni calculi confirmatione.

Redibimus ad ∇^{la} similia intermissa, de quibus ante prop. 46.

$$\frac{HE}{EF} = \frac{KE}{EG} = \frac{KH}{GF}.\ \text{habuimus } HE \frown EG = KE \frown EF, \text{ restant:}$$

P r o p. 49. $HE \frown GF = KH \frown EF.$ tangens in differentiam tangentis semicomplementi et sinus complementi, aequatur differentiae secantis et sinus complementi in tangentem semicomplementi.

$$\underset{\substack{\text{ex. q. circ.}\\ \text{duct. 19.} = ab}}{cf} - ce = \underset{\substack{\text{quadrabil.}\\ \text{Prop. 47. coroll. 4.}}}{de} - \underset{\substack{\text{quadrabil.}\\ \text{Prop. 47. coroll. 3.}}}{fe.}$$

C o r o l l. 1. Ergo *ce.* seu tangentes semicomplementi in tangentes, vel tangentes complementi in tangentes arcus dimidii pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

C o r o l l. 2. Cumque sit $c+e=d.$ erit $d^2 = c^2 + \underbrace{e^2 + 2ce}_{a^2 \text{ per prop. 11.}}.$

Ideoque e^2 seu summa quadratorum tangentium semicomplementi, vel quadrata tangentium arcus dimidii ad basin pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

14 *Zu de:* Error

1 $-$bc. | Iam $d^2 = c^2 + a^2$. p r o p. 11. *streicht Hrsg.* | *L* 19 ex *(1)* <u>da</u> seu cylindro hyperbolico, vel quadratura hyperbolae *(2)* quadratura *L* 24 quadratura *(1)* hyperbolae *(2)* circuli | , conchoeid. et hyp. *erg.* | *L*

P r o p. 50. $KE \frown GF = KH \frown EG$. seu sinus in differentiam sinus complementi, et tangentis semicomplementi, aequantur differentiae inter secantem et sinum complementi in differentiam sinus et radii.

$$\begin{array}{cccccccc} \cancel{bf} & - & be & = d - f \frown a - b = da + \cancel{fb} & - & db & - & fa. \\ /\backslash & & /\backslash & & & /\backslash & & /\backslash \\ \text{quadrab.} & & \text{ex q. circ. et hyp.} & & & \text{q. circ. et hyp.} & & \text{quadrab.} \\ & & 46. & & & \text{vel q. conchoeid.} & & \end{array}$$

P r o p. 51. $NI \frown EF = ZF(EG) \frown EN$. ob ∇^{lum} ENF in quo posita basi EN altitudo est ZF, posita basi EF altitudo est NI.

Investiganda iam quantitas ipsius NI. Patet NI parallelam AE. Ergo $\dfrac{NI}{AE\,\text{rad.}} = \dfrac{AR\,\text{sec. compl.} - AN\,\text{sinus}}{AR = AD\,\text{secans compl.}}$.

Literas ut ante substituamus: $\dfrac{NI}{a} = \dfrac{g-b}{g}$. seu $NI = \dfrac{ga-ba}{g}$. vel $a - \dfrac{ba}{g}$. Atqui $g = \dfrac{a^2}{b}$. Ergo $NI = a - \cfrac{ba}{\cfrac{a^2}{b}} = a - \dfrac{b^2a}{a^2} = \underline{\underline{a - \dfrac{b^2}{a}}}$.

Ergo cylinder tangentium semicomplementi, demtis rectangulis ex tangentibus semicomplementi, et applicatis semiparabolae circularis axi parallelis, aequatur momentis ex basi differentiarum inter sinum et radium, utique quadrabilibus.

Nam posito sinu b. et radio a. erit $\dfrac{b^2}{a}$ applicata parabolae circularis axi parallela, quia sinus est media proportionalis inter applicatam axi parallelam semiparabolae circularis, et radium. Semiparabola autem circularis est, cuius altitudo et basis aequales, adde *Inassign.* 41.

Recta EI ex his facile haberi potest est enim $Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. adde prop. *Inass.* 42. 43.

P r o p. 52. $AC \frown DF = AD \frown EF$. cylinder tangentium [seu] conchoeid. (complementi), demto cylindro tang. semiarcus seu conchoeid. fals. dimidiatae (comple-

23 seu *erg. Hrsg.*

menti) = secans (compl.) in tang. semiarcus (compl.), seu tangens + tangens semiarcus in tang. semiarcus, seu tangens in tang. semiarcus + quadrat. tang. semiarcus.

C o r o l l. 1. Ergo quadrata tangentium semiarcus pendent ex quadratura conchoeidis et hyperbolae.

C o r o l l. 2. Cylinder tangentium complementi (quadrabilis) demto cylindro tangentium semicomplementi aequatur tangentibus complementi in tangentes semicomplementi (id est cylindro secantium complementi, demto cylindro radii) additis quadratis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ. prop. 49.).

P r o p. 53. $C\alpha = EN$. quia in ∇^{lo} AEC. $AC \frown EN = AE(= AC) \frown C\alpha$.

P r o p. 54. $A\alpha = AN$. Nam ∇ENA simile ∇^{lo} $A\alpha C$. quia ang. AEN = angulo $AC\alpha$. duo autem latera aequalia sunt $EN = C\alpha$. et $AC = AE$. ergo et tertia seu $A\alpha = AN$. ergo $E\alpha = NC$ vel EG.

P r o p. 55. $AM \frown EC = AC \frown EN$. Chorda arcus in sinum complementi arcus dimidii, aequatur cylindro portionis circularis sinuum arcus dati. Vel: Chorda arcus complementi ad quadrantem (non ad semicirculum) in sinum arcus dati = cylindro sinuum complementi (q u a d r a b i l i).

P r o p. 56. $AD \frown C\alpha = AC \frown CD$. Momentum secantium complementi = cylindro tangentium complementi quadrabili, adde prop. 18.

P r o p. 57. $EC \frown MF = EF \frown E\alpha$, vel $FC \frown EG$. Chorda arcus in differentiam secantis arcus dimidii a sinu complementi arcus dimidii = tangenti arcus dimidii in sinum versum arcus dati.

P r o p. 60. $EF \frown EK = KQ \frown AE$. Tangens semiarcus in sinum complementi, seu

9 *Zu* pendent: *Darüber:* Error
Dahinter: (imo ex q. circ. et dimens. cyl. tang. semicompl.)

15 portionis circularis *erg. L* 23 *Zählung springt L*

1 f. Anstelle von tangens + tangens semiarcus müsste es tangens + tangens semicomplementi heißen. Das Versehen wirkt sich bis zum Ende von Satz 52 aus. 15 Vel: Anstelle des Sinus des gegebenen Bogens hätte Leibniz den Kosinus des halben Komplementärbogens verwenden müssen.

momentum tangentium semiarcus = radio in differentiam sinus, et tang. semiarcus.

Coroll. Tangens semicomplementi in sinum = radio in sinus complementi, demto cylindro tang. semicompl.

At per prop. 46. iunct 20. cylinder conchoeid. − cyl. hyp. + rad. in sinus compl. = tang. [semicompl.] in sin. Ergo res eodem redit.

Prop. 61. $EF \frown EN = NC$ (vel EG) $\frown AE$. Momentum tang. [semicompl.] = radio in diff. rad. et sinus, adde prop. 47. coroll. 4. Hinc et tang. [semicompl.] in sinus quadrab.

∇^{la} similia: AKE et EZF. Nam ang. KAE = angulo EFZ.

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AK = EN}{ZF = EG} = \frac{KE}{EZ = GF}.$$

Prop. 62. $AE \frown EG = EN \frown EF$. momenta tangentium semicomplementi = cylindro trilinei concavi circularis, seu radii demto sinu.

Coroll. Tangentes arcus dimidii seu conchoeidis falsae dimidiatae applicatae, in sinus = radio in sinus versos arcus dati seu quadrabiles.

Prop. 63. $AE \frown GF = KE \frown EF$. cylinder radii in sinus complementi (quadrabilis) demto cylindro radii in tang. semicompl. (quadrab.) = ductui sinuum in tangentes semicomplementi.

Is ergo ductus quadrabilis. Hoc prorsus coincidit prop. 46.

Coroll. Hinc radius in sinus, demto radio in tang. fals. dimid. (cyl. segm. dupl.) = momento tang. fals. dimid. ex basi.

Prop. 64. $EN \frown GF = KE \frown EG$. seu quadrata sinuum complementi (portiones pyramidis a basi abscissae), demtis momentis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ.) = ductui sinuum in sinus versos arcuum complementi, seu in differentias suas a radio seu cylindro sinuum, demtis sinuum quadratis.

Coroll. vel sinus in seipsum (quadrab.), demto sinu in tang. arcus dimid. (quadrab.) = sinubus versis (seu differentiis sinuum complementi et radiorum) in sinus complementi, seu momento sinuum versorum.

∇^{la} similia $C\alpha D$ et AEH. $\dfrac{CD}{AH} = \dfrac{\alpha D}{AE} = \dfrac{C\alpha = EN}{HE}.$

6–8 compl. *L ändert Hrsg. dreimal*

P r o p. 65. $CD \frown AE = AH \frown [\alpha D]$. cylinder tangentium complementi (quadrabilium) = ductui secantium in secantes complementi (cyl. tang. compl. + cyl. tang.) demtis secantibus in sinus (cyl. conch.).

P r o p. 66. $CD \frown HE = AH \frown EN$. seu tangentes in tangentes complementi = momento secantium ex basi, quadrabili, adde. 33. 43.

P r o p. 67. $\alpha D \frown HE = EN \frown AE$. secantes complementi in tangentes, demtis sinubus in tangentes = quadrabiles, seu aequales sinubus complementi in radium, adde *Duct.* 20.

Porro per prop. 32. sec. compl. in tang. = rad. in sec. et per prop. 20. sin. in tang. = rad. in sec. − rad. in EN.

$$\nabla^{\text{la}} \text{ similia } C\alpha D \text{ et } AKE. \quad \frac{CD}{AE} = \frac{\alpha D}{AK = EN} = \frac{C\alpha = EN}{KE}.$$

P r o p. 68. $CD \frown EN = \alpha D \frown AE$. Momenta ex basi tangentium complementi = cylindro secantium complementi (dupl. sect.) − cyl. sin., adde prop. 73.

P r o p. 69. $CD \frown KE = AE \frown EN$. Tangentes complementi in sinus (momenta ex basi sua, si basi quadr. applicentur), adde 42. 61., quadrabiles = quadrilinei cylindro.

P r o p. 70. $\alpha D \frown KE = EN\,\square$. Sinus complementi est media proportionalis inter sinum et differentiam secantis complementi a sinu.

Sive secans compl. in sin., demtis quadratis sinuum = quadratis sinuum compl.

Ergo $[\alpha D] \frown KE$ quadrabiles, adde *Duct.* 29.

$$\nabla^{\text{la}} \text{ similia: } ACD \text{ et } C\alpha D. \quad \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{D\alpha} = \frac{AC}{C\alpha = EN}.$$

P r o p. 71. $AD \frown D\alpha = DC\,\square$ (45.) quadrata secantium complementi, demtis secantibus complementi in sinus (quadrabilibus) = quadratis tang. compl., adde *Duct.* 11. 74.

P r o p. 72. $AD \frown EN = AC \frown DC$. seu momentum ex basi secantium complementi (quadrabile, *Inassign.* 43. coroll. 1. *Duct.* 28.) = cylindro tangentium compl.,

1 AD *L ändert Hrsg.* 2 ductui *(1)* tangentium complementi in secantes complementi | quadrabilis *erg.* |. Ergo *(2)* secantium *L* 19 AD *L ändert Hrsg.*

19 adde: Der Verweis bezieht sich auf die Verschreibung AD anstelle von αD. 25 *Inassign.* 43.: Der Verweis bezieht sich auf die gestrichene Fassung des Satzes, s. N. 21 S. 58 Z. 32–35.

adde *Duct.* 18. 23. 50.

P r o p. 73. $DC \frown EN = \alpha D \frown AC$. $(AC = AE)$ habuimus prop. 68.

∇ 1a s i m i l i a : $C\alpha D$ et EGD. $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{D\alpha}{DG} = \dfrac{C\alpha = EN}{EG}$.

P r o p. 74. $CD \frown DG = DE \frown D\alpha$. Tangens compl. in seipsum demto tang. compl. l moment. ex basi = differentiae secantis complementi g et radii a in differentiam secantis complementi et sinus b, seu $g - a, \frown g - b = g^2 + ab - ga - gb$. seu quadrata secantium complementi aucta cylindro sinuum, minutaque sec. compl. [et sec. compl.] in sin.
Iam $g^2 - gb = l^2$ (per prop. 71. si l = tang. compl.). ideo $l^2 + ab - ga = l^2 - lf$.
Ergo $ga - ab = lf$. concordat 68.

P r o p. 75. $CD \frown EG = \overset{EN}{C\alpha} \frown DE$. $la - lb = gf - af$. Et quia per prop. 72. $la = gf$. ideo $lb = af$. tangens compl. in sinum = radio in sin. compl.

P r o p. 76. $D\alpha \frown EG = DG \frown EN$. secans compl. demto sinu, in radium demto sinu = tang. compl. in sin. compl., demto sin. compl. in sin. compl. $g - b \frown a - b$. seu

$$\cancel{ga} + b^2 - gb - \cancel{ba} = \overset{lf}{\underset{\cancel{ga} - \cancel{ab}}{\wedge}} - f^2.$$ Ergo $gb - b^2 = f^2$.

9 et sec. compl. *erg. Hrsg.*

P r o p. 77. Ex f i g. 3. $HG \frown DS\ (= AC) = DH \frown D\lambda$. ob ∇^{lum} HGD.

id est: differentiae inter tangentem veram et falsam momentum ex vertice, aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem semiarcus minutum differentia inter sinum et tangentem semiarcus, seu

$$c - 2i, \frown a - f = d - a, , \frown \underbrace{i-, b-i}_{2i-b}. \qquad \text{seu}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cancel{ca} & - & cf & + & 2if & - & \cancel{2ia} & = & 2di & + & \cancel{ab} & - & db & - & \cancel{2ia}. \\ & & /\backslash & & /\backslash & & & & /\backslash & & // & & /\backslash & & \\ & & \cancel{ab} & & \cancel{2ab} - \cancel{2ai} & & & & \cancel{2ca} - \cancel{2ai} & & & & \cancel{ca} & & \\ & & & & //\quad /// & & & & ////\quad /// & & & & //// & & \end{array}$$

prop. 19. prop. 7. [prop. 12] [prop. 18.23.50.72. *Duct.*]

Manifestum est omnia exacte convenire.

