Zum 2. Teil (S. 554)
Zum Inhaltsverzeichnis
Zum Personenverzeichnis
Zum Schriftenverzeichnis
Zum Sachverzeichnis

39. DE PROGRESSIONIBUS ET GEOMETRIA ARCANA ET METHODO TANGENTIUM INVERSA

Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 3–4. 1 Bog. 1°. 4 S. Textfolge Bl. 4 r°, 4 v°, 3 r°, 3 v°. Datum und Überschrift auf Bl. 4 r° oben ergänzt. Geringe Textverluste an einer Ecke und im Falz sind ergänzt.
Cc 2, Nr. 820

Xb. 1674

De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa

Progressiones magnitudinum per crementa infinite parva increscentium aut decrescentium figuris quibusdam geometricis continuo quodam motu descriptibilibus repraesentare interest ad mechanicen quoque; nam et vires et motus, sive temporum spatiorumque relationes crementa habent infinite parva: in quo differunt hae progressiones a progressionibus numericis illis, quae exacte per geometriam repraesentari non possunt.

Exempli causa progressio numerorum triangularium est arithmetica, nam geometrice exprimi non potest; et si tentaveris comperies degenerare in progressionem numerorum quadratorum. At progressio numerorum quadratorum geometrica est simul et arithmetica, nam parabolae ordinatis ad tangentem verticis accurate repraesentatur.

---

9 f. *Rechts*: Adde *Schediasma de calculo elastico*, item schediasma *Methodi tangentium inversae exemplum*, omnia eodem mense.

8 *(1)* No *(2)* Xb. *L* 11 Progressiones *(1)* figurarum *(2)* magnitudinum *L* 13 vires et *erg. L* 15 illis *erg. L* 18 est *(1)*, quia *(2)* simul *L* 22 item schediasma *(1) De (2) Methodi L*

---

17 f. degenerare in progressionem numerorum quadratorum: Die Darstellung der Dreieckszahlen als Parabel $y + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ führt auf die halben Quadratzahlen. 20 f. *Schediasma de calculo elastico*: Cc 2, Nr. 822; schediasma *Methodi tangentium inversae exemplum*: Cc 2, Nr. 832. Auf das vorliegende Stück verweist Leibniz jedoch (außer in Cc 2, Nr. 822) in *De methodo tangentium inversa exemplum* (Cc 2, Nr. 823); alle sind auf Dezember 1674 datiert.

Progressio omnis per regulam quandam constituitur plus minusve simplicem. Quod si geometrica est, extremitates terminorum progredientium desinere intelligentur in locum quendam sive lineam, sive superficiem, sive corpus. Qui locus variis saepe modis exprimi potest, quos interest notari, et ex iis ad descriptionem lineae vel superficiei vel corporis motu continuo faciendam, eligi simplicissimos. Regula progressionis continet vel unam indeterminatam, praeter eam quae ipsos progressionis terminos refert; quo casu locus est ad lineam, vel duas, quo casu est ad superficiem, vel tres, quo casu est ad solidum.

Porro ut nunc de progressionibus ad lineam tantum loquamur: Ordinatae seu termini progressionis ad locum seu lineam desinentes ab una parte, ex altera parte desinunt vel ad rectam, vel ad curvam; idque certa aliqua anguli determinatione; quae infinitis fieri potest modis.

Nimirum rectae ordinatae (nam de c u r v i s   o r d i n a t i s hoc loco non loquor et si id quoque aliquando usum habere possit) definito initio et magnitudine et positione seu inclinatione, ad quandam aliam figuram positione datam definuntur. Sane si dicas omnes rectas datae magnitudinis eiusdem ex puncto uno ductas terminari in circuli circumferentiam non est opus nisi duabus conditionibus quia tertia hoc casu sequitur; nempe rectam illam esse perpendicularem ad curvam ad quam terminatur. Si vero dicas omnes rectas ex puncto dato ductas triangulorum instar crescentes terminari debere in curvam quandam nondum satis dixisti, nisi explices aliud quiddam, scilicet ad quam rectam referas, aut quo angulo velis occurrere vel ipsi curvae, vel alteri lineae in quam certa lege productae

---

10 *Über* rectam: punctum

12 *Über* c u r v i s   o r d i n a t i s : NB.

1 omnis | geometrica *erg. u. gestr.* | per *L*   1 constituitur *(1)*; quae regula aut aequatione aliqua exprimi potest, aut non potest. Si aequatione potest exprimi, figura modo geometrica sit, eo ipso describi potest; potest *(2)* plus *L*   5 faciendam | est *streicht Hrsg.* |, eligi *L*   5 vel *(1)* nullam indeterminatam *(2)* unam *L*   7 lineam, vel *(1)* plures, quo casu est ad superficiem vel corpus. Na *(2)* duas *L*   8 loquamur: *(1)* Lineae a *(2)* Ordinatae *L*   10 punctum *erg. L*   10 curvam; *(1)* angulo aliquo dato, vel eodem si ad rectam, vel vario et *(2)* neque enim explicabo cum ad superficiem hinc ad lineam illinc *(3)* angulo aliquo dato, quare *(4)* idque *L*   11 f. modis. *(1)* Sane si omnes ad unum punctum *(a)* des *(b)* terminantur hinc ad unam lineam illinc, *(aa)* non est *(bb)* opus est ut vel *(2)* Nimirum *(a)* rectarum ordinatarum termino definito *(b)* rectae *L*   15 in *(1)* differentiam, *(2)* circuli *L*   19 explices *(1)*, curvam *(2)* aliud *L*   20 alteri *(1)* rectae *(2)* lineae *L*

terminarentur. Sed et fieri potest, ut non enunties unum angulum, sed ut angulus ipse certo quodam modo varietur; quod est sine dubio complicatissimum sed rarum.

Inter difficillimos etiam casus habendum est, cum postulatur, ut ipsae ordinatae faciant angulum quendam certum aut certo modo crescentem, ad curvam ad quam terminari debent. Exempli causa, si ex puncto quodam ductae ad curvam perpendiculares debeant progredi instar elementorum ∇^{li}; quaeritur curva: Sed rursus hoc diversis modis concipi potest pro diversis scilicet modis dividendi curvam in partes, prout scilicet dividitur curva in partes aequales; aut in partes aequalibus axis partibus per ordinatas (parallelas aliasque) abscissis, respondentes. Porro si calculo explicanda sit relatio, fiet vel per aequationem quandam constantem determinati gradus, aut de gradu in gradum ascendentem, ita tamen ut saltem exponentes sint determinati gradus. Vel denique fiet [per] progressionem replicatam, in qua sequens ordinata supponit praecedentem; continue; et hae progressiones sunt omnium maxime difficiles cum calculo utcunque continuato ne puncto quidem progrediamur, et si figuram per puncta describere velimus futurus sit calculus terminis parumper productis horrendae prolixitatis.

Porro ex omnibus progressionibus eae maxime utiles sunt, quibus commode describuntur figurae geometricae, quales non eae tantum sunt, quibus ordinatae communes explicantur, sed inprimis illae, in quibus poli quidam aut centra adhibentur; aut foci. Sed omnes illae progressionum expressiones quibus describi potest figura analytice ad certam reduci possunt aequationem [ordinatarum] communium et abscissarum.