In eadem fig. 3. ∇^{la} s i m i l i a , quanquam non orthogonia: HGD et DBZ. Nam ang. GDH = ang. BDZ. et ang. GHD = angulo DBZ. etc. Ergo

$$\frac{DB = \text{rad.}\, AB}{HD} = \frac{BZ = AI}{[GH]} = \frac{GD}{DZ}.$$

$AB \frown [GH] = AI \frown HD$. Radius in differentiam tangentis et tangentis falsae, = tangenti falsae dimidiae in differentiam secantis et radii.

$$ac - 2ai = \underset{\substack{/\backslash \\ ac - ai.\ \text{prop. 12.}}}{id} - ai. \quad \text{Patet ex calculo.}$$

P r o p. 78. $AB \frown DZ = GD \frown HD$. seu applicata parabolae inversa (chorda suppl.)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \text{5+7 seu } \textit{(1)} & \text{ca} & + & \text{2if} & - & \text{cf} & - & \cancel{\text{2ia}} & = & \text{2di} & + & \cancel{\text{ab}} & - & \text{db} & - \cancel{\text{2ia}}. \\ & & & /\backslash & & & & & & /\backslash & & & & /\backslash & \\ & & & \cancel{\text{ab}} & & & & & & |\, 2, \cancel{\text{ca}} - \text{ai } \textit{gestr.}\,| & & & & \cancel{\text{ca}} & \\ & & & & & & & & & /// & & & & /// & \end{array}$$

prop. 7. Duct. prop. 12 | prop. 18.23.50.72. Duct | *nicht gestr.*

$$\underbrace{\cancel{\text{ca}} \quad - \quad \text{cf}}_{\substack{\cancel{\text{ca}} \quad - \quad \text{ab} \\ ///}} \qquad\qquad \substack{\cancel{2}\text{ca} - \text{2ai} \\ // \\ \cancel{\text{ca}} - \text{2ai} \\ ///}$$

prop. 19. et 24. Duct.

Ergo cf = 2ia. | cf = ab. prop. 19. *nicht gestr.* | Ergo ab = 2ai, quod absurdum, error ergo in calculo.

(2) ~~ca~~ *L* 11 prop. 12 *und* prop. 18.23.50.72. Duct. *erg. Hrsg.* 15 f. GN *L ändert Hrsg. zweimal*

15 $\frac{GD}{DZ}$: Es müsste umgekehrt $\frac{DZ}{GD}$ heißen. Dies wirkt sich auf Prop. 78 aus, welche Leibniz konsequent mit dem falschen Ansatz durchrechnet.

demto secante arcus dimidii, in radium (haec quadrabilia)
= 2 sec. fals. − chord. suppl. $\frown$ sec. − rad.
= 2 sec. fals. $\frown$ sec. + chord. suppl. $\frown$ rad.
− 2 sec. fals. $\frown$ rad. − chord. suppl. $\frown$ sec.
Et quia chord. suppl. $\frown$ rad., et 2 sec. fals. $\frown$ rad. quadrabilia, ideo 2 sec. fals. $\frown$ sec. − chord. suppl. $\frown$ sec., quadrabile.

In fig. 2. ex puncto O. termino sinus complementi AO. ducatur in radium AB perpendicularis $O\omega$. manifestum est:

$$\frac{O\omega}{KE\,\text{sinus}} = \frac{AO\,\text{sin compl.} = AK}{AE\,\text{rad.}}.\ \text{Ergo } O\omega = \frac{\text{sin.} \frown \text{sin. compl.}}{\text{rad.}}.$$

Prop. 79. $O\omega \frown AE = AO \frown KE$. cylinder omnium $O\omega$ = momento sinuum, ideoque quadrabilis est summa omnium $O\omega$.

Prop. 80. Porro $\dfrac{O\omega}{BY = HE\,\text{tang.}} = \dfrac{AO = AK}{AY = AH\,\text{sec.}}$. Ergo $O\omega \frown AH = HE \frown AK$. seu ductus hyperbolicus in $O\omega$ = momento tangentium, pendet ergo ex q. circ.

21. TRIGONOMETRIA INASSIGNABILIUM
[Frühsommer 1673]

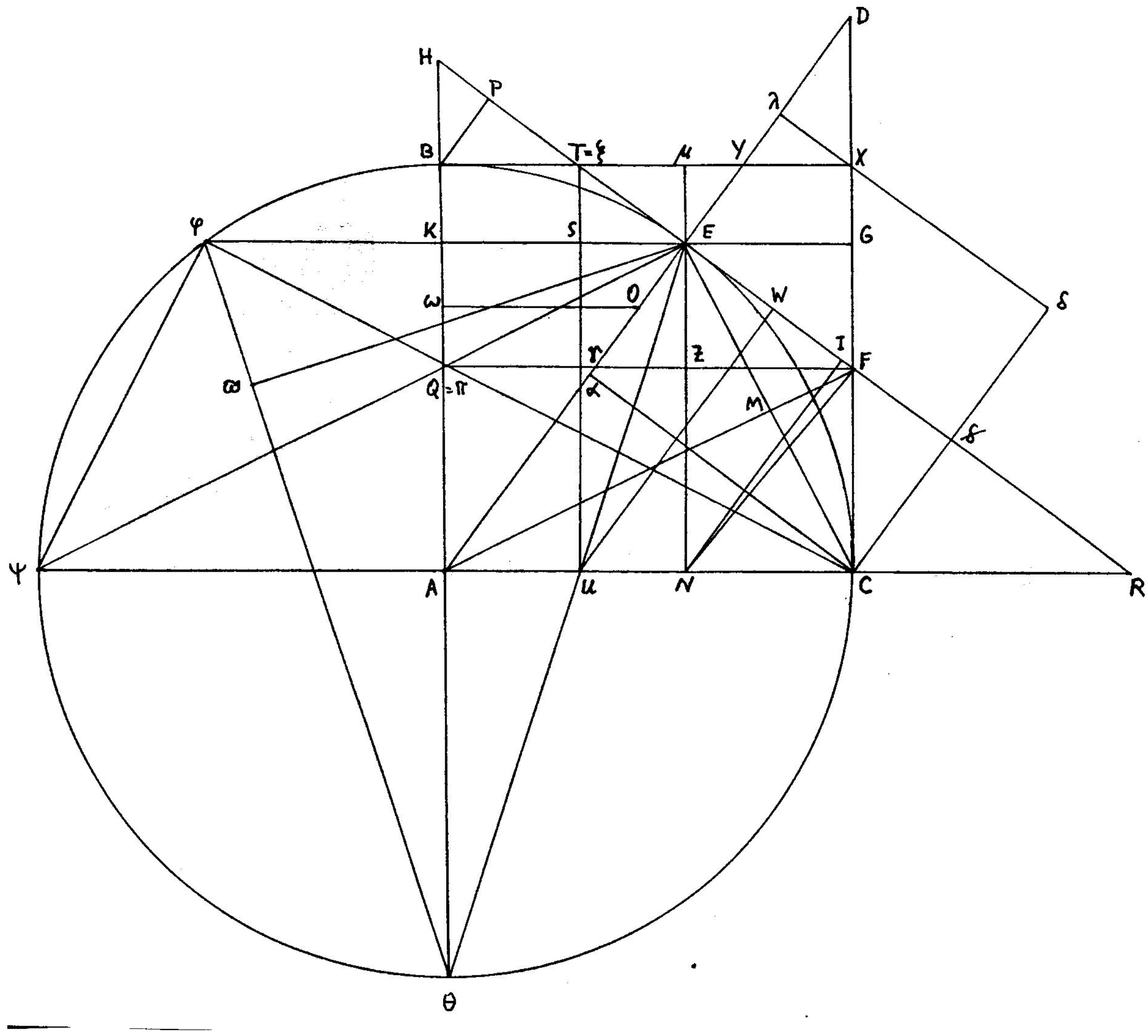
Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 242–245. 2 Bog. 2°. 8 S. — Titel fehlt, Zwischentitel mit Bogenzählung: (II) I n a s s i g n a b i l i a am Beginn des 2. Bogens (über S. 60 Z. 23). Figura secunda nicht vorhanden (Vorlage die entsprechende Figur aus N. 17).
Cc 2, Nr. 696

Datierungsgründe:

[Trigonometria inassignabilium]

[Teil 1]

9 Trigonometria inassignabilium *erg. Hrsg. nach N. 20,*



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Fig. 2.

<u>*ST*</u> pars regulae, seu altitudinis, <u>*ES*</u> pars basis, <u>*ET*</u> pars arcus.

[A l t i t u d i n e m autem voco latus orthogonii divisum in partes aequales infinitas, per

1 *Figur erg. Hrsg. nach Text u. N. 17.* 2–46,6 Fig.2. | ST ... arcus. *erg.* | ∇^{1a} ... $\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{ST}}$. *(1)* AH $\frown$ ES = ET $\frown$ AE. secans in portionem *(a)* altitudinis = tangenti in partem basis. *(b)* basis = radio in partem altitudinis. Ideo summa secantium complementi, scilicet in *(aa)* sagittam *(bb)* sinum arcus altitudini parallelum, seu altitudinem trilinei orthogonii aequatur radio in basin. *(2)* A l t i t u d i n e m ... esset *(a)* . Habemus ergo iam q u a d r a t u r a m f i g u r a e s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i. *(b)* , seu ... applicantur. *L, Reihenfolge ändert Hrsg.*

ordinatim applicatas, basin latus alterum.

Porro quoties summam linearum nomino, eas altitudini ordinatim applicatas intelligi debet. Hinc sinus, tangentes, secantes etc. complementi in circulo sunt, qui scilicet sinus, tangentes etc. appellari deberent, si id quod nunc basis est, altitudo esset, seu cum non altitudini, sed basi applicantur.

∇^{la} similia: EST et AEH. Ergo $\dfrac{AH}{ET} = \dfrac{AE}{ES} = \dfrac{HE}{ST}$.]

Prop. 1. $AH \frown ES = AE \frown ET$. secans in portionem basis = radio in portionem arcus. Seu figura secantium basi applicatarum, aequatur superficei cylindricae sub arcu et radio, adde prop. 9.

Coroll. 1. Ergo summa secantium complementi, aequatur radio in arcum, seu superficiei cylindricae sub arcu et radio.

Coroll. 2. Ergo figura secantium basi applicatarum aequatur summae secantium complementi.

Prop. 2. $AH \frown ST = ET \frown HE$. secans in portionem altitudinis = tangenti in portionem arcus. Ideoque superficies cylindrica truncata tangentium arcui insistentium, aequatur spatio hyperbolico, adde prop. 11.

Prop. 3. $AE \frown ST = HE \frown ES$. rectangulum sub radio et basi aequatur summae tangentium complementi, prop. 23. Huius ergo figurae datur quadratura.

Coroll. 1. Vel rectangulum sub radio et altitudine, aequatur tangentibus basi applicatis.

∇^{la} similia: EST et AKE. Ergo: $\dfrac{AE}{ET} = \dfrac{AK}{ES} = \dfrac{KE}{ST}$.

Prop. 4. $AE \frown ES = AK \frown ET$. rectangulum sub radio et basi (altitudine) = momento arcus ex radio basi (altitudini) parallelo.

Coroll. 1. Ergo momentum ex radio basi parallelo arcus aequale summae tangentium complementi.

24 f. parallelo. *(1)* Coroll. 1. Hinc datur quadratura momenti omnis trilinei orthogonii circularis, tam ex altitudine quam ex basi. *(2)* Coroll. 1. *L*

---

17 Prop. 3.: Leibniz dualisiert die Formel zunächst; die direkte Umsetzung erfolgt im Korollar.

Coroll. 2. Momentum arcus ex radio altitudini parallelo = summae tangentium ad basin.

Prop. 5. $AE \frown ST = KE \frown ET$. Radius in altitudinem = summae sinuum in arcum, seu momento arcus ex altitudine, seu superficiei cylindricae truncatae sinuum arcui impositorum, add. prop. 7. et prop. 3 coroll. 1.

Prop. 6. $AK \frown ST = KE \frown ES$. Momentum altitudinis ex basi aequatur momento basis ex altitudine, in trilineo orthogonio circulari, cuius altitudo pars radii, basis radio parallela.

Nihil autem hic refert, quod eius latus pro radio sumas quod pro basi[;] aliter enunties: sinus ad basin aequantur sinubus complementi ad altitudinem[,] adde prop. 12. 36[a]. prop. 36[b]. coroll. 4.

$$\nabla^{\text{la}} \text{ similia:} \quad EST \text{ et } EKH. \quad \frac{HE}{ET} = \frac{KE}{ES} = \frac{HK}{ST}.$$

Prop. 7. $HE \frown ES = KE \frown ET$. figura tangentium basi applicatarum, aequatur momento arcus ex altitudine, adde prop. 3. coroll. 1. + prop. 5.

Prop. 8. $HE \frown ST = HK \frown ET$. Summa tangentium (seu spatium conchoeidale, exemta quod postea semper intelligi volo portione circuli generantis) aequatur secantibus in arcum, demto momento arcus ex basi, adde prop. 14. et 24.

Prop. 9. $KE \frown ST = HK \frown ES$. Summa sinuum, seu portio circularis, aequatur secantibus in basin, demtis sinubus complementi in basin.

At sinus complementi in basin aequantur toti figurae $ABEN$, vid. prop. 16., radio AB. arcu BE. sinu complementi EN. portione basis AN. comprehensae. Hinc iuncta prop. 1. duplex calculi fundamentum, alterum examini alterius.

$$\nabla^{\text{la}} \text{ similia:} \quad EST \text{ et } BPH. \quad \frac{HB}{ET} = \frac{BP = BK}{ES} = \frac{HP}{ST}.$$

Prop. 10. $HB \frown ES = BK \frown ET$. sinus versi BK in arcum (id est segmentum arcus duplum) aequantur secantibus in basin (id est, prop. 1., arcui in radium [=] sectori duplo) demto radio in sinum (quadrabili).

Prop. 11. $HB \frown ST = HP \frown ET$. spatium hyperbolicum, demto rectangulo radii in altitudinem (quadrabili), aequatur tangenti in arcum (spatio ipsi hyperbo-

25 BK | seu altitudines *gestr.* | in *L* 27 | = *erg. Hrsg.* | sectori duplo *erg. L* 27 radio in *(1)* basin *(2)* sinum *L*

lico prop. 2.) demto momento arcus ex basi (= rectangulo radii in altitudinem prop. 4.)

Prop. 12. $BK \frown ST = HP \frown ES$. [summa sinuum versorum in altitudinem (quadrabilis)] aequatur tangentibus in basin (quadrabilibus prop. 7.) demtis sinubus in basin. Seu sinus compl. in altitud. = sinubus in basin, vid. prop. 43. et 45.

Coroll. Ergo habetur quadratura summae sinuum in basin, add. prop. 6. [21]. 23. 36[a,b].

∇^{la} similia: EST et FQH. Ergo $\dfrac{FH}{ET} = \dfrac{FQ}{ES} = \dfrac{HQ}{ST}$.

Prop. 13. $FH \frown ES = FQ \frown ET$. Tangentes in basin, et tangentes semicomplementi in basin, adde prop. 27 = radio in arcum,

quod idem est ac si diceres,

Coroll. 1. summam tangentium arcus dimidii, addita summa tangentium complementi (quae quadrabilis est), aequari arcui in radium, seu sectori cuidam circulari.

Coroll. 2. Ergo summa tangentium arcuum dimidiorum segmento circulari duplicato comparari potest, adde prop. 15.

Prop. 14. $FH \frown ST = HQ \frown ET$. spatium conchoeidale, addita summa tangentium semicomplementi, seu spatium hyperbolicum, aequatur secantibus in arcum (= prop. 8. spatio conchoeidali, addito momento arcus ex basi, adde prop. 24.) demtis tangentibus semicomplementi in arcum, seu aequatur tangentibus in arcum.

Coroll. Ergo summa tangentium semicomplementi, additis tangentibus semicomplementi in arcum, aequatur momento arcus ex basi, ac proinde quadrari possunt, adde prop. 28. et 42.

Prop. 15. $FQ \frown ST = HQ \frown ES$. Radius in altitudinem = summae secantium in basin (= radio in arcum), demto tangente semicomplementi in basin, add. prop. 13. et 29.