Fieri potest ut figura geometrice describi possit analytice non possit ut cycloeides; quod tunc sufficit, quando figura analyticam expressionem uniformem respuit, nam etsi circulus et omnes eius partes quadrari possent, cycloeides tamen commodius quam nunc non describeretur; imo contra non aliter describetur methodo uniformi seu motu continuo. Hos ergo describendi modos voco semi-analyticos, quos scilicet ad analyticos reduci pendet a methodo tangentium inversa.

Data ergo quacunque expressione sive progressione per incrementa infinite parva, quaerendus est modus describendi geometricus sive analyticus, sive semi-analyticus. Et

6 instar *(1)* applicatarum trianguli *(2)* elementorum *L* 12 vel *L ändert Hrsg.* 19 figura *(1)* modo *(2)* motu *(3)* solis rectarum *(4)* motum *(5)* a motibus ab unico *(6)* | solis *streicht Hrsg.* | rectarum *(a)* rectili *(b)* linearum intersectionibus *(7)* ad eam reduci possunt quibus *(8)* reduci possunt ad aequationem *(9)* analytice *L* 20 ordinariarum *L ändert Hrsg.* 21 f. non possit *(1)* cum scil *(2)* ut cycloeides; *(a)* et tunc res saepe redibit ad (*aa*) alteram *(bb)* eum methodi casum, *(b)* quod *L* 22 expressionem *(1)* respuit *(2)* perpetuam resp *(3)* uniformem *L* 25 semi-analyticos *(1)*. Nihi *(2)* pendet *(3)*, quos *L*

ex problematibus eiusmodi transcendentibus sunt quaedam quae pendent ex quadraturis et imprimis sunt quae pendent ex curvarum in rectas extensionibus. Itaque tentandum est eo reducere problemata irregularia ut pendeant ex curvarum, v. g. circuli, parabolae, aliarumve in rectas extensionibus; ita solvi poterunt geometrice; seu continuo motu construi loca quorum constructione solvantur. Qualia sunt problemata interpolationum Wallisiana, problemata serierum quarundam convergentium Iac. Gregorii; constructio logarithmorum geometrica Gregorii a S. Vincentio; quae omnia geometrice fieri possunt evolutionibus curvarum aut applicationibus ad plana. NB. aliasve curvas ut si circulum ponas volvi non super plano, sed super curva parabolica; etc. si ponas stylum circumferentiae circuli evolutae non in plano sed superficie sphaerae curvam describere. Adde et superficies in rectum extensas; et corpora, quibus tamen non aeque lubenter ac curvis ad constructiones utar; nisi extrema iubeat necessitas. Quaerenda est ergo ratio problemata irregularia huc semper reducendi; quemadmodum isochronismum penduli ad cycloeidem reduxit Hugenius; et ego mesolabum generale ad trochoeidem parabolicam, cuius unius ope quotcunque inveniri possunt mediae proportionales geometrice, et omnia de rationum compositionibus et divisionibus problemata solvi.

Possunt aliqua problemata adeo esse difficilia, ut utile sit ea certis quibusdam curvis [solvi], quae physica in usum adhibita describuntur, ut vi elastica arcus tensi se restituentis, aliisque id genus artibus. Quomodocunque enim dummodo accurate uno tractu fiat descriptio; immensi calculi et horrendae alioquin necessariae operationes geometricae evitantur. Et vel hinc utile est doctrinam de figuris arcus tensi, de velorum, deque funium

1 transcendentibus *(1)* sive irregu *(2)* sunt *L* 3 f. circuli, | hyperbolae, *gestr.* | parabolae *L* 6 quarundam *erg. L* 9 ponas *(1)* agi circa *(2)* volvi *L* 13 semper *(1)* referendi *(2)* reducendi *L* 15 possunt *(1)* methodi propo *(2)* mediae *L* 18 solvis *L ändert Hrsg.* 19 artibus. *(1)* Ita enim qui *(2)* Quomodocunque *L* 19 accurate *(1)* per omn *(2)* uno

5 interpolationum: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 132–146, 161–165, 193–196 (*WO* I, S. 439–447, 458–460, 476–478) sowie Wallis, *Commercium epistolicum*, 1657, S. 51 (*WO* II, S. 786). 6 serierum: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, u. a. S. 15 ff. u. 23 ff. u. 56 ff. [Marg.]. 6 constructio: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch VI, Prop. 125–130, S. 594–597. 14 reduxit Hugenius: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil 3, prop. VI, S. 67 [Marg.] (*HO* XVIII, S. 201); Leibniz' Handexemplar enthält in der Figur auf der prop. VI gegenüberliegenden S. 66 Ritzspuren und ergänzte Punktbezeichnungen; ego: N. 38_{12} u. *Schediasma de constructione* (Cc 2, Nr. 827), datiert Dezember 1674. 21 de figuris arcus tensi: vgl. u. a. *De vitandis erroribus geometricis in re mechanica* (Cc 2, Nr. 835), datiert Dezember 1674.

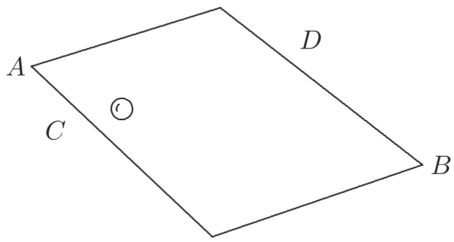
intensionibus ad geometriam reduci; ut hinc appareant exempla casuum per synthesin, ut in aliis oblatis per analysin quaerantur describendi modi. Ita inquiram aliquando exactius in methodum qua demonstravit P. Greg. a S. Vincentio logarithmos esse spatiis [hyperbolicis] proportionales: eadem enim opera aliae methodi ostendentur in casibus similibus problemata irregularia revocandi ad geometricas quasdam constructiones.

San Vincentius revocavit logarithmos ad spatia hyperbolica; (: videndum quod dent circularia, vel elliptica eadem methodo tractata :) Heuratius hyperbolam ad curvam parabolicam; ego curvae sectiones in plano conservo ope trochoidis parabolicae. Ergo iunctis omnibus illis inventionibus inter se inventa est repraesentatio logarithmorum geometrica in plano, ope trochoeidis parabolicae. Horum exemplo igitur quaerenda est aliorum quoque problematum irregularium constructio ope curvarum geometricarum neque enim nunc quidem ad rem pertinet an sit analytica, quando eas construendi rationes profecto analyticis etsi inventae essent praeferremus.

Huc pertinent extensiones in rectum superficierum cylindricarum per plana angulo semirecto aliterque truncatarum, (exemplum in figura sinuum) unde rursus varia curvarum genera; quae omnia ad constructiones adhibita intelligi possunt, quando operae pretium est. Denique ubi variae sunt construendi rationes adhiberi possunt simplicissimae, neque enim refert [an] magis minusve sint analyticae; vel etiam geometricae. Certe si physicae essent, ut fit adhibito elaterio non ideo minus ad usum sufficient; hoc consilio haud dubie spiram ex recto circularique motu compositam ad quadrandum circulum adhibuit Archimedes; et si parabola ope gravis descendentis proiecti describatur, non minus erit utilis, quam si aliter descripta esset, imo erit simplicior et forte exactior.

3 Vincentio *(1)* reduci *(2)* logarithmos *L* 4 parabolicis *L ändert Hrsg.* 5 ad *(1)* casus ex quibus pendent *(2)* geometricas *L* 5 f. constructiones. *(1)* Gregorius *(2)* San *L* 8 ego *(1)* curvas illas in plano *(2)* curvae *L* 18 an *erg. Hrsg.* 20 dubie *(1)* helicem *(2)* spiram *L* 21 proiecti *erg. L*

3 demonstravit P. Greg. a S. Vincentio: s. o. Erl. zu S. 558 Z. 5. 7 Heuratius: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659 (*DGS* I, S. 517–520); ego: N. 38_{11-14} u. Cc 2, Nr. 827–829, alle datiert Dezember 1674. 9 repraesentatio logarithmorum: *a. a. O.* vor allem Cc 2, Nr. 827. 20 f. adhibuit Archimedes: Archimedes, *De lineis spiralibus*, prop. 24; Leibniz erwähnt die archimedische Kreisquadratur mittels der Spirale auch in der *Praefatio opusculi de quadratura circuli arithmetica* (*LMG* V S. 93 f.).



[*Fig. 1*]

Esto tabula inclinata marmorea polita, pone pilam bene tornatam ex C versus D directo ictu proici; pondere autem suo descendere durante motu, curva quam vestigiis suis in tabula nonnihil pulvere aut humore respersa relictis, aliterve signatis describet, sive parabola sit, sive alia, erit multo profecto descripta exactius quam eadem curva descripta instrumento. Inprimis autem descriptiones quae per opticen fieri possunt utiles erunt exacte, cum radii lucis lineas describant perfecte rectas. Operae autem pretium est ex tot variis inquisitionibus edi specimina quaedam prae caeteris utiliora.

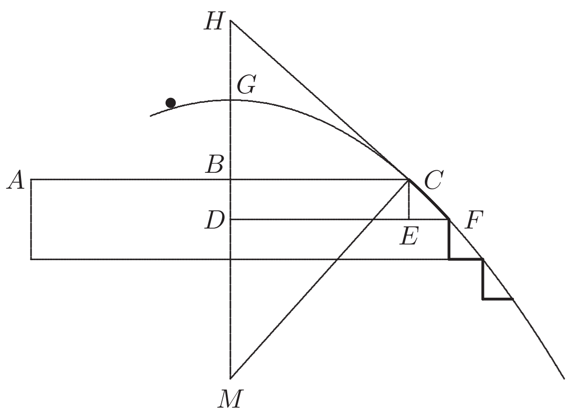
Etiam cum curva quaedam vel superficies in rectum extenditur; considerari potest, quam durante extensionis motu punctum aliquod in ea sumtum describat lineam. Ita inquiri etiam potest, data figura arcus invenire figuram ad quam data tensione reduci possit, et contra, idque saltem in exemplis illustribus.

Separata est summaeque difficultatis doctrina de progressionibus in se replicatis, ubi in valorem unius ordinatae sequentis ingreditur antecedens, et proinde in valorem unius ordinatae ingrediuntur omnes; (: evenit hoc etiam in seriebus convergentibus :).

Cuius ecce exemplum: pone in temporis puncto aliquo seu spatio infinite parvo, B vim adesse quamlibet ut BC sequenti autem temporis spatio BD vim praeter priorem

2 polita *erg. L* 4 aut humore *erg. L* 16 in *(1)* tempore GB vim quaesitam adesse ut *(a)* AB *(b)* AC $\sqcap \alpha + \beta$. posito AB $\sqcap \alpha$ et BC infinite parvam $\sqcap \beta$. *(2)* temporis *L*

2 tabula inclinata: vgl. *De descriptionibus curvarum* (Cc 2, Nr. 831), datiert Dezember 1674.
6 descriptiones ... per opticen: vgl. *Methodi tangentium inversae exemplum* (Cc 2, Nr. 832) u. *De Cartesii ovalibus* (Cc 2, Nr. 833), beide datiert Dezember 1674.



[*Fig. 2*]

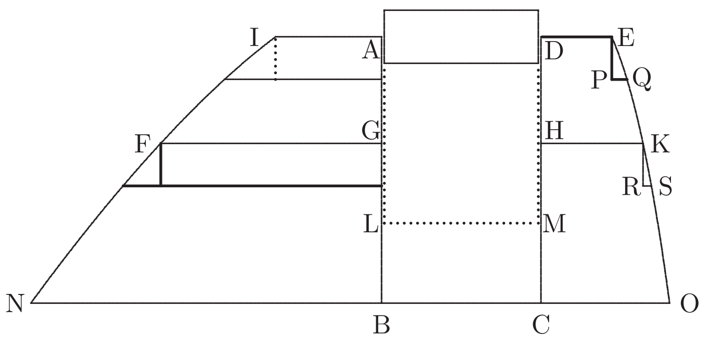
accedere novam, EF eiusmodi ita ut incrementum sit ad vim quandam primam, qua coeptus scilicet est motus $\sqcap \beta$, in reciproca ratione vis praesentis BC, ad β, seu ut β ad BC. Idemque cum in reliquis punctis rectae BD continuatae dici possit; et omnes BC, DF, et sequentes in curvam quandam terminentur, omnes huius curvae ordinatas nomine generali appellemus y, erit ordinata quaelibet sequens $y + \dfrac{\beta^2}{y}$. Quaeritur qualis sit ista curva, et quomodo continuo tractu describi possit; in qua scilicet crementa sint ordinatis reciproce proportionalia. Id ita inquiremus: tangens C axi BD producto occurrat in H. Iam BH appelletur l. et crementum v. g. EF appelletur c. Constat crementum EF

---

8 *Am oberen Rand der Rückseite, mit Hinweisstrich verbunden*: Solutum hic analytice problema: Invenire figuram in qua crementa ordinatis reciproce proportionalia.

2 novam, *(1)* quae sit *(a)* ad vim | proxime *erg.* | praecedentem *(bb)* proxima parte in reciproca ratione *(aaa)* quantitatis β a *(bbb)* summae virium in *(b)* ad vim β, *(aa)* ut *(bb)* in reciproca ratione summae virium *(2)* EF *L* 2 incrementum | infinite parvum, *gestr.* | sit ad vim quandam primam | infinite parvam *gestr.* |, qua *L* 4 punctis *(1)* omnibus dici possit, *(a)* appellando *(b)* ordinatam huius figurae quamlibet *(2)* rectae *L* 5 et *(1)* similes *(2)* sequentes *L* 6 f. ista *(1)* figura, et *(2)* curva *L* 8 producto *(1)* occurrat in *(2)* si opus, *(3)* occurrat *L*

esse ad ordinatam $BC \sqcap y$ ut pars axis $\alpha \sqcap BD, \sqcap CE$, ad productam $BH \sqcap l$. Ergo $\dfrac{c}{y} \sqcap \dfrac{\alpha}{l}$. Ergo $c \sqcap \dfrac{\alpha y}{l}$. Iam idem $c \sqcap \dfrac{\beta^2}{y}$. Ergo $\dfrac{\beta^2}{y} \sqcap \dfrac{\alpha y}{l}$ et $l \sqcap \dfrac{y^2\alpha}{[\beta^2]}$. Iam ex puncto C ducatur perpendicularis CM, quae axi BD reducto si opus occurrat in M, rectam BM appellemus p. Constat generaliter esse $p \sqcap \dfrac{y^2}{l}$, seu $\dfrac{BC^2}{BH}$ ob angulos CBM, et HCM rectos. Iam $l \sqcap \dfrac{y^2\alpha}{[\beta^2]}$. ergo $p \sqcap \dfrac{y^2}{\dfrac{y^2\alpha}{[\beta^2]}} \sqcap \dfrac{[\beta^2]}{\alpha}$. Hinc sequitur ipsam BM reductam esse perpetuo eandem, ubicunque sumatur punctum in curva; ac proinde curvam CF esse parabolam; quod et verum esse calculus ostendet per synthesin. Nam reperietur: crementa ordinatarum parabolae ad axem esse ipsis ordinatis reciproce proportionalia quod desiderabatur.