3 f. HP $\frown$ ES. *(1)* summa sinuum versorum (quadrabilis) demt *(2)* Radius in altitudinem demta summa sinuum versorum (quadrabili) *L ändert Hrsg.* 5 Seu ... et 45. *erg. L* 7 prop. 6. 20. 23. 36. *L ändert Hrsg.* 18 seu spatium hyperbolicum *erg. L* 25 (= radio in arcum) *erg. L*

23 adde prop. 28. et 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Fassung der prop. 42.

TS producatur usque ad basin in U. et iungatur EU. et ex U. ducatur perpendicularis in TE productam si opus est, quae erit UW. Manifestum est in triangulo TEU. posita basi TU. altitudinem esse ES, et posita basi ET. altitudinem esse UW. Basin autem UE poni nil necesse est, cum UE non differat, nisi parte inassignabili a TU.
Porro UW autem sic investigabimus: cum ∇^{la} AER et UWR sint similia erit

$$\frac{WU}{AE} = \frac{UR = AR - AU.\,(AU = KE\,\text{sinus})}{AR\,(= AD.\,\text{secans compl.})}.\ \text{ergo}\ WU = \frac{AD - KE, \frown AE}{AD}.$$

Surget aequatio haec, posita etiam $TU = KA = EN$. sinu complementi.

$$\overset{(WU)}{\frac{AD - KE \frown AE}{AD}} \frown TE = ES \frown EN.$$

Iam sinus complementi in basin aequantur areae quadrilinei $ABEN$. vid. prop. 9. Et $AD - KE \frown AE, \frown TE = AD \frown ES \frown EN$. ergo

P r o p. 16. ductus figurae secantium in basin, in figuram ipsam $ABEN$. aequatur cylindro secantium in arcum demto cylindro sinuum in arcum (quadrabili). Radio posito altitudine cylindrorum.

Sed si AD ponatur esse non secans complementi, sed ipse secans, ES portio altitudinis, KE sinus complementi, EN sinus, utilior erit aequatio, quia dividi poterit per AD. Quia enim omnes AD, sunt $\frac{a^2}{1}\ \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{3}$ etc. seu quadratum radii divisum per sinus complementi, ideo dividi per AD idem est quod dividi per quadratum radii, multiplicari per sinum complementi. Ergo pro AD substitue $\frac{AE\square}{KE}$. fiet aequatio talis:

$$\frac{\frac{AE\square}{KE} - KE, \frown AE}{\frac{AE\square}{KE}} \frown TE = EN \frown ES.\ \text{seu}\ \overset{(WU)}{\frac{AE\square - KE\square}{AE}} \frown TE = EN \frown ES.$$

Hanc aequationem dupliciter interpretari potes, ut dixi, vel enim KE est sinus, EN sinus complementi, vel contra. Alterutro modo, haec inde ducetur enuntiatio:

P r o p. 17. superficies cylindrica sub arcu et radio, seu duplex sector arcus, demtis quadratis sinuum (sinuum complementi) ad arcum, per radium divisis, aequatur sinubus complementi (sinubus) in basin (altitudinem) id est areae figurae arcu, basi (altitudine), radio et sinu complementi (sinu) minimo (radius enim maximus

23 seu duplex sector arcus *erg.* *L*

est, vel etiam si usque ad maximum seu radium non pertingatur, duabus maximis), comprehenso.

Hinc quadrata sinuum, item sinuum complementi ad arcum, necesse est non esse quadrabilia pure, adde prop. 22.

∇^{la} similia EST et ADC. $\dfrac{AD}{ET} = \dfrac{DC}{ES} = \dfrac{AC}{ST}$.

Prop. 18. $AD \frown ES = DC \frown ET$. secantes complementi in basin id est spatium hyperbolicum (adde prop. 21), aequantur tangentibus complementi in arcum.

Prop. 19. $AD \frown ST = AC \frown ET$. summa secantium complementi aequatur radio in arcum, adde prop. 26.

Prop. 20. $DC \frown ST = AC \frown ES$. summa tangentium complementi aequatur radio in sinum, adde prop. 25.

∇^{la} similia: EST et UWR. Ergo $\dfrac{UR}{ET} = \dfrac{WR}{ES} = \dfrac{UW}{ST}$.

Iam (UW) est $\dfrac{AE\square - KE\square}{AE}$. WR autem sic inveniemus $\dfrac{WR}{UR} = \dfrac{AE}{AH}$. Ergo $(WR) = \dfrac{AE \frown UR}{AH}$. At (UR) est $AD - KE$. AH est $\dfrac{AE\square}{EN}$. ergo $WR = \dfrac{AE \frown UR \frown EN}{AE\square}$. seu $\dfrac{UR \frown EN}{AE}$. UR seu $NR = AD - KE$.

Prop. 21. $UR \frown ES = WR \frown ET$. seu secantes complementi in basin (tangentes complementi in arcum, prop. 18.) spatium hyperbolicum demtis sinubus in basin (quadrabilibus, prop. 12.), aequantur, rectangulis secantium (spatio hyperbolico) complementi in sinus complementi, ad arcum, divisis per radium, demtis, rectangulis sinuum in sinus complementi, in arcum. adde prop. 36[b]; divisis per radium.

Prop. 22. $UR \frown ST = UW \frown ET$. summa secantium complementi (sector duplicatus ABE), demta summa sinuum (seu portioni circulari KBE) aequatur UW in arcum, vel sectori duplicato, demtis $\dfrac{KE\square}{AE}$ in arcum.

3 non *erg. L* 6 f. id est spatium hyperbolicum *erg. L* 18+19 spatium hyperbolicum *und* (spatio hyperbolico) *erg. L* 20 radium | (quadrabilibus) *gestr.* |, demtis *L* 24 sinuum *(1)* (residuum quadrabile esse necesse est) *(2)* (seu *L*

Coroll. Ergo $\dfrac{KE\,\square}{AE}$ in arcum seu quadrata sinuum per radium divisa, in arcum, aequantur summae sinuum, seu portioni circulari, adde prop. 17. et 36[a].

23.

Prop. 23. $WR \frown ST = UW \frown ES.$ seu momentum secantium complementi ex radio basi parallelo, demto momento (quadrabili) sinuum complementi, ex eodem radio, aequatur summae UW in basin, seu radio in basin, demtis sinubus in basin, per radium divisis.

At sinus in basin sunt quadrabiles prop. 12., adde prop. 32. 36[a]. Ideo

Coroll. 1. ergo momentum secantium complementi ex radio, basi parallelo, quadrari potest.

Coroll. 2. Ergo habetur cylinder aequalis conoeidi secantium complementi.

∇^{la} similia EST et ENR. $\dfrac{ER}{ET} = \dfrac{NR}{ES} = \dfrac{EN}{ST}.$

Prop. 24. $ER \frown ES = NR \frown ET.$ tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), aequantur secantibus complementi in arcum demtis sinubus in arcum seu momento arcus ex [radio altitudini parallelo] (quadrabili).

Conf. prop. 8. et 14. ubi dicitur: secantes in arcum aequari spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio basi parallelo.

Coroll. Ergo differentia inter secantes in arcum, et secantes complementi in arcum, seu differentia inter secantem et secantem complementi in arcum quadrari potest.

Prop. 25. $ER \frown ST = EN \frown ET.$ summa tangentium complementi aequatur momento arcus ex radio basi parallelo, quadrabilis ergo, adde prop. 20. et alias

9 f. *Zu* Coroll. 1: adde prop. 28. *de Ductibus*.

11 complementi. | Coroll. 3. Ergo sinus *streicht Hrsg.* | *L* 14 f. arcum *(1)* (quadrabilibus) *(2)* seu momento arcus ex | altitudine, radio *ändert Hrsg.* | (quadrabili) *L* 19 seu ... arcum *erg. L*

4 Prop. 23.: In der Ausformulierung des Satzes müsste es statt momento sinuum complementi und demtis sinubus vielmehr momento sinuum und demtis quadratis sinuum heißen. — Die Aussagen bezüglich der Quadrierbarkeit bleiben davon unberührt. 18 Coroll.: Diese Aussage ist unzutreffend.

passim.

Prop. 26. $NR \frown ST = EN \frown ES$. summa secantium complementi, demta summa sinuum, aequatur sinubus complementi in basin, seu duplex sector arcus (prop. 19.), demta summa sinuum; aequatur quadrilineo arcu, basi, radio et sinu complementi comprehenso.

Quod facile comprobatu, calculi nostri confirmatio est.

∇^{la} similia EST et DEF. $\dfrac{DF}{ET} = \dfrac{DE}{ES} = \dfrac{EF}{ST}$.

Prop. 27. $DF \frown ES = DE \frown ET$. Tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), demtis tangentibus semicomplementi in basin (id est per prop. 13. duplex sector, demtis tangentibus in basin, prop. 7., quadrabilibus, adde prop. 33.) aequantur secantibus complementi in arcum (prop. 24. spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio [altitudini parallelo]) demto radio in arcum (seu duplici sectore).

Manifesta horum omnium aequatio est, documentum calculi veri.

Prop. 28. $DF \frown ST = EF \frown ET$. summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa tangentium semicomplimenti aequatur tangentibus semicomplementi in arcum, adde prop. 14. et 34. 42.

Prop. 29. $DE \frown ST = EF \frown ES$. summa secantium complementi (duplex sector), demto radio in altitudinem, aequatur tangentibus semicomplementi in basin, adde prop. 15. adde prop. 31.

∇^{la} similia: EST et DEG. $\dfrac{DE}{ET} = \dfrac{DG}{ES} = \dfrac{EG}{ST}$.

Prop. 30. $DE \frown ES = DG \frown ET$. secantes complementi in basin (spatium hyperbolicum, intellige scilicet inversum, id enim semper intelligendum est,

---

23 *Über* inversum: NB.

12 radio *(1)* basi parallelo *(2)* altitudine *L ändert Hrsg.* 18 complementi *(1)* quadrabilis, demta summa sinuum *(2)* (duplex sector) *L*

---

17 adde prop. 14. et 34. 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Version der prop. 42.

ita tangentes complementi in basin sunt spatium conchoeidale inversum, sinus complementi in basin sunt spatium circulare inversum) demto radio in sinum, aequantur tangentibus complementi ad arcum demtis sinubus complementi in arcum seu momento arcus ex radio basi parallelo.

Sed cum per prop. 18. aequentur secantes complementi in basin et tangentes complementi in arcum, rursusque radius in sinum, et momentum arcus ex radio basi parallelo, prop. 4. Hinc rursus calculi veritas comprobatur.

P r o p. 31. $DE \frown ST = EG \frown ET$. summa secantium complementi (duplex sector) demto radio in altitudinem aequatur radio in arcum, demtis sinubus ad arcum, seu aequatur segmento arcus complementi duplicato.

Rursus comprobatio eorum, quae prop. 29.

P r o p. 32. $DG \frown ST = EG \frown ES$. summa tangentium complementi demta summa sinuum complementi, aequatur radio in sinum, demtis sinubus ad basin.

Hinc confirmatur quadratura sinuum ad basin, de qua prop. 12. et 23.

∇^{la} similia: EST et EGF. $\dfrac{EF}{ET} = \dfrac{EG}{ES} = \dfrac{FG}{ST}$.

P r o p. 33. $EF \frown ES = EG \frown ET$. Figura tangentium semicomplementi ad basin (seu portio conchoeidis contractae dimidiatae, seu figurae tangentium arcus dimidii, inversa) aequatur radio in arcum, demto momento arcus ex altitudine seu radio in altitudinem seu sinum [versum], adde prop. 13. 27. 35.

P r o p. 34. $EF \frown ST = FG \frown ET$. summa tangentium semicomplementi (seu figura inversa tangentium arcus dimidii) ad basin, aequatur momento arcus ex radio basi parallelo (seu momento arcus ex altitudine), demta figura tangentium semicomplementi (figura inversa tangentium arcus dimidii) ad arcum.

At per prop. 28. tangentes semicomplementi in arcum, aequantur summae tangentium complementi (quadrabili) demta summa tangentium semicomplementi.

---

16 (Segmentum quoddam circulare, vid. prop. 27.)

8 f. (duplex sector) *(1)* demta summa sinuum | complementi *gestr.* | (portione circulari) *(2)* demto *L* 10 seu ... duplicato. *erg. L* 18 f. arcum, *(1)* demtis sinubus in arcum *(2)* demto momento arcus ex *(a)* radio basi parallelo *(b)* altitudine seu radio in altitudinem seu sinum | versum *Papierverlust erg. Hrsg.* |, adde *L* 22 (seu ... altitudine) *erg. L*

Ergo summa tangentium semicomplementi, aequatur momento arcus ex radio basi parallelo addita summa tangentium semicomplementi, demta summa tangentium complementi.

Ergo momentum arcus ex radio basi parallelo, aequatur summae tangentium complementi, quod iam toties habuimus.

P r o p. 35. $EG \frown ST = FG \frown ES$. radius in altitudinem, demta summa sinuum, seu quadrilineum circulare concavum $BXGE$, aequatur sinubus complementi ad basin, id est quadrilineo supra dicto $ABEN$. demtis tangentibus semicomplementi ad basin.

Iam vero figura tangentium semicomplementi ad basin per prop. 33. aequatur duplo sectori ABE, demto radio in altitudinem. Ergo [quadrilineum] circulare concavum $BXGE$, aequatur quadrilineo $ABEN$, demto duplici sectore ABE, addito [rectangulo $BKXG$]. Seu mixtilineum $BXGE = \nabla^{\text{lo}}\, AKE$, demto sectore ABE, addito rectangulo $BKXG$. Cumque sector constet ex portione circulari BKE et triangulo AKE. fiet mixtilineum $BXGE = \nabla^{\text{lo}}\, AKE - \nabla AKE -$ portio circular. BKE + rectang. $BKXG$. Ergo mixtilineum $BXGE$ + portio circularis BKE = rectang. $BKXG$. Quod cum per se pateat, apparet calculum recte positum fuisse.

NIE

∇^{la} similia EST et (TUW). sed pro hoc triangulo, substituendum est istud NIE. ita ut N sit loco U. I loco W. Sic ergo:

6 f. seu *(1)* trilineum circulare concavum BXE *(2)* quadrilineum *L* 11–13 sectori ABE, *(1)* demta portione circulari | KBE. id est sectori ABE *(a)* − *(b)* + ∇^{lo} AKE *gestr.* |. Ergo trilineum circulare concavum BXE, aequatur quadrilineo ABEN, demto sectore ABE, *(aa)* addito *(bb)* demto ∇^{lo} AKE. ad *(!)* his ablatis a quadrilineo residuum erit nihil. Errorem ergo hoc loco in calculo esse necesse est. *(2)* demto radio in sinum. Ergo trilineum circulare concavum BXGE, aequatur quadrilineo ABEN, demto duplici sectore ABE, addito radio in sinum seu rectangulo BAN. Iam si quadrilineum abiciatur, restabit ex duplici sectore nil nisi portio circularis KBE. Ergo haec prodibit aequatio: BXGE = rectang. BAN − KBE. Ergo rectang. BXGK = rectang. BAN. Sed hoc absurdum, nondum ergo sublatus omnis error. *(3)* demto radio in altitudinem. Ergo | trilineum *ändert Hrsg.* | circulare ... addito | seu rectangulo BAN *ändert Hrsg.* |. Seu *L*

20–55,4 Leibniz verwendet die Benennung Y. Diese ist aufgrund der später erfolgten Umbenennung (vgl. unten prop. 41) vom Hrsg. in I abgeändert worden.

∇^{la} similia EST et NIR. $NR = AD - KE$. et $AD = \dfrac{AE\square}{KE}$. et $IE = ER - IR$. et $IR = WR = \dfrac{NR \frown EN}{AE}$. et $NI = UW = AE - \dfrac{KE\square}{AE}$.