[*Fig. 3*]

---

5 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{y^2}{\alpha} \sqcap l$. $\alpha + \beta + \dfrac{1}{y}$

10 *Unter Fig. 3*: Vide huc pertinentia *Schediasmate de calculo elastico* Xb. 1674.

1 ut *(1)* recta quaedam constans CE $\sqcap$ *(2)* pars *L* 2 β *L ändert Hrsg.* 5 β *L ändert Hrsg. dreimal.*

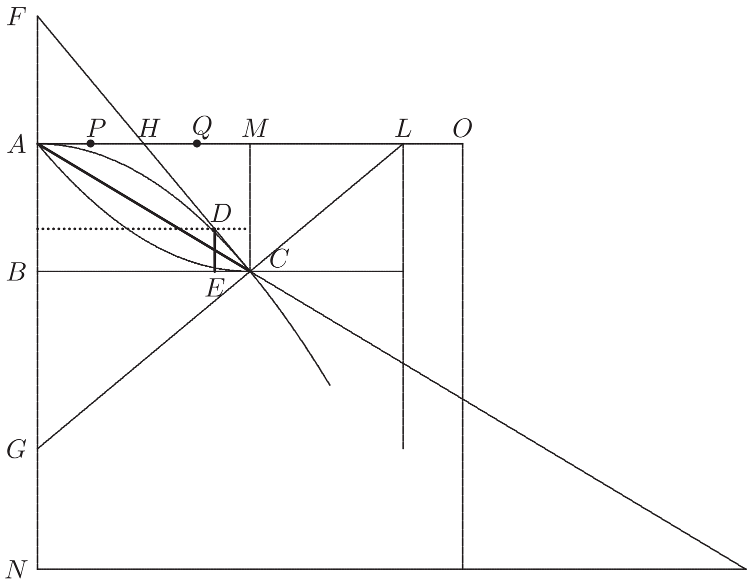
---

10 *Fig. 3*: Die (nicht wiedergegebene) Verbindungslinie *DR* hat Leibniz gestrichen. 12 *Schediasmate de calculo elastico*: Cc 2, Nr. 822.

Eodem modo inveni subtilissimo (ausim dicere) calculo vim si in vas cylindricum $ADBC$ embolus exacte respondens concavitati oris vasculi ita intrudatur, ut aer qui antea totum vas repleverat intrudatur in spatium $LBCM$ posteaque emota vi intrudente libertas aeri detur restituendi sese; et in quolibet restitutionis loco ut GH vis elaterii qua porro nititur, tum ab ipso elaterio perseverante orta, tum et acceleratione genita recta FG curvae cuiusdam IFN, virium quaesitarum in quolibet spatii puncto progressionis repraesentantis; ordinata esse intelligatur; inveni inquam curvam eius fore naturae, ut ordinatae sint quadratorum suorum crementis reciproce proportionales, sive si alia descripta intelligatur figura EKO cuius ordinatae DE, HK etc. sint proportionales [quadratis] ordinatarum respondentium AI, GF, seu in ratione ordinatarum respondentium duplicata. Crementa autem ordinatarum DE, HK etc., nempe PQ, RS, sint ipsis AI, GF reciproce proportionales; curva ergo IFN, quae hoc praestabit, erit quaesita. Unde intelligi potest, quanti sit momenti haec inquisitio. Curva autem ista qualis sit, et an omnino analytica sit, ex earum scilicet numero, quarum puncta omnia relatione ad certam quandam rectam assumtam calculo expressa definiri possint; nondum definire possum. Est autem ista inquisitio pars methodi tangentium inversae.

Esto curva AC, tangens $CDHF$, ordinata BC, crementum EC, producta (axis dum tangenti ocurrat[)] BF, producta reciproca [HM], curvedo CD perpendicularis CG, perpendicularis reciproca CL, tangens reciproca CH, ordinata reciproca MC, abscissa AB, abscissa reciproca AM, directrix AN indefinita; DE intervallum[,] directrix reciproca, AO, indefinita. Iam generaliter abscissa est aequalis ordinatae reciprocae et contra. Crementum est aequale intervallo reciproco et contra. $\frac{CM}{HM} \sqcap \frac{AF}{AH} \sqcap \frac{FB}{BC}$. Ergo $CM, \frown BC \sqcap FB, \frown HM$ ergo rectangulum sub abscissa et ordinata aequatur rectangulo sub producta et producta reciproca.

1 f. si *(1)* vas cylindricum aëre *(2)* in vas cylindricum *(a)* aer *(b)* ADBC *(aa)* operculum exacte ostium implens *(bb)* embolus *L* 4 vis *(1)* aeris *(2)* elaterii *L* 5 tum *(1)* a novo *(2)* ab *L* 5 genita *(1)* ordinata FG *(2)* recta *L* 7 f. ut *(1)* crementa ordinatarum sint ipsis ordina *(2)* ordinatae sint *(a)* differentiis *(b)* quadratorum ipsarum ordinatarum crementis recipro *(c)* quadratorum *L* 8 proportionales, *(1)* seu *(a)* $\frac{PQ}{R}$ *(b)* $\frac{PQ}{RS} \sqcap {}^{A}$ *(2)* sive *L* 9 f. EKO *(1)* quadratis *(2)* cuius ordinatae *(a)* sint proportionales ordinatis *(b)* DE, HK etc. sint proportionales | quadratis *erg. Hrsg.* | ordinatarum *L* 10 ratione ordinatarum *(1)* duplicata *(2)* dictarum qua *(3)* respondentium *L* 12 quaesita. *(1)* Breviter ergo quaerenda est curva, in qua *(a)* crementa *(b)* ordinatae sint in *(2)* Unde *L* 18 CH *L ändert Hrsg.* 21 DE intervallum *erg. L*



[*Fig. 4*]

Innumera alia id genus theoremata condi possunt, maximo usu ad geometriam, dum scilicet ex quibusdam datis aliae investigantur, quot licet modis, variisque modis inde ortae aequationes transformantur. Porro ex data relatione inter abscissam et ordinatam caeterae omnes facile calculantur. Itaque id unum agitur ut ex data alia relatione detur relatio abscissae et ordinatae. Data relatione ⟨productae⟩ ad ordinatam datur relatio productae reciprocae ad ordinatam reciprocam seu ad abscissam. Dari relationem AH ad HM idem est quod dari relationem productae reciprocae ad ordinatam. In nostro exemplo data relatione BG ad BC quaeritur figura seu curva, seu relatio BC ad AB. Datur ergo et relatio FB ad BC. Ergo relatio DE rectae constantis ad crementum EC, nempe in nostro casu $BG \sqcap \dfrac{1}{BC}$. Iam $\dfrac{BG}{BC} \sqcap \dfrac{CE}{1}$. Ergo $\dfrac{BG}{\cancel{BC}} \sqcap \dfrac{CE}{BG \frown \cancel{BC}}$. Ergo $CE \sqcap \dfrac{BG^2}{1}$. Ergo