Iam haec laterum comparatio erit:

$$\frac{EN}{ET} = \frac{NI = AE - \dfrac{KE\square}{AE}}{ES} = \frac{EI = ER - \dfrac{NR \frown EN}{AE}}{ST}.$$

P r o p. 36[a]. $EN \frown ES = AE \frown ET,, - \dfrac{KE\square}{AE}, \frown ET$. sinus complementi ad basin (quadrilineum $ABEN$) = radio in arcum (duplici sectori ABE), demtis sinubus quadratis ad arcum per radium divisis.

Atqui sector duplex est quadrilineum $ABEN$ portione circulari KBE auctum. Ergo sinuum quadrata ad arcum aequantur, portioni circulari KBE. quod iam ostensum, prop. 22.

P r o p. 36[b]. $EN \frown ST = ER \frown ET - NR\,(AD - KE) \frown \dfrac{EN}{AE} \frown ET =$

$$ER \frown ET + \frac{KE \frown EN}{AE} \frown ET - \frac{AD - EN}{AE} \frown ET. \text{ sive:}$$

Summa sinuum complementi (quadrabilis), aequatur tangentibus complementi in arcum (spatio hyperbolico) additis sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis (vid. sup. prop. 21.), demtis secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis, ad arcum.

Iam secantes complementi in sinus complementi, aequantur tangentibus complementi in radium, vid. *d e d u c t i b u s p r o p.* 28. Ergo secantes complementi in sinus complementi, per radium divisi, ad arcum, aequantur tangentibus complementi in radium ductis, per radium divisis, ad arcum.

C o r o l l. 1. Ergo tangentes complementi ad arcum, spatium hyperbolicum, aequantur secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo summa sinuum complementi (quadrabilis) = sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis, seu ductui figurae sinuum, in figuram sinuum complementorum, inverso.

5+11 P r o p. 36. *Zählung doppelt, L ändert Hrsg.* 21 spatium hyperbolicum *erg. L*

24. 3. 2003

Coroll. 3. sinus in sinus complementi in arcum per radium divisi, aequantur sinubus in basin (adde prop. 21.).

Coroll. 4. summa sinuum complementi aequatur sinubus ad basin.

Prop. 37. $AE \frown ST - \dfrac{KE\square}{AE} \frown ST = ER \frown ES \ \ (= CD \frown ES) - \dfrac{NR \frown EN}{AE} \frown ES.$

Iam pro $NR = AD - KE$. pro AD $\dfrac{AE\square}{KE}$ fiet:

$$CD \frown ES - \frac{\dfrac{AE\cancel{\square} \frown EN}{KE} \frown ES}{\cancel{AE}} + \frac{KE \frown EN}{AE} \frown ES.$$ Iam per prop. 36[b] hic et prop. 28. *de ductibus*, $\dfrac{AD \frown EN}{AE} \ \left(= \dfrac{\dfrac{AE\square \frown EN}{KE}}{AE}\right) = \dfrac{DC \frown AE}{AE}.$

ergo (Coroll. 1) $\dfrac{AE \frown EN}{KE} = DC.$

(quemadmodum [Coroll. 2.] $\dfrac{AE \frown KE}{EN} = HE.$)

Hinc propositio tandem eiusmodi oritur:

Radius in altitudinem, demtis quadratis sinuum per radium divisis (quae omnia quadrabilia sunt) = tangentibus complementi in basin (spatio hyperbolico inverso), demtis tangentibus complementi in basin (quae se destruunt), additis sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin.

Ergo

Coroll. 3. Radius in altitudinem demtis quadratis sinuum per radium divisis, aequatur sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin. Haec ergo quadrabilia.

∇^{la} similia YXD et TSE. quia $\vee DYX = \vee BYA$. Ergo YDX ang. $= BAE$ ang. Ergo ∇^{la} AEH et YXD ergo et TSE et YXD similia, quia $\vee SET = \vee BAE$. ergo $= \vee^{\mathrm{lo}}$ YDX. Ideo $\dfrac{DY}{ET} = \dfrac{DX}{ES} = \dfrac{YX}{ST}$.

---

4 *Über* $AE \frown ST$: adde prop. 6.

9 *Eckige Klammern L*

DY est differentia inter secantem arcus complementi, et dati; YX est differentia inter tangentem et radium; DX est differentia inter tangentem complementi et radium.

P r o p. 38. $DY \frown ES = DX \frown ET$. secantes complementi in basin, demtis secantibus in basin (spatium hyperbolicum demto circulari) aequantur tangentibus complementi in arcum (spat. hyp.), demto radio in arcum (spat. circ.), vid. 2. hic et 18.

P r o p. 39. $DY \frown ST = YX \frown ET$. res eodem redit cum prop. praeced.

P r o p. 40. $DX \frown ST = YX \frown ES$. Tangentes complementi demto radio in altitudinem = tangentibus demto radio in basin.

9–58,1 basin.

| ∇^{la} similia: EDG et EST. $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{ET}} = \dfrac{\mathrm{DG}}{\mathrm{ES}} = \dfrac{\mathrm{EG}}{\mathrm{ST}}$. *gestr.* |

| ∇^{la} similia: EFN et EST. quia angulus ENF (vel HAE) = ang. SET. $\dfrac{\mathrm{EN}}{\mathrm{ET}} = \dfrac{\mathrm{FN}}{\mathrm{ES}} = \dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ST}}$.

(1) | Porro FN sunt ad radium ut differentiae secantium complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\dfrac{\mathrm{FN}}{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{g} - \mathrm{b}}{\mathrm{g}}$. seu $\mathrm{FN} = \dfrac{\mathrm{g} - \mathrm{b}}{\mathrm{g}} \frown \mathrm{a}$. at $\dfrac{\mathrm{g} - \mathrm{b}}{\mathrm{g}} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} - 1$. Ergo $\mathrm{FN} = \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}^2} - \mathrm{a}$. et $\mathrm{FN} \frown \mathrm{a}$. seu cylinder $\mathrm{FN} = \dfrac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{b}^2} - \mathrm{a}^2$. aequalis quadratis segmentorum complementi demtis quadratis radii. *erg.* |

P r o p. 41. $\mathrm{EN} \frown \mathrm{ES} = \mathrm{FN} \frown \mathrm{ET}$. sinus complementi in basin (quadrilineum) = FN. in arcum. Ergo

C o r o l l. 1. Cylinder quadrilinei, aequatur quadratis secantium complementi in arcum | quadrato radii in arcum minutis *erg.* |.

Atqui per *Duct.* prop. 43. secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi arcus dati, et compositam ex tangente arcus dati, et arcus complementi. Ergo

C o r o l l. 2. quadrata tangentium complementi in arcum, aucta rectangulis ex tangentibus et tangentibus complementi in arcum, aequantur cylindro quadrilinei sub radio quadratis radii in arcum, seu cylindro sectoris duplicis aucto.

(2) Porro FN sunt ad radium ut differentiae complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\dfrac{\mathrm{FN}}{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{g} - \mathrm{b}}{\mathrm{g}}$. seu $\mathrm{FN} = \dfrac{\mathrm{g} - \mathrm{b}}{\mathrm{g}} \frown \mathrm{a}$.

„ Dixi FN inquam $= \dfrac{\mathrm{ag} - \mathrm{ba}}{\mathrm{g}}$. vel $\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{ba}}{\mathrm{g}}$. Sed $\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}$.

„ Ergo $\dfrac{\mathrm{ba}}{\mathrm{g}} = \dfrac{\mathrm{ba}}{\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}} = \dfrac{\mathrm{b}^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2} = \dfrac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$. Ergo $\mathrm{FN} = \mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$.

P r o p. 41. $\mathrm{EN} \frown \mathrm{ES} = \mathrm{FN} \frown \mathrm{ET}$. Sinus complementi, in basin (quadrilineum) = FN. in arcum, seu radio in arcum, demtis quadratis sinuum per radium divisis, in arcum.

Constat autem aliunde quadrata sinuum cylindro cuidam circulari sub radio aequari. Haec ergo concordant. Sed si alibi non extarent hic demonstrarentur. Nam si quadrilineum ABEN detrahatur a duplici sectore ABE, restat portio circularis KEB. quae proinde quadratis sinuum per radi-

Prop. 41. Summa omnium IN quadrari potest.

Nam IN est radius demta applicata parabolae axi parallela, per *Duct.* prop. 51. Est ergo summa omnium IN radius in altitudinem BK. demta portione semiparabolae per axi parallelam abscissae, cuius altitudo BK. id est, summa omnium NI, dabit trilineum parabolicum.

∇^{la} IEN et EST similia sunt. Ang. SET = angulo ENI. Ideo $\dfrac{EN}{ET} = \dfrac{IN}{ES} = \dfrac{EI}{ST}$.

um divisis aequalis, atque ideo

Coroll. cylinder portionis circularis sub radio aequalis quadratis sinuum, adde supra 17. 22. 23.

Prop. 42. $EN \frown ST = EF \frown ET$. Sinus complementi in altitudinem, seu summa sinuum complementi = tangentibus semicomplementi in arcum.

Coroll. 1. Ergo tangentes semicomplementi in arcum, sunt quadrabiles.

Coroll. 2. Ergo quia per prop. 14. et 28. 34. tangentes semicomplementi in arcum, iunctis tangentibus semicomplementi in altitudinem, seu iuncta eorum summa sunt quadrabiles. Ideo summa tangentium semicomplementi quadrabilis.

Inter omnia figurarum circularium elementa, nulla sunt tangentibus semicomplementi, et per consequens tangentibus arcus dimidii feliciora, quae in arcum, altitudinem, basin habentur. Nisi quod tang. semicompl. in basin, et tang. arcus dimid. in alt. habentur. Sed supposita quadratura.

Coroll. 3. Figura tang. arc. dimid. in arcum quadrabilis, est enim non nisi figura inversa tangentium arcus semicomplementi in arcum.

Coroll. 4. Figura tangentium arcus dimidii in basin quadrabilis, est enim inversa tangentium arcus semicomplementi in altitudinem.

Coroll. 5. Quadratura figurae tangentium seu conchoeidis ex data quadratura hyperbolae, seu quadratura differentiae inter conchoeidem et hyperbolen. Nam per *Duct.* prop. 47. coroll. 1. differentia inter secantem et tangentem (applicata hyperbolae et conchoeidis), aequatur tangenti semicomplementi.

Coroll. 5. *(!)* Cum figura tang. semicompl. ad arc. + sum. tang. semicompl. = prop. 14. mom. arcus ex basi = prop. 4. rad. in basin, seu sinum. Ergo summa tangentium semicompl. seu diff. hyp. et conch. est radius in basin, demtis sinubus complementi in altitudinem.

| Coroll. 6. Differentia inter *erg., bricht ab* |

Prop. 43. $FN \frown ST = EF \frown ES$. Summa omnium FN = tangentibus semicomplementi in basin. At tangentes semicomplementi in basin aequantur tangentibus arcus dimidii (inversis) in altitudinem seu conchoeidi falsae dimidiatae. Et conchoeis falsa dimidiata aequatur portioni inversae seu a basi abscissae. Ergo

Coroll. 1. Portio quaelibet conchoeidis falsae *gestr.* |

Prop. 41 *L*

P r o p. 42. $EN \frown ES = IN \frown ET$. sinus complementi ad basin, seu quadrilineum $ABEN =$ applicatis trilinei parabolici ad arcum, adde prop. 46.

C o r o l l. Ergo trilineum parabolicum ad arcum, pendet a quadratura circuli.

P r o p. 43. $EN \frown ST = EI \frown ET$. sinus complementi ad altitudinem, aequantur ipsis EI ad arcum.

Ergo EI ad arcum q u a d r a b i l i a sunt. Qualis autem sit recta EI, vid. *Duct.* 51., vid. prop. 45.

P r o p. 44. $IN \frown ST = EI \frown ES$. seu EI ad basin, aequantur applicatis trilinei parabolici ad altitudinem, seu quadrabiles sunt.

His ita positis istud EI accuratius determinemus. Nimirum EI est ad tangentem, ut NI ad radium vel ut EN ad secantem: Ideo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{d}$. Iam $d = \dfrac{a^2}{f}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{\dfrac{a^2}{f}} = \dfrac{f^2}{a^2}$. Ergo $EI = \dfrac{f^2 \frown c}{a^2} = Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $EI\,\square = \dfrac{f^4 \frown c^2}{a^4} = f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $f^4c^2 = f^2a^4 - a^6 - b^4a^2 + 2b^2a^4$.

Item $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{NI}{a}$. Iam: $NI = a - \dfrac{b^2}{a}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{a - \dfrac{b^2}{a}}{a} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$. Ergo $EI = c - \dfrac{b^2c}{a^2}$. Ergo $\dfrac{f^2c}{a^2} = \dfrac{a^2c - b^2c}{a^2}$. Ergo $f^2c = a^2c - b^2c$. Ergo $f^2 = a^2 - b^2$. quod verissimum, notaque calculi recte positi.

∇^{la} NIR et EST similia sunt et ang. $NRI =$ angulo SET. ideo: $\dfrac{NR}{ET} = \dfrac{IR}{ES} = \dfrac{NI}{ST}$.

IR est tangens compl. $-EI$. NR est secans compl. demto sinu.

P r o p. 45. $NR \frown ES = IR \frown ET$. secantes complementi ad basin (spatium hyperbolicum inversum), demtis sinubus ad basin (quadrabilibus) $=$ tangentibus

11 Ideo *(1)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c} = \text{tang.}} = \dfrac{\mathrm{d} = \text{sec.}}{\mathrm{f}\ \text{sin. compl.}}$. Iam $\mathrm{d} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}}$. Ergo $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}^2}$.
Coroll.: Ergo $\mathrm{EI} \frown \mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}} \frown \mathrm{c}$. seu momenta omnium EI ex basi = se *(2)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}}$ *L*

11 Ideo: im Folgenden verwendet Leibniz die Bezeichnungen von N. 20.

complementi ad arcum (spatio hyperbolico inverso), demtis EI ad arcum. Ergo C o r o l l. EI ad arcum = sinubus ad basin, seu sinubus compl. ad altit. prop. 43. et 12.

P r o p. 46. $NR \frown ST = NI \frown ET$. Ergo summa secantium complementi (sect. circ. duplex), demta summa sinuum, seu quadrilineum = $NI \frown ET$. concordat prop. 42.

P r o p. 47. $IR \frown ST = NI \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa ipsorum EI. seu summa horum: $\dfrac{b^2c}{a^2}$ aequatur, applicatis trilinei parabolici circularis axi parallelis, ad basin.

∇^{la} similia $C\alpha D$ et EST. $\dfrac{DC}{ET} = \dfrac{D\alpha}{ES} = \dfrac{C\alpha}{ST}$.

P r o p. 48. $DC \frown ES = D\alpha \frown ET$. Tang. complementi ad basin (spat. conchoeid. inversum) = secantibus complementi ad arcum (spat. hyp. inverso) demtis sinubus ad arcum, q u a d r a b i l i b u s.

C o r o l l. 1. Quadratura conchoeidis ex data hyperbolae quadratura.

C o r o l l. 2. Tang. semicompl. inversi (seu diff. hyp. et conch. invers.) = sinubus ad arcum, et ideo q u a d r a b.

C o r o l l. 3. Tang. ad alt. (spat. conch.) = sec. ad arc. (spat. hyp.) − sin. compl. ad arc., quadrabiles p r o p. 4. h i c. Et ideo summa tang. semicompl. = sin. compl. ad arc. seu momento arcus ex basi, sive radio in sinum.

P r o p. 49. $DC \frown ST = C\alpha \frown ET$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) = sinubus complementi ad arcum seu momento arcus ex basi, ut supra toties.

P r o p. 50. $D\alpha \frown ST = C\alpha \frown ES$. Summa differentiarum inter secantes complementi et sinus = quadrilineo $ABEN$.

∇^{la} γEF et EST similia: Nam ang. $EF\gamma$ ang. TES. Porro $E\gamma$ ita investigabimus: $\dfrac{A\gamma}{AE} = \dfrac{AQ\ (EF)}{AK\ (EN)}$. Ergo $A\gamma = \dfrac{EF}{EN} \frown AE$. Ergo ut obiter dicam m o m e n t a $A\gamma$ = cylindro tangentium semicompl. (quadrabili). Ergo et q u a d r a b i l i a momenta $E\gamma$. Ergo $\gamma E = AE - \dfrac{EF}{EN} \frown AE$. Eodem modo $\dfrac{Q\gamma}{KE} = \dfrac{EF}{EN}$. Ideo $Q\gamma \frown EN = EF \frown KE$. seu momenta omnium $Q\gamma$ = sinubus in tang. [semi]compl. quae pendent a q. hyp. ergo

27 semi *erg. Hrsg.*

7 $\dfrac{b^2c}{a^2}$: mit den Bezeichnungen von N. 20 müsste es genauer $\dfrac{f^2l}{a^2}$ heißen. 14–18 Die Korollare 2 und 3 sind fehlerhaft.

et momenta omnium γF. Ergo $\gamma F = AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$. Iam $EF \frown KE = AE \frown KQ$ $[=]\ \dfrac{AE \frown EN}{EN} - \dfrac{AE \frown EF}{EN}\ [=]\ AE - \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. Et quia $\gamma F = AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$ $\left\{\text{vel } -AE + \dfrac{AE \frown EF}{EN}\right\}$. ideo $\gamma F = \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. ideo momenta omnium γF = cylindro EF. et quia tam $A\gamma$ quam $\gamma F = \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. ergo $=^{\text{lia}}$ inter se. Ergo $Q\gamma = E\gamma$. Ergo $\nabla^{\text{la}}\ \gamma EF$ et $AQ\gamma$ similia et aequalia inter se.

Iam $\dfrac{\gamma F}{TE} = \dfrac{EF}{ES} = \dfrac{\gamma E}{ST}$.

P r o p. 51. $\gamma F \frown ES = EF \frown TE$. Tang. semicomplementi in arcum q u a d r a b. = γF in basin (q u a d r a b.).

Ergo γE in basin quadrab. quia rad. in basin (quad.) − γF in basin = γE in bas.

P r o p. 52. $\gamma F \frown ST = \gamma E \frown TE$. Summa omnium γF = summae omnium γE in arcum, quadrab. prop. 55. coroll. 4. [=] radio in arcum demto γF in arcum.

C o r o l l. Ergo momenta omnium γF arcui impositorum ex basi quadrabilia, seu $\gamma F \frown EN$ ad arcum = $AE \frown EF$.

P r o p. 53. $EF \frown ST = \gamma E \frown ES$. Summa tang. semicompl. (q u a d r a b.) = γE ad basin.

∇^{la} s i m i l i a : $DF\gamma$ et EST. $\dfrac{D\gamma}{ET} = \dfrac{DF}{ES} = \dfrac{F\gamma}{ST}$.

P r o p. 54. $D\gamma \frown ES = DF \frown ET$. secantes complementi ad basin (secantes in altitudinem inversi, spatium hyp. a basi abscissum) demtis $A\gamma$ vel γF ad basin

---

1 *Unter* $AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$, *gestr.:* subsunt errores

1 EF ⌢ KE = *(1)* $\underbrace{\text{ca} - \text{cb}}_{\text{ca} + \text{af} - \text{da}}$. Et cb = da − af. An error forte in calculo, nam hoc videtur aliquo casu impossibile, quando f. exigua *(2)* AE ⌢ KQ *L* 2 = *erg. Hrsg. zweimal* 11 arcum, *(1)* pendet ex q. circ. v. prop. 55. *(2)* quadrab. *L* 11 = *erg. Hrsg.*

7–15 Die Aussagen der Sätze 51–53 bezüglich der Quadrierbarkeit der einzelnen Größen sind nur teilweise zutreffend. Dies wirkt sich negativ auf die entsprechenden Aussagen von Satz 54 sowie auf Teil 2 S. 68 Z. 7 aus.

(quadrabilibus prop. 51.) aequantur tangentibus compl. ad arcum (spat. hyp.) (tang. ad arc.) demtis tangentibus semicomplementi ad arcum (tang. arcus dimidii ad arcum) quadrabilibus.

P r o p. 55. $D\gamma \frown ST = F\gamma \frown ET$. secans complementi ad altitudinem (radius in arcum), demtis omnibus $F\gamma$ in altitudinem = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 1. Secans ad basin demtis omnibus $F\gamma$ ad basin (quadrabilibus) = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo omnes $F\gamma$ ad arcum = radio in arcum, demtis tang. arc. dimid. in arc. (quadrab.).

C o r o l l. 3. Ergo summa omnium γF (scil. ad altitudinem) = tang. arc. dimid. ad arcum = γF ad basin inversis.

C o r o l l. 4. Ergo summa omnium γE in arcum quadrabilis.

P r o p. 56. $DF \frown ST = F\gamma \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrab.), demta summa tangentium semicomplementi (quadrab.) = $F\gamma$ in basin seu tang. semicompl. in arcum (quadrabilibus).

C o r o l l. Figura tangentium in basin (quadrabilis) demta tang. arcus dimidii in basin (seu summa tang. semicompl. inversa, quadrabilis) = $F\gamma$ ad altitudinem (quadrabilibus).

∇^{la} similia $X\lambda D$ et EST. Porro XD habemus. Quaerenda sunt $X\lambda$ et λD. Iam $X\lambda$ est $C\alpha$ $(= EN)$ $- X\delta$. Sed $X\delta = KE$. quia ∇^{la} $X\delta C$ et AKE similia, unumque latus AE et CX aequale, uni alterius, ergo et reliqua. Ergo $X\lambda = EN - KE$. Similiter λD est $AD - A\alpha$ $(= AN = KE)$ $- C\delta$ $(= EN)$. Ergo $\lambda D = AD - EN - KE$. Denique $DX = CD - AE$.

$$\text{Iam: } \frac{DX}{ET} = \frac{\lambda D}{ES} = \frac{X\lambda}{ST}.$$

5 f. arcum |, quadrabilibus *gestr.* | *(1)* C o r o l l. 1. Summa omnium Fγ pendet ex q. circ. iunct. prop. 52. C o r o l l. 2. Omnes γE ad arcum pendent ex q. circ. dict. prop. 52. iunct Coroll. 1. hic. *(2)* C o r o l l. 1. *L* 11 basin | absurdum *gestr.* | inversis. 18 f. (quadrabilibus). *(1)* ∇^{la} similia: CδR et EST. *(a)* Ang. FCD = ang. *(b)* $\frac{\mathrm{CR}}{}$ *(2)* ∇^{la} similia *L*

---

4 P r o p. 55.: Richtig sind die Hauptaussage, Korollar 3 und (trotz mangelhafter Begründung) Korollar 4; falsch hingegen die Korollare 2 und 3. 13 P r o p. 56.: Der Satz selbst ist korrekt, das Korollar nicht; die Quadrierbarkeitsaussagen treffen nur zum Teil zu.

P r o p. 57. $DX \frown ES = \lambda D \frown ET$. Tangentes complementi ad basin (ex conchoeid.) demto radio in sinum = secantibus complementi ad arcum, demtis pariter sinubus complementi ad arcum, et sinubus ad arcum (ex conchoeid.), adde prop. 24.

P r o p. 58. $DX \frown ST = ET \frown X\lambda$. Summa tangentium complementi, demto radio in altitudinem = momento arcus ex basi demto mom. arcus ex alt.

P r o p. 59. $\lambda D \frown ST = X\lambda \frown ES$. Summa secantium complementi, demta summa sinuum pariter et sinuum complementi = quadrilineo $ABEN$, demta summa sinuum ad basin quadrabili.
Sive figura secantium ad basin, demta summa sinuum, quadrab., pariter et sinuum complementi ad basin = sinubus ad alt. demt. sin compl. ad alt.

∇^{la} s i m i l i a $Y\lambda X$ et EST. nam ang. λXY = angulo TES.
Porro $X\lambda$ habemus. YX est radius demto tangente $BX - BY$. et denique $Y\lambda$ est $A\alpha$ (= KE) $+\alpha\lambda$ (= $C\delta = EN$) $- AY$ (= AH).

$$\frac{YX}{ET} = \frac{X\lambda}{ES} = \frac{Y\lambda}{ST}.$$

P r o p. 60. $YX \frown ES = X\lambda \frown ET$. Radius in basin (sinum) demto tangente in basin ([tangente complementi] in altitudinem) (quadrabili) = momento arcus ex basi, demto momento arcus ex altitudine.

P r o p. 61. $YX \frown ST = Y\lambda \frown ET$. Radius in altitudinem, demta summa tangentium (vel contra) = $Y\lambda$ ad arcum, seu momento arcus ex altitudine, addito momento arcus ex basi, demtis secantibus ad arcum (vel contra).

P r o p. 62. $X\lambda \frown ST = Y\lambda \frown ES$. Summa sinuum complementi demta summa sinuum (intellige in talibus semper: vel contra) = sinubus ad basin + sin. compl. ad basin − secant. ad basin.

---

22 *Über der Klammer:* NB.

16 radio *L ändert Hrsg.* 23–64,1 basin. | ∇^{la} s i m i l i a EμY et EST. Nam ang. MEY = angulo TES. Lineae ita habentur: <u>ME</u> = AE − EN. <u>EY</u> = AY (AH) − AE. <u>MY</u> est differentia tangentis et sinus. Ideo iam habuimus in ∇HPB. *gestr.* | $\dfrac{\xi\mathrm{Y}}{\mathrm{AR} = \mathrm{AD}}$ *L*

$\dfrac{\xi Y}{AR = AD} = \dfrac{\mu N(AE) - EN}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - \dfrac{EN \frown AD}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - AD$.

aliter: $\dfrac{\xi Y}{AE - HE\ (YX)} = \dfrac{EY\ (HA - AE)}{Y\lambda\ (KE + EN - AH)}$.

$\dfrac{\xi E}{EF} = \dfrac{XG\ (AC - EN)}{GF\ (EN - EF)}$. Ergo $\xi E = \dfrac{AC - EN, \frown EF}{EN - EF}$.

∇^{la} similia: ξEY et EST. $\dfrac{\xi Y}{TE} = \dfrac{\xi E}{ES} = \dfrac{EY}{ST}$.

Prop. 63. $\xi Y \frown ES = \xi E \frown TE$.

Prop. 64. $\xi Y \frown ST = EY \frown TE$. seu summa omnium AD per radium multiplicata aequatur momentis omnium secantium radiis minutorum, arcubus impositorum.

Prop. 65. $\xi E \frown ST = EY \frown ES$. Summa omnium ξE aequatur secantibus radio minutis in basin, seu pendet ex q. circ., add. prop. 67.

∇^{la} similia $\xi\mu E$ et EST. $\dfrac{\xi E}{ET} = \dfrac{\xi\mu}{ES} = \dfrac{E\mu}{ST}$.

Prop. 66. $\xi E \frown ES$ ad basin. $= \xi\mu \frown ET$ ad arcum.

Prop. 67. $\xi E \frown ST = E\mu \frown ET$. ξE summa, aequatur radio sinubus complementi minuto in arcum.

Prop. 68. $\xi\mu \frown ST = E\mu \frown ES$. Summa omnium $\xi\mu$ = radio in basin, demtis sinubus complementi ad basin, seu quadrilineo.

∇^{la} similia: ξXF et EST. $\dfrac{\xi F}{ET} = \dfrac{\xi X}{ES} = \dfrac{FX\ (AB - EF)}{ST}$.

Prop. 69. $\xi F \frown ES = \xi X \frown ET$. Tang. semicompl. ad basin. (segm. circ.) addito ξE

16 basin *(1)* . Summa ergo horum ξM aequatur trilineo concavo BMC. Quod per se patet. *(2)*, seu *L*

1 ξ, μ: In seiner Handzeichnung hat Leibniz den Punkt ξ rechts neben den Punkt T gezeichnet; T und ξ müssen aber zusammenfallen. — In seiner Zeichnung verwendet Leibniz die Bezeichnung μ, ebenso in der Variante zu Beginn des Textes; im laufenden Text ist er zur Bezeichnung M gewechselt. Da M bereits in anderer Funktion vorkommt (s. N. 20, prop. 55 und 57), ist vom Herausgeber das ursprüngliche μ beibehalten worden. Die Änderung betrifft Z. 1 sowie Z. 11–16. 7 Prop. 64.: Die Formel ist korrekt, die Ausführungen sind misslungen.

ad basin $= \xi X$ ad arcum.

P r o p. 70. $\xi F \frown ST = FX \frown ET$. Summa tang. semicompl. (quadrab.) $+ \xi E$ summa (ex q. circ.) = radio in arcum, demtis tang. semicompl. ad arcum.

P r o p. 71. $\xi X \frown ST = FX \frown ES$. seu summa omnium ξX = radio in basin − tang. semicompl. in basin.

∇^{la} s i m i l i a: $\theta\varpi E$ et EST. Nam ang. $\varpi\theta E$ = angulo BAE. quia eius dupli ad centrum est angulus ad circumf.

θE autem est parabolica seu chorda supplementi ad semicirculum.

ϖE ita inveniemus: $2b \frown a + f$ seu $2bf + 2ba = \theta E$. quam vocemus $k, \frown \varpi E$. Ergo $\dfrac{2ba + 2bf}{k} = \varpi E$.

$$\frac{\theta E}{ET} = \frac{\theta\varpi}{ES} = \frac{\varpi E}{ST}.$$

P r o p. 72. $\theta E \frown ES = \theta\varpi \frown ET$. Applicatae parabolicae inversae, ad basin, aequantur ipsis $\theta\varpi$ ad arcum.

P r o p. 73. $\theta E \frown ST = \varpi E \frown ET$. Summa applicatarum parabolicarum inverse sumtorum, aequantur ipsis ϖE ad arcum.

Ergo ϖE ad arcum quadrabilia.

P r o p. 74. $\theta\varpi \frown ST = \varpi E \frown ES$. summa omnium $\theta\varpi$ aequalis omnibus ϖE ad basin.

∇^{la} s i m i l i a $\psi\varphi\pi$ et EST. $\psi\varphi = CE$. Punctum π cadit in rectam AB, et si duceretur recta $C\pi\varphi$ ea aequalis rectae $C\pi E$. Ideo $\pi E = \pi\varphi$. et $\psi\pi + \pi\varphi = \psi E$.

Nota si basin AC pro altitudine sumamus, seu aequadivisam intelligamus, $\psi\varphi$ et $\psi\pi + \pi\varphi$ erunt applicatae parabolicae.

$$\frac{\psi\pi}{ET} = \frac{\psi\varphi}{ES} = \frac{\varphi\pi}{ST}.$$

P r o p. 75. $\psi\pi \frown ES = \psi\varphi \frown ET$. seu $\psi\pi$ ad basin $= \psi\varphi$ chordis ad arcum.