4 ex *(1)* datis abscissa et ordinata *(2)* data *L* 5 ex *(1)* datis aliis relationibus dentur relationes *(2)* data *L*

1 *Fig. 4*: Den von ihm zunächst mit N bezeichneten Schnittpunkt der Verlängerung von AC mit der Grundlinie hat Leibniz später gestrichen, ebenso die hier wiedergegebene Parallele zu AG durch L; im Bereich der unteren Hälfte dieser Linie ist die Handschrift schadhaft.

pro BG substituendo $\sqrt{CE}$, fiet $CE \sqcap \frac{\sqrt{CE}}{BC}$ sive $CE^2 \sqcap \frac{CE}{BC^2}$, sive $CE \sqcap \frac{1}{BC^2}$. Unde demonstratur crementa figurae propositae esse in ordinatarum ratione reciproca duplicata; at differentiae semiquadratorum ordinatarum ($\sqcap BG$) sunt in ordinatarum ratione reciproca ut initio dixi; videamus ergo an iunctis his duobus theorematis inter se, exitus haberi possit: Nimirum sunto duae ordinatae: BC, et $BC + CE$ sive BC et $BC + \frac{1}{BC^2}$[,] semiquadratum ab uno $\frac{BC^2}{2}$, semiquadratum ab altero $\frac{BC^2 + 2BC \frown \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BC^4}}{2}$, sive $\frac{BC^2}{2} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{BC^4}$[,] crementum semiquadratorum $\frac{1}{BC} + \frac{1}{BC^4} \sqcap BG \sqcap \frac{1}{BC}$ absurdum. Foret enim $\frac{1}{BC^4} \sqcap 0$. Error ergo admissus inter calculandum. Satis tamen manifestum est his inter se iunctis theorematis non posse sic quidem exitum haberi, cum nondum calculum ingressa sit abscissa, ad quam tamen relatio ipsius BC quaeritur. Resumto calculo $BG \sqcap \frac{a^2}{BC}$ ex hypothesi deinde $\frac{BG}{BC} \sqcap \frac{CE}{ED \sqcap \beta}$. (Nam adicere $BG \sqcap \frac{BC^2 + 2BC \frown CE + CE^2}{2}$ inutile, satis enim video hic restitui debere quae in condendo eiusmodi theoremate negliguntur, quoties calculo ad infinite parva descenditur. Unde patet NB. non sufficere aliquando nosse theoremata ad calculum, nisi et eorum origo nota sit.) Nihil autem novi hinc deduci posse, sed aequationem sub finem fore identicam patet, quia alioqui tribus aequationibus duae ex incognitis tollerentur, tertiaque

1 $\frac{1}{\mathrm{BC}^2}$ *(1)* quod est id quod dixi crementa esse *(2)*. Unde *L* 4 ut initio dixi *erg. L* 5 ordinatae: *(1)* y. et *(a)* $\mathrm{y} + \beta$. *(b)* $\mathrm{y} + \gamma$. *(2)* BC *L* 11 hypothesi | deinde *erg.* | $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BC}} \sqcap \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED} \sqcap \beta}$. *(1)* ac denique $\mathrm{BG} \sqcap \frac{\mathrm{BC}^2 + 2\mathrm{BC} \frown \mathrm{CE} + \mathrm{CE}^2 - \mathrm{BC}^2}{2} \sqcap \frac{\mathrm{BC} \frown \mathrm{CE} + \mathrm{CE}^2}{2}$ quae duae posteriores aequationes sunt generales et locum habent in figura qualibet: Quod si ergo *(a)* quaeramus valorem ipsius *(b)* elidere velimus: BG et BC. restabit sola CE, itaque $\frac{\alpha^2}{\mathrm{BC}^2} \sqcap \frac{\mathrm{CE}}{\beta}$. item $\frac{\alpha^2}{\mathrm{BC}} \sqcap \mathrm{BC} \frown \mathrm{CE}, + \frac{\mathrm{CE}^2}{2}$. Ex priore fiet: *(2)* (Nam *L*

7 $+\frac{1}{BC^4}$: Richtig wäre $+\frac{1}{2BC^4}$; der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

residua absolute explicari posset, neque esset indeterminata quod est absurdum: Cumque relatio ipsius BG ad ipsam AB quaeratur, iudicatu facile est, sic haberi non posse, cum AB non ingrediatur calculum. Tentandum ergo an aliqua arte effici possit, ut in calculum intret.

Nimirum ut AB ad BC, ita FA seu $FB - AB$ ad AH. Demonstratum est a me alibi summam omnium AH aequari segmento $ACDA$ duplicato. Ergo summa omnium HM aequatur spatio exteriori $AMCDA$, itaque si ad omnes HM addantur omnes $PH (\sqcap \dfrac{AH}{2})$ idem est ac si spatio $AMCDA$ adderetur segmentum $ACDA$ unde fiet triangulum AMC vel ABC seu semirectangulum sub abscissa et applicata. Igitur $PM \sqcap BC - \dfrac{AH}{2}$ ducta in $DE \sqcap \beta$, seu βPM, aequatur differentiae inter $\dfrac{AB \frown BC}{2}$, et $\dfrac{AB - DE, \frown BC - EC}{2}$ sive $\beta \frown PM \sqcap \dfrac{\boxed{AB \frown BC - AB \frown BC} - DE \frown BC, -AB \frown EC + DE \frown EC}{2}$. Iam $PM \sqcap BC - \dfrac{AH}{2}$. et $DE \sqcap \beta$. Ergo $2\beta BC - \beta AH \sqcap -\beta BC - AB \frown EC + \beta EC$, cumque $\beta \frown EC$ negligi possit, fiet: $-3\beta BC + \beta AH \sqcap AB \frown EC$. Est autem $\dfrac{AH}{FB - AB} \sqcap \dfrac{BC}{AB}$. sive $AH \sqcap \dfrac{BC, \frown FB - AB}{AB}$. et $FB \sqcap \dfrac{BC^2}{BG}$. Ergo $AH \sqcap \dfrac{BC}{AB}, \frown \dfrac{BC^2}{BG} - AB$. Idemque $AH \sqcap \dfrac{AB \frown EC + 3\beta BC}{\beta}$. fiet ergo aequatio inter $\dfrac{BC^3, -AB^2 \frown BG}{AB \frown BG}$ et $\dfrac{AB \frown EC + 3\beta BC}{\beta}$, sive inter: $BC^3\beta - AB^2, BG, \beta \sqcap AB^2, EC, BG + 3\beta BC, AB, BG$. Pro BG substituatur $\dfrac{a^2}{BC}$. fiet: $BC^3\beta - AB^2, \dfrac{a^2}{BC}, \beta \sqcap AB^2, EC, \dfrac{a^2}{BC} + 3\beta BC, AB, \dfrac{a^2}{BC}$ sive multiplicatis omnibus per BC fiet: $BC^4\beta - AB^2, a^2\beta \sqcap AB^2, EC, a^2 + 3\beta BC, AB, a^2$.