19 s i m i l i a *(1)* $\psi\varphi$Q et EST. $\psi\varphi$ = CE. Punctum Q cadit in rectam AB sed non est necesse idem esse cum illo Q, quod alias adhibuimus ut AQ = EF. sed ne *(2)* $\psi\varphi\pi$ *L*

---

2 P r o p. 70.: Die Aussagen zur Quadrierbarkeit sind nur teilweise richtig. 19 Punctum π: Leibniz' ursprüngliche Intention (s. die zugehörige Variante) war richtig. π und Q fallen in der Tat zusammen.

Iam per prop. 42. chordae in arcum pendent ex q. circ. Ergo et $\varphi\pi$ ad basin.
P r o p. 76. $\psi\pi \frown ST = \varphi\pi \frown ET$. seu summa omnium $\psi\pi$ = omnibus $\varphi\pi$ ad arcum.
P r o p. 77. $\psi\varphi \frown ST = \varphi\pi \frown ES$. Chordae ad altitudinem = $\varphi\pi$ ad basin.

[*Teil 2*]

Memorabiles sunt consequentiae quae ex his duci possunt ad arithmeticam infinitorum, reperientur enim summae, quae alias omnem opinor artem humanam eludent. Et certe vulgo non extant summae linearum seu quadraturae figurarum nisi paraboleidum. Sed consideremus exempli causa: summam tangentium complementi.
Esto radius a. tangens complementi l. secans complementi g. sinus b. sinus compl. f. Constat: $g = \dfrac{a^2}{b}$. Constat item $\dfrac{g}{a} = \dfrac{l}{f}$. Ergo $l = \dfrac{gf}{a} = \dfrac{a^2 f}{ba} = \dfrac{af}{b}$. Et quia $b = Rq\, a^2 - f^2$. ideo secans complementi $g = \dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - f^2}$. et tangens complementi $l = \dfrac{af}{Rq\, a^2 - f^2}$. Ponantur autem f continue crescere proportione arithmetica, primum seu minimum esse β. post 2β. post 3β. etc.
Summa ista $\dfrac{a\beta}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{2a\beta}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{3a\beta}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ etc. iniri potest. Demonstravi enim quadrari posse summam tangentium complementi.
Et ista tamen summa $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ quae est secantium complementi, habere non potest, est enim eadem cum tetragonismo sectoris duplicati. Porro si summam tangentium complementi a linea maxima incipias, primum erit

---

14 *Zu* summa ista:
Imo NB. error, summa ista non habetur, quia tangentes [*bricht ab*]

18–67,4 Porro ... etc. *erg. L*

---

1 $\varphi\pi$ ad basin: Im Gegensatz zu Leibniz' Aussage ist das Integral von der Kreisquadratur unabhängig. Der Hinweis auf die prop. 42 irreführend.

$\dfrac{a-\beta.\frown a, \text{ seu } a^2-\beta a}{Rq,\ a^2-a^2-\beta^2+2a\beta \text{ seu } Rq\,2a\beta-\beta^2}$, secundum $\dfrac{a^2-2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$, tertium $\dfrac{a^2-3\beta a}{Rq\,6\beta a-9\beta^2}$, etc. quadrabilis.

Ergo si quadrabilis esset haec quoque series $\dfrac{\beta a}{Rq\,2\beta a-\beta^2}$ $\dfrac{2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc. haberetur quadratura huius $\dfrac{a^2}{Rq\,2\beta a-\beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc.

Differentia inter duas series: $\dfrac{a^2-a\beta}{Rq\,a^2-\beta^2}$ etc.

	$1a\beta$	$2a\beta$
$\cancel{a^2}-a\beta\ \not f\quad a$	$\cancel{a^2}-\cancel{2a}\beta\ \not f\ a-\dfrac{a\beta}{a-\beta}$	$\cancel{a^2}-\cancel{3a}\beta\ \not f\ a-\dfrac{2a\beta}{a-\beta}$
$\cancel{a}-\beta$	$\cancel{a}-\beta$	$\cancel{a}-\beta$
$\overline{Rq\,a^2-\beta^2}$	$\overline{Rq\,a^2-4\beta^2}$	$\overline{Rq\,a^2-9\beta^2}$

Ratio primi ad primum est $\dfrac{a}{\beta}$, 2^{di} ad 2^{dum} $\dfrac{a}{2\beta}$, tertii ad tertium $\dfrac{a}{3\beta}$ etc.

vel $\dfrac{\beta}{a}$ $\dfrac{2\beta}{a}$ $\dfrac{3\beta}{a}$

summa harum rationum est $\dfrac{a^2}{a}=a$.

Tota inquisitio in posterum arithmeticae infinitorum in eo verti debet, ut inveniantur regulae, quarum ope, datis rationibus partium singularum unius totius ad singulas partes totius alterius, ratio inveniri possit, totorum inter se. Manifestum enim est, rem esse determinatam, ac datis istis partium rationibus, necessario emergere per synthesin certas ac determinatas totorum rationes, etsi hactenus regrediendo per analysin non deprehendamus.

$$\frac{a}{b}\ \substack{+\\ \underline{\times}}\ \frac{c}{d}\ \infty\ \frac{a+c}{b+d}\times\frac{ad+cb}{bd}\qquad \frac{abd+cbd}{b^2d+d^2b}\qquad \frac{adb+ad^2+cb^2+cbd}{b^2d+d^2b}$$

---

5 *Zur Formel:* vid. ubi de voluto centro gravitatis.

---

20 vid.: N. 15, wo eine sehr ähnlich gebaute Reihe vorkommt. 12 summa: Leibniz summiert die untere Folge; genauer müsste es $\frac{1}{2}a$ heißen. 19 ∞: Das Zeichen bedeutet hier fiet, s. S. 68 Z. 2.

Ergo differentia inter $\dfrac{a+c}{b+d}$ et $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ qua hoc excedit illud, est $\dfrac{ad^2+cb^2}{b^2d+db^2}$.

Si iam addenda: $\dfrac{a+c}{b+d}$ $\dfrac{e}{f}$, fiet $\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ $\dfrac{af^2+cf^2+[eb^2+ed^2+2bed]}{b^2f+d^2f+2bdf+f^2b+f^2d}$.

[Iam $EN=a-x$. et $KE=y$. et $AC=a$.]

Tang. compl. $\dfrac{CD}{EN}=\dfrac{AC}{AN}$. $CD=\dfrac{AC\frown EN}{AN}$. $\dfrac{a^2-ax}{y}$.

At tang. semicompl. ita. $\dfrac{2CF}{EN}=\dfrac{\psi C=2a}{\psi N=a+y}$. Ergo $2CF=\dfrac{a\frown EN=a^2-ax}{a+y}$.

Denique secans complementi $=AD=\dfrac{a^2}{y}$.

Habemus summam omnium tang. compl. $\dfrac{a^2-ax}{y}$. tang. semicompl. $\dfrac{a^2-ax}{a+y}$.

Desideratur summa omnium secant. compl. $\dfrac{a^2}{y}$ vel summa tangentium semiarcus seu figura semicissoeidis: $\dfrac{ax}{y}=z$. applicata asymptoto parallela.

Quadrata secantium complementi sunt: $\dfrac{a^4}{y^2}=\dfrac{a^4}{ax-x^2}$.

Momenta ex vertice: $\dfrac{a^2}{\sqrt{\dfrac{a}{x}-1}}$.

---

10 $y^2=ax-x^2$.

2 eb + ed *L ändert Hrsg.* 3 f. *(1)* NB. Tang. semicompl. | $=\dfrac{a^2-ax}{2y}$. *erg., nicht gestr.* | *(a)* Imo potius tan *(b)* Tang. compl. = *(c)* Nam $\dfrac{CF}{\dfrac{EN}{2}}=\dfrac{AC}{KE}$. ergo $CF=\dfrac{AC\frown\dfrac{EN}{2}}{KE}$. *(aa)* Iam $\dfrac{EN}{2}$ *(bb)* et $\dfrac{AC\frown EN}{2KE}$. Iam EN = a − x. et KE = y. et AC = a. ergo $CF=\dfrac{a^2-ax}{2y}$. Sed $\dfrac{CD}{EN}=\dfrac{CA}{AN}$. Ergo $CD=\dfrac{CA\frown EN}{AN=EK}$. ergo $CD=\dfrac{a^2-ax}{y}$. *(2)* | Iam EN ... = a. *erg. Hrsg.* | Tang. compl. *L* 8 f. seu figura semicissoeidis *und* applicata asymptoto parallela *erg. L*

---

7 Habemus: Die erste Aussage ist richtig (s. o. Prop. 20 u. 25.), die zweite hingegen falsch (s. o. Prop. 53.). 12 $ax-x^2$: stattdessen müsste es genauer $2ax-x^2$ heißen. Die folgende Rechnung führt Leibniz mit diesem Fehler konsequent durch, verbessert dann, streicht aber schließlich sämtliche hinzugefügten Zweien in S. 69 Z. 1–3 wieder aus.

$z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$. $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{\cancel{2}ax - x^2}$. $\cancel{2}z^2ax - x^2z^2 = a^2x^2$. Ergo $\cancel{2}z^2a - xz^2 = a^2x$. Ergo $\cancel{2}z^2a = a^2x + xz^2$. Ergo $\dfrac{\cancel{2}z^2a}{a^2 + z^2} = x$. vel si Cartesii notis pro z substituas x. pro x, y fiet aequatio figurae segmentorum circuli: $\dfrac{\cancel{2}x^2a}{a^2 + x^2} = y$.

Ita habemus applicatas figurae segmento circuli symmetrae, ab irrationalitate liberatas et ad modum cuiusdam quasi hyperboloeidis expressas. Quod hactenus potuit nemo, dimensionem circuli dare infinita serie numerorum rationalium.

Hactenus nihil erratum est.

Est autem magni momenti haec circuli reductio ad rationalitatem, qua nemo quicquam maius ad circuli dimensionem praestitit.

Porro momentum quoque figurae eiusdem, ex altitudine, seu summa quadratorum z vel applicatarum cissoeidis dimidiatae, asymptoto parallelarum ad hyperbolam reduci potest. Nam z asymptoto parallela aequalis est: $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2} = \dfrac{a^2x}{2a - x}$. Ideoque respondet momento figurae secantium ex vertice, seu opposita asymptotae. Nam si x crescere incipiat ab opposita asymptotae, erit hyperbola $\dfrac{a^2}{a - x}$. Eiusque momentum ex illa opposita: $\dfrac{a^2x}{a - x}$. Hinc dubitandum non est momentum istud ex quadratura hyperbolae pendere. (Hyperbola est, $\dfrac{a^2}{a - x} = y$. Ergo $a^2 = ay - xy$. Ergo $a^2 + xy = ay$. Ergo $xy = ay - a^2$. Ergo $x = \dfrac{ay - a^2}{y}$. vel $x = a - \dfrac{a^2}{y}$. Ergo y abscissa ex asymptota semper maior a. Hinc apparet aequationem ipsius $x = \dfrac{2z^2a}{a^2 + z^2}$. aequationi

2–4 = x. | vel si … = y. *erg.*; applicatae semicissoeidis, basi, seu diametro circuli generatoris parallelae et *(1)* parallelae *(2)* perpendiculares et asymptotae parallelae *(3)* perpendiculares asymptoto *erg. u. gestr.; darüber, nicht gestr.:* | Ita *L* 11 f. dimidiatae, *(1)* basi parallelarum, seu ad asymptotam perpendicularium, eiusdem pene aequationis est, cuius sunt *(a)* axi | seu asymptoto | *(b)* basi parallelae *(2)* asymptoto … potest *(a)*, nimirum mutato tantum + in − . Nam z basi parallela, aequalis *(b)*. Nam *L* 13 Ideoque *(1)* aequatur *(2)* respondet *(3)* aequatur *(4)* respondet momento *(a)* hyperbolae ex *(b)* figurae *L* 15 $\dfrac{a^2x}{a - x}$. *(1)* Ergo cissoeis ex asymptota aequiponderat hyperbolae ex opposita asymptotae. Modo idem *(2)* Hinc *L* ipsius $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2}$. valde affinem esse, sed illam tamen non aeque reducibilem.[)]

Nota autem summa quadratorum parallelarum asymptotae seu z^2 inventa, inventum utique momentum cissoeidis ex basi seu circuli diametro, cui applicata intelligitur, ac per consequens haberi summam ipsarum x. seu basi parallelarum, ductarum in distantias a basi, quae scilicet his semiquadratis aequatur.

Notandum ante omnia cum dicitur $z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$. Tunc posito quod x sit initio minimum, ipsam z fore minimam applicatarum asymptotae parallelarum, nam posito x esse infinitae parvum, ac proinde negligi velut non ascriptum erit $z = \dfrac{a}{\sqrt{a}}$. ac proinde linea qualibet assignabili minus. Nam sic $z^2 = \dfrac{a^2}{a}$. seu $z^2 = a$.

Ergo inspecta figura quam de cissoeide descripsi[:] x erit AD. et z erit DI. At applicatae inversae IK, non sunt x. sed $a - x$. verum x sunt applicatae spatii complementalis. Ergo omnia momenta ipsorum $a - x$ ad altitudinem sunt aequalia semiquadratis omnium z ad basin. Ergo xz ad asymptotam reducta sunt ad quadraturam hyperbolae

At semiquadrata omnium x. vel momenta omnium z. ex asymptota aequantur sinuum cylindro, atque ideo zx vel (quia $z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$) $\dfrac{ax^2}{\sqrt{ax - x^2}} = a \frown \sqrt{ax - x^2}$. Ergo $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}} = \sqrt{ax - x^2}$. Ergo $x^2 = ax - x^2$. Ergo $2x^2 = ax$. Ergo $2x = a$. absurdum. Error ergo alicubi.

Eius ratio haec est[:] primum sumsi semiapplicatam cissoeidis asymptotae parallelam esse hanc $z = \dfrac{ax}{y}$. posito y esse sinum, quoniam scilicet secans compl. erat $\dfrac{az}{y}$. et tang. compl. erat $\dfrac{a^2 - ax}{y}$. at horum differentia est tangens semiarcus. Ergo tangens semiarcus est $\dfrac{ax}{y}$. ducantur in $2a - x$. distantias a basi, fiet: $\dfrac{2a^2x - ax^2}{y} = \dfrac{2a^2x - ax^2}{\sqrt{ax - x^2}} =$ [*bricht ab*]

Sed de his alias exquisitius, sufficit interea certam exquisitamque detexisse rationem exprimendi progressionem elementorum circuli, aut figurae circularibus symmetrae, infinita

10 inspecta figura: s. N. 22, S. 9 , Fig. 4.

serie numerorum rationalium. Quod hactenus in hyperbola ac hyperboloeidibus, parabolaque aliisque id genus figuris, in circulo nunquam fieri potuit, novaque methodus detecta arcus, sinus, segmenta supputandi.

Si $\frac{z^2a}{a^2+z^2} = x$. series numerorum rationalium ipsis x respondentium ita exhiberi potest: posito $a = 10$. nam assumi potest quantumcumque, et in continuo, infinitum:

$$\underset{101}{\frac{10}{100+1}} + \underset{104}{\frac{40}{100+4}} + \underset{109}{\frac{90}{100+9}} + \underset{116}{\frac{160}{100+16}} + \underset{125}{\frac{250}{100+25}} + \underset{136}{\frac{360}{100+36}} + \underset{149}{\frac{490}{100+49}} +$$

$$\underset{164}{\frac{640}{100+64}} + \underset{181}{\frac{810}{100+81}} + \underset{200}{\frac{1000}{100+100}}$$

Asymptota conchoeidis asymptotae hyperbolae aequalis est, differentiis, cum ipsarum utriusque applicatarum incremento decrescentibus.

Spatium hyperbolae asymptoton esse magnitudine infinitum facile demonstrari potest quoniam cylinder eius infinitae magnitudinis. Quod rursus sic probo: Quoniam residuum eius, demto momento ex asymptota vel basi, est momentum ex opposita asymptotae seu ex vertice spatii asymptoti, at hoc momentum necesse est ad alterum illo esse ut infinitum ad finitum, adeo ut si momentum ex basi est finitum, alterum sit infinitum, et si momentum ex basi est infinitum, momentum ex vertice futurum sit plus quam infinitum. Cuius rei manifesta ratio est, quoniam in asymptotam aliasque ei parallelas numero infinitesimarum finito distantes quippe infinitas ducta puncta faciunt plana a^2. Ergo lineae in ea ductae facient solida.
Imo, videndum. Istae enim faciant solida, facient tantum finita, quoniam et plana fuerant finita. Sed de hoc porro videndum.

Credo Collinium summam inire terminorum progressionis harmonicae divisione illa per partes adhibita, qua et Mercator usus est.

6–9 Imo hoc est complementum rectanguli isoparalleli ad segmentum duplicatum, potest a assumi $\frac{1}{10}$. et $z = \frac{1}{100}\ \frac{2}{100}\ \frac{3}{100}$.

---

23 Collinium: vgl. Oldenburg an Leibniz vom 16. IV. 1673 (*LSB* III, 1 S. 60).

$\dfrac{z^2}{z^2+a^2}$.

Iam $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ etc. Ergo $\dfrac{z^2}{z^2+a^2} =$

$$\left\{\begin{array}{rl} z^2 & -a^2 + a^4 - a^6 + a^8 - a^{10} \text{ etc.} \\ 4z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 9z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 16z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 25z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \end{array}\right\}$$

seu $z^2+4z^2+9z^2$ etc. | $+a^4+a^8+a^{12}$ etc. $-a^2-a^6-a^{10}$ etc. ducta in a. id est infinities sumta.

Seu: $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc.

Et quia $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $= \dfrac{a^3}{3}$. habebimus: $\dfrac{a^3}{3} + a^5 + a^9 + a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc.

vel $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-\dfrac{2a^3}{3} - a^7 - a^{11}$ etc.

Unde posita a minore quam 1. v. g. $\dfrac{1}{2}$. posteriores potestates erunt fractiones tam parvae ut tuto negligi possunt, habebiturque approximatio facillima, quantam volemus. Haec pro quadratura totius, si partis tantum quaeratur multiplicationis per a. multiplicandum per z. seu altitudinem abscissamve ex vertice.

Si a v. g. ponatur 10. posteriores potestates continue crescent, si ponatur esse $\dfrac{1}{10}$. nec hoc satisfacit. Ergo quemadmodum si 1. sit infinitesima lineae seu punctum, a foret infinitum. Ita si a volumus facere fractionem quantumlibet, et si opus infinite, parvam, ipsum 1. intelligamus $= a^2$. seu quadratum radii. Cuius infinitesima est a. et loco infinitesimae,

---

2 NB. si a fractio est, necesse est etiam z esse fractionem fractionis, cum sit portio ipsius a.

3–7 *Links neben dem Schema:* Summa horum omnium linea est.
Darunter, gestrichen: Male non z^2 sed 1.

---

15 per a: von hier geht ein Verbindungsstrich zu ducta in a Z. 8 aus.

intelligatur esse $\dfrac{1}{100,000}$. Imo nec opus est postrema, negligi potest summa eorum enim in infinitum, quia sunt progressionis geometricae. Denique omnia multiplicanda per a. id est 100,000, quaeritur enim non summa omnium $\dfrac{z^2}{z^2+a^2}$. sed omnium $\dfrac{z^2a}{z^2+a^2}$. Ille demum maximus usus est, quod idem fit, etiamsi series sit finita, seu altitudo divisa in partes finitas, eodem modo enim hac tangentium methodo summa eius inveniri potest, ut credo. Videndum tamen, an scilicet sinus in suas ipsorum differentias ducti, producant eorum semiquadrata, in summa. Forte utilius infinitis summa potius omnium DK uti, quia ea non ad basin sed simpliciter. Nam infinitis summa omnium DE ad basin difficilis, quia basis non potest dividi in partes aequales.

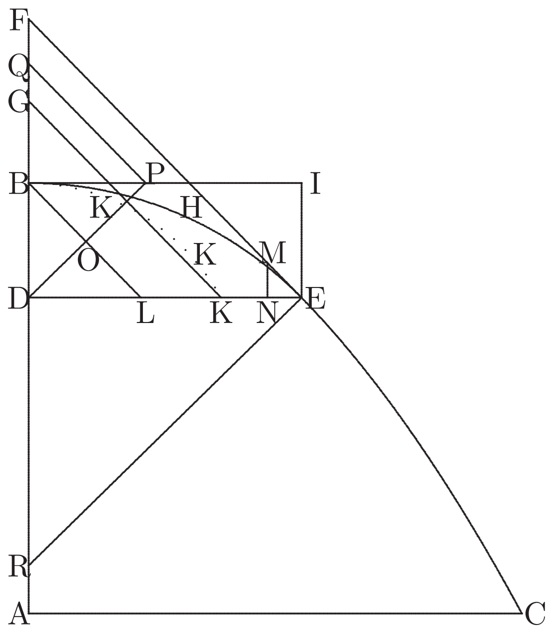
[*Teil 3*]

Theorema est in omni figura: secantes ad basin aequant rectangulum abscissae in applicatam, segmento duplicato auctum. Et hoc quidem in circulo facit quadrilineum duplicatum, seu sectorem duplicatum.

11–13 Male fit regula generalis.

4–9 Ille demum ... partes aequales. *erg.* L 11 est |generale *gestr.*| in L 11 basin *(1)* aequantur quadrilineo figurae duplicato, sciendum est autem in circulo, quadrilineum *(2)* aequant L

11 Theorema: für eine eingehende Analyse des Theorems vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 41 f.



[*Fig. 2*]

Esto figura quaelibet ABC. cuius applicata quaelibet DE. tangens [EF]. abscissa trans verticem BF. eius dimidia BG.

Aio summam omnium [DG] ad basin semper esse quadrabilem, aequarique triangulo BIE. quod ita demonstro:

Summa omnium BD ad basin complet trilineum concavum $BIEHB$. Summa autem omnium BG ad basin aequatur segmento BHE (quoniam ut alibi demonstratum est summa omnium $BF = 2BG$, ad basin, aequatur duplicato segmento BHE). Ergo summa omnium $DB + BG = DG$. ad basin = trilineo concavo $BIEHB$ + segm. BHE = triang. BIE.

Hinc habetur methodus geometrica universalis, incomparabilis, admiranda, divina, quadrandi figuram quamlibet datam, quod si ostendo.

Ducatur recta GK parallela FE. Aio summam omnium DK simpliciter sive ad altitudinem, id est uti iacent, id est figuram altitudine BD. basi DK. et curva per omnia puncta

2 EF *erg. Hrsg.* 4 DB *L ändert Hrsg.*

7 alibi: s. o. Satz 10.

K inter B et K praesens rectae DE, ducta, comprehensam aequari triangulo BIE. Nam ut demonstratu facile est, omnes DK in altitudinem aequantur omnibus DG in basin, id est, ut demonstravimus paulo ante, triangulo BIE.
Quare data quadam figura, quaeramus per analysin aliam figuram, in qua omnes DE seu applicatae figurae datae, faciant officium rectarum DK. Triangulum BIE figurae inventae aequabitur figurae datae $BKKD$.
Oportet autem figuram datam $BKKD$ esse convexam, seu cuius applicatae sint applicatis trianguli aeque alti BDL maiores, uti patet. Quare si figura concava quadranda offeratur, sumenda est convexa, seu complementum eius ad rectangulum.

4–6 *Nebenbetrachtung:*

NB. Data figura geometrica quadratrice figurae angulorum et omnium eius partium, datur sectio angulorum universalis. Ponatur figura ista quadratrix esse decimi gradus v. g. sursolido-surdesolido cubica etc. Ea semel in plano descripta, poterunt problemata omnia geometrice effici etiam quae sunt centesimi et millesimi, et cuiuscunque gradus altioris, et inveniri centum, et ultra si velis, mediae proportionales, cum sectio angulorum inventioni mediarum proportionalium respondeat.
Sed iam videndum si semel fieri possit, ut aequatio quae per analysin centesimi gradus esse ostenditur, reduci potest ad decimum gradum. Videtur eodem pure, quae decimi gradus reduci posse, ad primum ac secundum, et in plano exhiberi. Quo posito absolutum foret mesolabum.

$$\sqrt{}_{10}\; a^{10}+b^{10} \quad \sqrt{}_{20}\; a^{20}+b^{20}+2[a^{10}b^{10}]$$

Reducatur[:] quasi extractione radicis reduci non posset, et ideo quasi esset gradus decimi. Deprimetur ergo, et reducti radix quadrata, cubica. etc. tandem deprimetur infra decimum

NB. Si v. g. omnes altiores dimensiones reduci possunt ad aliquam certam minorem omnes radices extrahi possunt. Nam si certa illa est sexta, ergo ex aequatione sextae dimensionis extrahi potest radix quadrata. Ex aequatione octavae *(!)* radix cubica etc. Ergo extrahi potest radix cubica, si ex altiore, ergo et ex inferiore exaltando inferius, et postea rursus dividendo, v. g. pro valore $\sqrt{}_c\; a^3+b^3$. dici potest a valere c^4. et b valere d^4 etc. fiet $\sqrt{}_c\; c^{12}+d^{12}$. vel sic: $a^3d^4+b^3d^4, \sqrt{}_c$.

17 analysin | non nisi *gestr.* | centesimi *L* 21 $\mathrm{a}^{20}\mathrm{b}^{20}$ *L ändert Hrsg.*

Sed quid circuitionibus opus est, quid ex figuris datis novas per analysin quaerimus, cum nunc tandem praeter opinionem inciderimus in methodum non tantum generalem, sed et ita expeditam, ut ad figurae cuiuslibet datae quadraturam absolutam, non nisi tangente eius ducto opus sit.

Data ergo figura quadranda quacunque $DBHE$. ductoque tangente EF. ducatur ei parallela BL. aio triangulum BDL aequari trilineo concavo (si figura data convexa est) seu complemento $(BIEHB)$ figurae datae $(DBHE)$ ad rectangulum (DI) vel quod idem est triangulum $BLE =$ segmento BHE.

Demonstratio haec est: intelligatur triangulum figurae characteristicum esse MNE. cuius scilicet altitudo MN est infinitesima altitudinis figurae, triangulum hoc simile est triangulo FDE per constructionem, ergo et triangulo BDL. Ergo

$$\frac{BD}{MN} = \frac{DL}{NE} = \frac{BL}{ME}.$$

Ideo primum $BD \frown NE = DL \frown MN$. id est BD ad basin aequantur summae omnium DL. nempe ad altitudinem, seu triangulo BDL. Nam quia omnes BD faciunt triangulum, seu arithmetice proportionales sunt, ideo etiam omnes DL sunt arithmetice proportionales, ac proinde triangulo BDL continentur. At omnes BD ad basin vel NE implent complementum figurae ad rectangulum $BIEHB$. idem enim est, sive basi DE, sive oppositae BI applicentur. Hinc sequitur triangulum BLE aequari segmento BHE. Nam ∇^{lum} $BDE = \nabla BIE$. item $\nabla BDL =$ compl. fig. $BIEHB$. Ergo ∇^{lum} $BDE - \nabla BDL$, seu ∇BLE erit $= \nabla^{\text{lo}}$ $BIE-$ compl. fig. $BIEHB$, sive segmento BHE.

Figurae illae, quae hac methodo describentur, erunt vere quadratrices, cum quadratrices veterum non sint geometricae, seu describi geometrice non possint.

Experiemur rem in figura cognitae dimensionis, qualis est parabola, ubi $BD = BF$. Ergo et $DL = LE$. ergo ∇^{lum} BDL quarta pars figurae, cum debeat esse tertia. Hinc

---

6 Falsa pars eorum quae sequuntur falsum[,] inquam summam omnium DL esse triangulum. Sed haec nihil derogant methodo praecedenti utique infallibili.

12 $BD \frown ME$ (segmentum, in circulo, duplicatum) = summae omnium $BL \frown MN$ (ea ergo in circulo pendet ab eius quadratura).

$DL \frown ME = BL \frown NE$.

21 f. Figurae ... possint. *erg.* L

patet errorem aliquem subesse debere. Is vero in eo est, quod summam omnium DL triangulum BDL constituerem re non satis examinata.

Verissimum est summam omnium DL aequari triangulo BIE. sed haec summa non est semper triangulum, etsi summa omnium DB. sed ad altitudinem, non ad basin, triangulum sit.

DL autem sic investigabimus: $\dfrac{DL}{DE} = \dfrac{BD}{DF}$. ergo $DL = \dfrac{BD \frown DE}{DF}$. Et si curva BHE sit circulus erit

$$DL = \frac{xy}{\dfrac{a^2}{x} - a + x} = \frac{x^2 y}{a^2 - ax + x^2} = z.$$

$$\text{seu } \frac{x \frown \sqrt{2ax - x^2}}{a^2 - ax + x^2} = z. \quad \text{seu } \frac{2x^5 a - x^6}{\square, a^2 - ax + x^2} = z^2 \quad \text{etc.}$$

Inde facile haberi potest etiam x. sed quia parum credibile est liberatam iri ab irrationalitate, id linquamus. Et ad praeclaram illam methodum superiorem revertamur, eique novam non absimilem, nec minus facilem universalemque adiciemus.

Ducatur recta DO perpendicularis ad BL, aio cuiuscunque tandem generis sit curva BH summam omnium BK ad arcum semper iniri posse. Quia enim triangulum BOD simile ∇^{lo} BDL vel ∇^{lo} MNE, et angulus $BDO =$ angulo DLB vel NEM, ideo

$$\frac{BD}{ME} = \frac{BO}{MN} = \frac{DO}{EN}.$$

Ergo $BD \frown MN$. semiquadratum maximae $BD = BO \frown ME$. seu BO in arcum.
$BD \frown EN$ (trilineum concavum) $= DO \frown ME$. semper ergo summa DO in arcum pendet a quadratura figurae et vicissim.

---

6 f. *Anderer Ansatz:*

$$\frac{\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{2x}}{x} = \frac{\dfrac{a^2}{x}}{z}. \text{ Ergo } z = \frac{a^2}{x} \frown \frac{x^2}{\dfrac{a^2}{\cancel{x}} - \dfrac{a^2}{2\cancel{x}}}. \quad z = \frac{a^2}{x} \frown \frac{2x^2}{a^2}. \quad z = 2x.$$

19–78,1 vicissim. | Innumeras dare possumus figuras quadrabiles, datis ipsis *gestr.* | BO ⌢ EN *L*

$BO \frown EN = DO \frown MN$.

Recta DO producatur, dum occurrat rectae BI in P. Aio summam omnium BP ad basin semper quadrari posse. Est enim ∇^{lum} PBD simile ∇^{lo} MNE. et angulus BDP aequalis angulo NEM. Ergo

$$\frac{DP}{ME} = \frac{PB}{MN} = \frac{BD}{EN}.$$

Ergo $DP \frown EN$ seu ad basin $= BD \frown ME$ ad arcum seu momento arcus ex vertice.
$DP \frown MN = PB \frown ME$. seu summa omnium DP simpliciter = summae omnium PB ad arcum.
$PB \frown EN = BD \frown MN$. seu summa PB ad basin = semiquadrato BD.