---

5 ut AB ad BC: Richtig wäre $FB : BC = FA : AH$; der Fehler tritt in Z. 13 wieder auf und beeinträchtigt zusammen mit weiteren Fehlern in Z. 11 (beim Ergebnis der Subtraktion sind die Vorzeichen vertauscht) u. Z. 15 (statt $BC^3 - AB^2 \cdot BG$ müßte $BC^3 - AB \cdot BC \cdot BG$ im Zähler des mittleren Bruches stehen) sowie in S. 567 Z. 4 (beim Term $-a^2y^3x$ fehlt der Faktor 3) u. S. 567 Z. 15 (im Nenner des Bruches fehlt der Term $+a^2y^3x$) die Überlegung bis S. 567 Z. 18. 5 Demonstratum est: vgl. u. a. *LQK*, prop. VII, S. 33–35; zur Entstehungsgeschichte des Transmutationssatzes im Anschluß an Cc 2, Nr. 545/6 vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926 S. 34–37 und die Erl. zu *Inventa aliquot mea geometrica*, [Sommer 1674], *LSB* III, 1 N. 29 S. 115.

Iam supra $CE \sqcap \frac{\beta BG}{BC}$ ergo $CE \sqcap \frac{\beta a^2}{BC^2}$. Unde inserendo hunc valorem fiet: $BC^6\beta - AB^2, a^2\beta, BC^2 \sqcap AB^2\beta a^4 + 3\beta BC^3 ABa^2$. Unde BC appellando y, et AB appellando x, fiet:

$$y^6 - a^2y^3x - a^2y^2x^2 - a^4x^2 \sqcap 0.$$

Ut facilius appareat an dividi possit, ordinetur secundum a, fiet:

$$a^4 + \frac{y^3 + y^2x}{x}a^2 - \frac{y^6}{x^2}.$$

Necesse est ergo dividi posse aut per $a^2 \mp \frac{y^4}{x^2}$, aut per $a^2 \mp \frac{y^3}{x}$. Sin ordinetur secundum y, necesse est si dividi potest dividi posse per $y^4 \mp a^2x^2$, vel $y^3 \mp a^2x$ vel denique si ordinatur secundum x, fiet: $x^2 \quad \frac{+y^3\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}y^2 + a^{\cancel{4}2}}x \quad \frac{-y^6}{a^2y^2 + a^4}$ quo casu solus ex prioribus divisoribus tentandis restat: $x \mp \frac{y^3}{a^2}$. Multiplicetur per $x + b$. fiet: $x^2 \mp \frac{y^3}{a^2}x \mp \frac{y^3b}{a^2}$. Unde conferendo:
$\qquad\qquad\qquad\qquad + b \;\; ..$

$b \sqcap \pm\frac{y^3}{y^2 + a^2}$ et fiet: $\frac{\mp\cancel{y^3}}{a^2} \pm \frac{\cancel{y^3}}{y^2 + a^2} \sqcap \frac{\cancel{y^3}}{y^2 + a^2}$, sive $\mp y^2 \boxed{\mp a^2 \pm a^2} \sqcap a^2$. Quod est absurdum. Ergo nullum habet aequatio inventa divisorem rationalem. Aequatione ergo ad tangentes ordinata fiet:

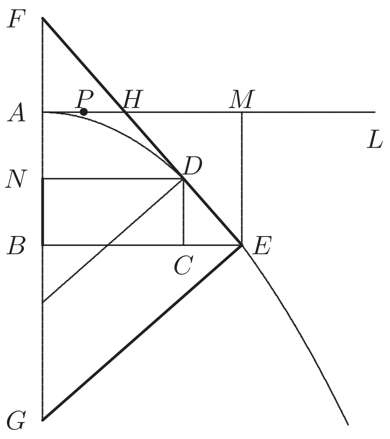
$$6y^6 - 3a^2xy^3 - 2a^2x^2y^2 \sqcap + \quad 2a^4xl + a^2y^3xl, \text{ et fiet : } l \sqcap \frac{6y^6 - 3a^2xy^3 - 2a^2x^2y^2}{2a^4x + 2a^2y^2x}.$$
$$+ 2a^2y^2 ..$$

Iam $l \sqcap \frac{y^4}{a^3}$ unde fieret $6y^4a - 3a^3xy - 2a^3x^2 \sqcap 2a^2xy^2 + 2y^4x$. quae aequatio eadem esse deberet cum superiore $y^6 - a^2y^3x - a^2y^2x^2 - a^4x^2 \sqcap 0$. quod cum sit absurdum, signum est calculi falsi. Ut tamen appareat an methodus ista valeat ad methodum tangentium

4 f. $\sqcap$ 0. *(1)* Dividatur per y^2 *(2)* Ut *L* 8 si dividi potest *erg. L* 9 secundum x, *(1)* necesse est dividi posse per *(2)* fiet: *L*

1 Iam supra: s. o. S. 565 Z. 11. 5 Ut facilius appareat: Das Verfahren zur leichteren Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung durch wiederholtes Umordnen wird in *Schediasma de divisionibus*, dat. Dez. 1674 (*LSB* VII, 1 N. 143) aufgegriffen.

inversam; ideo aliud exemplum quaeram, in quo constat de solutione: Nimirum quaeramus figuram, in qua crementa ordinatis reciproce proportionalia; inventum est figuram esse parabolicam, sed investigandum hoc per eam qua nunc usus sum, analysin.



[*Fig. 5*]

$CE \sqcap \frac{a}{BE}\beta \cdot \frac{FB}{BE} \sqcap \frac{\beta}{CE} \sqcap \frac{\beta}{\frac{\alpha\beta}{BE}} \sqcap \frac{BE}{a}$. Ergo $FB \sqcap \frac{BE^2}{a}$. Iam $\underbrace{FB - AB}_{FA}$ ad $AH \sqcap FB$ ad BE. fiet: $\frac{BE^2}{a} - AB$ ad $AH \sqcap \frac{BE^2}{a}$ ad $BE \sqcap BE$ ad a, sive $AH \sqcap \frac{a, \frown \frac{BE^2}{a} - AB}{BE} \sqcap BE - \frac{ABa}{BE}$. Iam $2PM\beta \sqcap AB \frown BE,,-,BE - CE, \frown AB - \beta$ sive $\sqcap$ $\boxed{AB \frown BE - BE, AB} + BE\beta + CE, AB - CE\beta$, sive $2PM\beta \sqcap BE\beta + \frac{aAB\beta}{BE} - \boxed{\frac{a\beta^2}{BE}}$

1–3 *Dazu, später ergänzt:* $d\overline{y} \sqcap \frac{a}{y}$. Ergo $yd\overline{y} \sqcap a$. Ergo $y^2 \sqcap xa$. $\frac{y}{y+\beta} \sqcap$ [*bricht ab*]

2 inventum est: vgl. Cc 2, Nr. 832 (s. o. Erl. zu S. 555 Z. 20 f.).

sive $2PM, BE \sqcap BE^2 + aAB$. et $PM \sqcap \dfrac{BE^2 + aAB}{2BE}$. Iam $PM \sqcap \dfrac{2BE - AH}{2}$. et $AH \sqcap \dfrac{BE^2 - ABa}{BE}$ ergo $PM \sqcap \dfrac{2BE^2 - BE^2 + ABa}{2BE} \sqcap \dfrac{BE^2 + ABa}{2BE}$ quae aequatio identica est, et forte servire potest ad theorema nostrum non detecta origine demonstrandum. Sed ad methodum tangentium inversam nihil inde opis esse video saltem in hoc exemplo[,] an tamen in alio res procedere possit, non determino, quia scio esse aliquas methodos quae in parabola ob nimiam eius simplicitatem non procedant. Imo repetito brevius calculo superiore, vidi sic quoque rediri denique ad identitatem. Nam retenta figura novissima $BG \sqcap \dfrac{a^2}{BE}$. Iam $\dfrac{CE}{DC \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BG}{BE} \sqcap \dfrac{a^2}{BE^2}$ sive $CE \sqcap \dfrac{a^2\beta}{BE^2}$. Pone $ML \sqcap BE$. Constat ex superioribus summam omnium HL aequari rectangulo $ABEM$ (quia omnes HM aequantur figurae $AMEDA$ et omnes ML seu BE, figurae $ABEDA$). Ergo $HL \sqcap BE + HM \sqcap$ differentiae inter $BE \frown AB$, et BC vel $[ND] \frown AN$. Est autem $\dfrac{HM}{EM \sqcap x \sqcap AB} \sqcap \dfrac{BE}{FB} \sqcap \dfrac{BG}{BE} \sqcap \dfrac{a^2}{BE^2}$. Ergo $HM \sqcap \dfrac{a^2x}{BE^2}$ ergo $BE\beta + \underset{\dfrac{a^2x\beta}{BE^2}}{\boxed{HM\beta}} \sqcap BEx$ demto $BE - \dfrac{a^2\beta}{BE^2}$, $\frown x - \beta$ seu demto $BEx - \dfrac{a^2\beta}{BE^2}x - BE\beta + \boxed{\dfrac{a^2\beta^2}{BE^2}}$. Ergo fiet $BE\beta + \dfrac{a^2x\beta}{BE^2} \sqcap \boxed{BEx - BEx} + \dfrac{a^2\beta x}{BE^2} + BE\beta$ quae aequatio identica est signum elegans veritatis theorematum quibus usi sumus; sed nihil inde novi duci potest. Habet problema propositum illud praeterea difficillimum ut ne quidem ad aequationem quatuor incognitarum quae determinatione duplici ad duas radices aequales reducatur ad duas denique indeterminatas, resolvi possit. Una ergo superest via tentanda, quam nunc exponam.

3 est, *(1)* neque inde quicquam duci posse putem, *(2)* et *L* 4 f. an *(1)* forte *(2)* tamen *L* 6 procedant. *(1)* Sed *(2)* Tamen *(3)* Imo *L* 9 f. HM | aequantur *streicht Hrsg.* | aequantur *L* 11 BD *L ändert Hrsg.* 16 Habet *(1)* hoc theorema *(2)* problema *L* 17 aequationem *(1)* trium *(2)* quatuor *L* 18 duplici *erg. L*

6 f. calculo superiore: s. o. S. 565 Z. 11.

⟨In⟩ problemate proposito quaeritur figura, cuius ordinatis appellatis y. productae sint $\dfrac{y^3}{a^2}$. An autem possibile sit figuram analyticam reperiri quae satisfaciat, ita indagabimus: Sumamus aequationem generalem, quae in infinitum continuata comprehendat figuras analyticas possibiles omnes; continuemus nunc quidem usque ad 4$^{\text{tum}}$ gradum, ut sit:

$$bx^4+cx^3y+dx^2y^2+exy^3+fy^4+agx^3+ahx^2y+akxy^2+aly^3+a^2mx^2+a^2nxy+a^2py^2+a^3qx+a^3ry+a^4s \sqcap 0.$$

et ordinando ad tangentes fiet:

$$\begin{array}{cccccccc} 4bx^3t+ & 3cyx^2t+ & 2dy^2xt+ & ey^3t \sqcap & -4fy^4- & 3ex\ \ y^3- & 2dx^2y^2- & cx^3y \\ +\,3ag\ldots & +\,2ahy\ .. & +\ aky^2. & & & -3al\ \ldots & -2akx\ .. & -\ ahx^2\ . \\ & +2a^2m\ .. & +a^2ny\ \ . & & & & -2a^2p\ .. & -a^2nx\ \ . \\ & & & & & & & -\ a^3r\ \ . \end{array}$$

eritque $t \sqcap \dfrac{y^3}{a^2} \sqcap$
$$\begin{array}{cccc} -4fy^4- & 3ex\ y^3- & 2dx^2y^2- & cx^3y \\ & -3al\ldots & -2akx\ .. & -\ ahx^2\ . \\ & & -\,2a^2p\ .. & -a^2nx\ \ . \\ & & & -\ a^3r\ \ . \end{array} \smile \begin{array}{cccc} 4bx^3+ & 3cyx^2+ & 2dy^2x+ & ey^3 \\ & +3ag.. & +\,2ahy\ . & +\ aky^2 \\ & & +2a^2m\ . & +a^2ny \end{array}$$

quae aequatio reducta eadem esse debet cum prima. Quodsi fieri non potest, ut singulis terminis cum singulis comparatis et literis quibusdam destructis, ut similes reddantur aequationes potest per multa examina iudicari. Tunc sequitur figuram quaesitam neque primi neque secundi neque tertii neque quarti gradus esse posse. Si t. ponatur $\sqcap \dfrac{y^2}{a}$. non difficulter invenietur figuram esse parabolam. Sed si sit $\dfrac{y^3}{a^2}$. omnia difficiliora. Duo hic inquirenda sunt, primum an compendiose definiri queant figurae aptae si quae sunt, ne

1 f. productae *(1)* sint axis *(2)* sint *L* 2 figuram *(1)* geometricam *(2)* analyticam *L* 5 f. sit: *(1)* $ax^4+bx^3y+cx^2y^2+rdx^3+rex^2y+rfxy^2+r^2gx^2+r^2hxy+r^2ky^2+r^3lx+r^3my+r^4n \sqcap 0.$ | Unde ordinando ad productam axis x, fiet: *streicht Hrsg.* | $4ax^3p+3byx^2p+2cy^2xp+rfy^2p$ *(2)* bx^4+cx^3y+
$$\begin{array}{ccc} +\,3rd\ \ldots & +\,2rey\ .. & +\,r^2hy. \\ & +\,2r^2g\ .. & +\,r^3l\ \ . \end{array}$$
$dx^2y^2+exy^3, +afx^3+agx^2y+ahxy^2, +$ *(3)* bx^4 *L* 13+17 $+ey^3$ *(1)* et multiplicando per crucem *(2)* quae *L* 19 figuram *(1)* datam *(2)* quaesitam *L* 20 posse. *(1)* Et videnda hic *(2)* Si *L* 21 omnia | paulo *gestr.* | difficiliora. *(1)* Quod *(2)* Duo *L*

nimis multis opus sit examinibus; deinde an ratione quadam certa diudicari possit; si in his gradibus res non procedit, processura sit in altioribus. Interim in iis fateor exemplis, in quibus methodus tangentium inversa per determinationem formulae propositae ad duas radices aequales absolvi potest, exitus citius invenitur; neque tentando.