Sed quia PB ad basin quadrabilis, ergo summa omnium PQ absolute erit quadrabilis, nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.
Ecce ergo aliam methodum universalissimam quadrandi figuram quamlibet datam, si quaeratur alia figura, in qua applicatae omnes figurae datae, faciant functionem rectarum QP.

Intelligi ex hoc exemplo potest, plerumque si quae lineae ad arcum basinve semper quadrentur, alias eius ope reperiri posse, quarum summa simpliciter semper quadretur. Ac totidem habebuntur methodi universales quarum singulis quadrari possunt figurae in universum omnes. Sed ex his tres illae methodi principales, quarum duas hoc loco, primam alibi dedi, ubi ostendi summam omnium DR semper quadrari posse; videntur suffecturae, saltem ut se mutuo examinent vitandi erroris calculi causa. Cum alioquin vel unica earum sit suffectura ad problemata in universum omnia resolvenda.

1 f. DO ⌢ MN. | Sed hoc obiter, nunc ad methodum novam universalemque | aliam a priore *erg.* | quadrandi omnes figuras accedemus: *gestr.* Recta . . . occurrat *gestr. u. wieder gültig gemacht* | rectae *L*
8 f. arcum. | Sed haec obiter, nunc tandem *gestr.* | PB ⌢ EN *L* 15–21 Intelligi . . . resolvenda. *erg. L*

11 nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.: Diese Begründung ist falsch, anstelle davon müsste es vielmehr $\frac{PQ}{ME} = \frac{PB}{EN}$ heißen. 19 ubi ostendi: .

25. FINES GEOMETRIAE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 256. 1 Bl. 2°. 1 1/4 S. auf Bl. 256 r° und v°. Auf dem übrigen Teil des Blattes *LBS* VII,1 N. 115.
Cc 2, Nr. 552

Datierungsgründe:

Fines geometriae, seu classes problematum (omne enim theorema propter problema est) describere figuras; metiri figurarum datarum quantitates, invenire figuras quantitatis desideratae.
Horum porro omnium rursus tres sunt gradus, est enim geometria vel Euclidea, vel Apolloniana (quam Vieta et Cartesius resuscitavere), vel Archimedea, cui Guldinus, Cavalerius, aliique incubuere.

Euclidea ducit, metiturque rectilineas, invenitque figuras quantitatis desideratae rectilineas quoties ratio quaesitarum ad datas haberi potest, seu quoties problema est planum, ductuque rectarum et circuli solvi potest.

Sed quoniam interdum rectilinea quantitatis desideratae inveniri non possunt nisi aliis quibusdam curvis, seu locis, quos vocant descriptis, eam provinciam Apollonius praeclare exornavit, et Vieta, Cartesius, Slusiusque amplificavere.
Caeterum ad geometriam Apollonianam dimensione figurarum curvarum, opus non est, sed sufficit eas describi posse, et tangentes earum inveniri quare saepe miratus sum a doctissimis viris, sed qui scilicet hoc unum agitavere geometriam Apollonianam pro absoluta ac perfecta venditari.

Commune istud est eorum peccatum, qui in Cartesii verba iuravere: ita enim ille saepe loquitur splendidius sane quam verius; methodo sua geometriam ad perfectionem perductam esse, quanta ab homine optari possit; nullum esse problema, cuius non aut solutionem aut solvendi impossibilitatem monstret. Certas sibi rationes esse praescribendi

8 est) *(1)* invenire, scilicet puncta; describere scilicet locos, seu seriem punctorum infinitam; ac denique comparare, seu metiri figuras, constituereque *(2)* velut subiectum contemplationis, invenire loca, invenire quantitates desideratas, *(3)* describere *L* 25 problema, *(1)* quod eius ope aut solvi non queat *(2)* cuius *L*

limites intellectui, definiendique quicquid aliquando inveniri possit.

Sed quantopere in eo negotio lapsus sit, vir caetera utique magnus, docuit eventus. Crediderat enim arte humana curvam rectae aequalem inveniri non posse quod in *Geometria* diserte satis expressit, forte quod ex ea quam sequebatur geometriae methodo, cui nihil addi posse putabat aditus et ad hanc speculationem nullus aperiretur. At Wrennus certe ac Heuratius ac novissime Hugenius praeclaris speciminibus, spem intellectui humano reddidere.

Constat Cartesium inveniendae dimensioni areae cycloeidis imparem, donec eius quantitas a Robervallio demonstrata, ei a Mersenno, (quamquam sine demonstratione) transmissa est.

Cuius rei ratio est (operae pretium enim est, intimas scrutari harum rerum causas, cum eas nemo satis persecutus sit), quia algebra quam hactenus habemus in surdarum calculo imperfecta est. Nam quis mortalium duas quasdam radices surdas

$$Rq\ a^2 + b^2. + Rq.\ a^2 + c^2.$$

in unam quandam, quanquam compositam seu binomiam redigere potest? At hoc plerumque in curvilineorum dimensione requiritur.

Alterum est quod per binomia vel residua dividi non potest quemadmodum per ea potest multiplicari, nam ex $a, \frown b + c.$ fieri possunt plures producti uninomii, $ab + ac.$ at si divisor sit binomius, ut

$$\frac{a}{b+c}$$

producti uninomii haberi non possunt nisi numero infiniti. Quorum summa iniri quidem potest, sed quae binomium datum nobis reddit.

Magni tamen usus hoc est ad approximationes quod Mercator in quadratura hyperbolae ostendit; ego in quadratura circuli exacta sed arithmetica, et sectione angulorum univer-

8 areae *erg.* *L* 19–21 binomius, *(1)* ex eo divisores *(2)* ut $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+c}}$ *(a)* divisores uninomii ex eo *(b)* producti *L* 22 f. reddit. *(1)* Cuius tamen maximus est usus ad approximationes *(2)* Magni *L* 24 exacta sed arithmetica *erg.* *L* 24–81,1 universali, *(1)* scilicet arithmetica per approximationes *(2)* non *L*

4 expressit: R. Descartes, *Geometria*, *DGS* I S. 39. 7 reddidere: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 68–72 (*HO* XVIII) S. 202–211). 9 f. transmissa: Mersenne – Descartes, Brief vom 28. April 1638, in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; *MCW* VII S. 173–179). 24 ostendit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 31–34.

sali, non exacta quidem, sed per approximationes, expeditissimas tamen idem, ingenti opinor fructu, exhibebo.

Tertium quod observavi malum est imperfectio arithmeticae serierum, et quae ab ea pendet arithmeticae infinitorum; quoties quadratura alicuius figurae reducta est ad inifinitam seriem numerorum rationalium (rationalium inquam, surdi enim sunt intractabiles).

Quod primus omnium in hyperbola praestitit Vicecomes Bruncker, Societatis Regiae Anglicanae praeses, geometra insignis, in circulo autem hactenus, nemo, donec a me quoque eius rei ratio excogitaretur, qua circulum (et ellipsin) ad quanquam figuram hyperboloeidem reduxi, et ostendi serie quadam numerorum rationalium infinitorum exacte exhiberi posse circuli imo et segmenti cuiuslibet magnitudinem. Unde sequitur vera et exacta (id est non per approximationes), attamen arithmetica tantum quadratura, et quanquam per approximationes (sed expeditissimas), sectio angulorum universalis, et quotcunque mediarum proportionalium inventio, cubique, ac surdesolidi, altiorisque cuiuscunque potestatis duplicatio, triplicatiove etc.; et ut verbo dicam perfectio geometriae in usu communi versantis.

Sed haec aliquando fusius dicam, peculiari dissertatione de approximationibus, seu perfectione geometriae in usu versantis. Nunc admonuisse sufficit, hanc arithmeticae infinitorum imperfectionem, quod omnes series infinitas numerorum rationalium in summam colligere nequit, redundare in geometriam.

Neque hic algebra sufficit, nisi ei ars combinatoria succurrat.

Haec sunt quae faciunt, ut hactenus in potestate artificis non sit, datam figuram curvam metiri. Quare data quadam figura, cuius resolutio nos in surdas ducit, eousque transformanda est, donec eliminatis surdis ad infinitam seriem rationalium numerorum redigatur, qui primus est ad quadraturam gradus.

3 et *(1)* | inprimis *gestr.* | arithmeticae infinitorum *(2)* quae *L* 9 (et ellipsin) *erg. L* 21 f. succurrat. *(1)* His ita positis, fit ut non sit in potestate artificis, invenire *(2)* Haec sunt quae faciunt, | fit *streicht Hrsg.* | ut *L* 23 metiri. *(1)* Necesse est enim fig *(2)* Quare *L* 24 eliminatis surdis *erg. L*

7 praestitit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 10 reduxi, et ostendi: vgl. dazu die wohl früheste einschlägige Studie Cc 2, Nr. 1233A (= Bogen 1,2,4) und Cc 2, Nr. 563 (= Bogen 3) mit den Fortsetzungen Cc 2, Nr. 1237 und 1238.

Et regula est generalis a me inventa: omnis figura plana curvilinea, cuius solidum revolutione genitum, circa altitudinem basinve, quemadmodum et solidum cuiuslibet partis eius a vertice revolutionis abscissae, reduci potest ad cylindrum, quod in circulo, ellipsi, hyperbola, cycloeide, figura sinuum, aliisque multis fieri potest, reduci potest ad speciem quandam hyperboloeidis, seu infinitam seriem numerorum rationalium; quod est arithmeticam eius, (exactam tamen) quadraturam dare.

Atque haec quidem dimetiendarum figurarum methodus recta est, est et alia obliqua, et fortuna subnixa, cum figura mutatur in aliam figuram, donec tandem in quadrabilem incidamus. Hoc sane hactenus factum est casu, sed qui certam quandam methodum exhibuerit transmutandarum figurarum, quam nihil effugiat, nemo comparuit. Hanc ego ausim dicere a me detectam, fontesque apertos, geometriae Archimedeae quos qui persequatur, efficere possit, quod in geometria Apolloniana iactatur, solvere problema, aut ostendere insolubilitatem.

Mira res est, et summae facilitatis, ac ne contemplationi quidem intricatissimae curvarum obnoxia; eo usque ut ex simplici quodam diagrammate, in quo nihil nisi circulus et aliquot rectae sese intersecantes depictae erunt, deduxerim, triginta et ultra propositiones admirandas, quibus curvilinea plurima, partim quadrantur partim in alia curvilinea commutantur methodo tam facili, ut non nisi rectilinea per Euclidea *Elementa* tractari videantur.

Tota res nititur triangulo quodam orthogonio laterum infinite parvorum, quod a me appellari solet c h a r a c t e r i s t i c u m , cui alia communia, laterum assignabilium, similia, ex proprietate figurae constituantur. Ea porro triangula similia characteristico comparata, exhibent propositiones multas, pro tractabilitate figurae, quibus diversi generis curvae inter se comparantur. Pauca sunt, quae ex hoc t r i a n g u l o c h a r a c t e r i s t i c o non deducantur.

Ars autem combinatoria praestare potest ut nihil effugiat. Atque ita secure pronuntiari potest, etiam de problematum possibilitate quamdiu scilicet arithmetica surdorum, atque infinitorum, separata opera non perficiuntur.

1 a me inventa *erg. L* 20 triangulo *(1)* assignabili quodam, quod a inassi *(2)* quodam orthogonio *L* 27 potest, | non *gestr.* | etiam *L*

1 regula ... a me inventa: 8 figura mutatur: Anspielung auf den sog. Transmutationssatz; vgl. dazu N. 12 S. Z. . 16 triginta et ultra: s. vor allem N. 21. — Das charakteristische Dreieck hat Leibniz bei seinen Studien zu Pascals *Lettres de A. De Honville*, 1659, gefunden; vgl. dazu N. 4.

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz’ eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
LuX	Leibniz gemeinsam mit Unbekanntem, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
X	Unbekannter, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen und Eingriffe des Herausgebers (ursprüngliche Form im Variantenapparat). Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
$\langle\ \rangle$	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
$\langle - \rangle$	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
$\boxed{}$	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
i. a.	im allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LBr.	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Briefwechsel
LH	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Handschriften
lib.	liber
Marg.	Marginalie(n)
Ms.	Manuskript

24. 3. 2003

N., Nr.	Nummer	Tl(e)	Teil(e)
Nachdr.	Nachdruck	tlw.	teilweise
NB.	nota bene	u. a.	und andere, unter anderem
p., pag.	pagina	u. d. T.	unter dem Titel
probl.	problema	Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
prop.	propositio	u. ö.	und öfter
R.	responsio, respondetur	v.	von, vor
r^{o}	recto	Var.	Variante
reg.	regula	vgl.	vergleiche
S.	Seite	v^{o}	verso
s.	sectio, siehe	Z.	Zeile
s. a.	siehe auch		destilletur, distilletur (noch zu bedenken)
s. o.	siehe oben		
Sp.	Spalte		
SV.	Schriftenverzeichnis		

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2	*Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672–Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914-1924.
DGS	*Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659-1661.
DO	R. DESCARTES, *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879-1910; 2. Aufl. ebd. 1964-1972.
LBG	*Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.
LDK	*Der Beginn der Determinantentheorie.* Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül. Textband. Hrsg. E. Knobloch = *arbor scientiarum.* Reihe B: Texte, Bd II. Hildesheim 1980.
LKK	*Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik.* Textband. Hrsg. E. Knobloch = *Studia Leibnitiana Supplementa.* Bd. XVI. Wiesbaden 1976.
LMG	*Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849-1863; Nachdr.: Hildesheim 1962 u. 1971.
LQK	G. W. LEIBNIZ, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Hrsg.: E. Knobloch. Göttingen 1993
LSB	G. W. LEIBNIZ, *Sämtliche Schriften und Briefe.* Hrsg. von der Göttinger und der Berliner Akademie der Wissenschaften, Berlin.
OC	H. OLDENBURG, *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965-1986.
PO	Bl. PASCAL, *Oeuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904-1914; Nachdr.: Vaduz 1965.
VO	Fr. VIÈTE, *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten.* Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970.
WO	J. WALLIS, *Opera mathematica*, 3 Bde, Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im einzelnen erklärt sind. Bei einigen Zeichen sind zusätzlich die Autoren angegeben, von denen Leibniz sie wahrscheinlich kennengelernt hat.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht der Leibnizschen mathematischen Bezeichnungsweise gibt Fl. CAJORI, *Leibniz the master-builder of mathematical notations*, in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429 bzw. Fl. CAJORI, *A history of mathematical notations*, Bd. II S. 189–196 (La Salle, Ill., 1929 u. ö.)

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
$\square$, $\boxed{2}$	Quadrat
cub, $\boxed{3}$	Kubus
$\boxed{n}$, $\boxed{\beta}$	n-te, allgemeine Potenz
Rq, $\boxed{\frac{1}{2}}$	Quadratwurzel
$\sqrt{}c$, $\sqrt{}3$	Kubikwurzel
$\sqrt{}n$	n-te Wurzel
aeq., aequ.	gleich
$\sqcap$	gleich

$\sqcap$, $\sqsubset$	größer als
$\sqcap$	kleiner als
$*$	ausfallende Terme
$a\,.\,b : c\,.\,d$	Proportion
$\vert$	Kürzung eines Bruchs
⨍	facit
Platzhalter:	
$\odot$	Vorzeichen
...	Terme
:	Terme
$\circledast$	Terme
Wiederholung:	
..	Faktoren
$\div$	Brüche
Tschirnhaus:	
$\wp$	gleich
$a \top\!\top\, b \top c \top\!\top\, d$	Proportion