Rem autem quia calculi est prolixioris alibi absolvemus: Quid vero si constet nullam figuram analyticam succedere, et quaestio sit an non aliqua geometrica transcendens inveniri possit, quemadmodum aliqua ex trochoeidum genere aut volutarum, aut helicum.

Habemus aut habere possum indices ac velut formulas omnium figurarum geometricarum, quaerendum an possibile sit formulas quasdam quasi analyticas dare figurarum transcendentium.

Quod duplici modo fieri potest, uno breviore sed minus perfecto; altero tam prolixo sed tam perfecte analytico quam possibile est arte humana. Modo minus perfecto, dum praeter duas indeterminatas x. et y. tertia adhibetur portio scilicet quaedam curvae in rectam si placet extensae, quae appelletur ω.

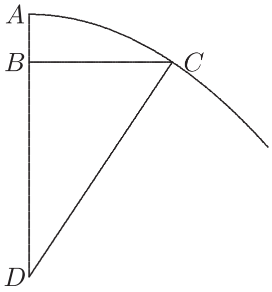
Ita analytice cycloeides, trochoeides, aliaeque figurae explicari possunt. Potest et fieri ut plures una curvae adhibeantur, ad quarum portiones referenda sit curva proposita; eaeque erunt aut a se invicem independentes; aut dependebunt a se invicem; et vel analytice vel semianalytice per methodum scilicet tangentium inversam, perfectam aut imperfectam. Quodsi analytice a se invicem dependent duae curvae ad unam ω reduci possunt sin semianalytice reducentur quidem omnia ad unam curvam, sed si methodus tangentium inversa est perfecta accedet alia adhuc recta incognita quae eliminari posset, si posset determinari aequatio ad duas aequales radices geminate. Sed si per gradus methodo cuius hic et alibi specimen dedi res sit resolvenda; tunc fateor omnia ad unam curvam reduci non poterunt.

Quod si iam illam ipsam quoque curvam elidere velimus; tunc designatio adhibebitur tam perfecta quam fieri potest. Nimirum per methodum tangentium inversam perfectam

3 per *(1)* aequationes *(2)* determinationem *L* 4 f. tentando. *(1)* Quodsi iam *(2)* Rem *L* 7 f. helicum. *(1)* Tunc scilicet praeter duas incognitas *(2)* Ut ergo *(3)* Habemus *L* 9 sit *(1)* addere indices form *(2)* formulas *L* 20 semianalytice *(1)* possunt *(2)* reducentur *L* 22 duas *(1)* rectas *(2)* aequales *L* 25 velimus; *(1)* accedet rect *(2)* tunc *L*

5 alibi absolvemus: vgl. *De methodo tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium* (Cc 2, Nr. 839). 23 alibi specimen dedi: vgl. Cc 2, Nr. 823 und 824.

inquiretur in eius curvae longitudinem; et ita habebitur aequatio duarum incognitarum capitalium, sed unius duarumque praeterea intervenientium, eliminandarum determinatione ad duas radices aequales.



[*Fig. 6*]

Exemplo utamur cycloeidis: Esto curva cuius ordinata $\sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Eius quaeritur quadratura id est quaeritur curva AC, cuius [reducta] $BD \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Erit $\dfrac{a^4}{a^2-x^2} + y^2 \sqcap s^2$. appellando $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $BD \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. et $CD \sqcap s$. Fiet aequatio: $a^4 + a^2y^2 - x^2y^2 \sqcap a^2s^2 - s^2x^2$. in qua aequatione tam x. quam y. duas habent radices aequales. Inventa y. erit arcubus circuli seu elementis cycloeidis (demtis sinubus) respondentibus proportionalis. Cum autem impossibile sit invenire figuram analyticam circuli quadratricem, ut alibi demonstravi, ideo nec poterit solvi hoc problema per determinationem ad duas radices aequales. Tantum ergo ipsis x. et y. signum adscribendum est quo significetur habere tam unam quam alteram duos valores aequales; et ita analytice quantum possibile est expressa est aequatione figura circuli quadratrix, homogenea arcubus, geometrica sed non perfecte analytica. Rectius forte ipsi s. circumdabitur signum, quo intelligatur esse minimam seu proinde ea conditione accedente debere eliminari et fiet: $a^4 + a^2y^2 - x^2y^2 \sqcap a^2 s^2 - x^2 s^2$.

1 aequatio *(1)* trium et quat *(2)* duarum *L* 5 utamur *(1)* in cissoeide: *(2)* cycloeidis: *L* 6 cuius *(1)* ordinatae *(2)* | reductae *ändert Hrsg.* | BD *L* 10 analyticam *erg. L*

11 ut alibi demonstravi: vgl. u. a. Cc 2, Nr. 1102, zweite Propositio und *LQK*, prop. LI S. 127 f.

Ipsius autem y. quadratorum dimidiatorum figura erit perfecte arcuum circuli summatrix, ergo pro $\frac{y^2}{2}$. ponamus za. fiet $y^2 \sqcap 2za$. et fiet: $a^4 + 2a^3z - 2x^2az \sqcap a^2\, s^2 - x^2\, s^2$. et figura omnium z. erit arcuum summatrix. Et $z \sqcap \frac{a^2\, s^2 - x^2\, s^2 - a^4}{2a^3 - 2ax^2}$. cui si addatur $\sqrt{a^2 - x^2}$. sinus circuli, ponendo scilicet n. elementum cycloeidis valere $z + \sqrt{a^2 - x^2}$, tunc inquam fiet:

$n \sqcap \frac{a^2\, s^2 - x^2\, s^2 - a^4 + 2a^3\sqrt{a^2 - x^2} - 2ax^2\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^3 - 2ax^2}$. in qua aequatione tam x. quam n. duos habent valores aequales: Idque ob s. duplicato circulo inclusam subintelligendo perfecta quantumlicet habebitur designatio cycloeidis per analysin. Quod si iam cycloeidis perpendiculares quaerantur; videndum est, an per analysin istam eae possint haberi, quemadmodum inveniuntur facile per geometriam, tunc autem determinanda sunt omnia ad tres radices aequales, ut ex calculo patet, facta scilicet inquisitione in tangentes Cartesii more per duas radices aequales. Quod an succedat, et an hoc omnia de cycloeide praestari possint quae per geometriam communem; (et per consequens multa alia) vicissim an alia problemata constructu difficilia difficultatesque id genus reduci possint ad cycloeidem; videndum est et quod ad novissimum attinet, analysis ostendit viam. Nam ipsa s. velut tertia indeterminata cogitanda est, et locus ad cycloeidem erit velut locus ad superficiem seu tres indeterminatas. Igitur formulis trium incognitarum explicabuntur curvae transcendentes, instar superficierum. Sed restant facienda; nimirum (1) eligendum quando illae formulae pendent ex curvae in rectum extensione, potius quam ex quadratura, (2) videndum an et quando quadraturae et alia talia problemata reduci possint ad curvarum in rectum extensiones, (3) videndum an et quibus modis difficultas reduci possit ad seriem numerorum rationalium; seu quando figurae datae quadrandae alia exhiberi possit analytica rationalis aequivalens, (4) an hoc modo per summas numerorum rationa-

1 f. arcuum *(1)* quadratrix *(2)* summatrix *L* 4 circuli, *(1)* tunc perfecte fiet: ae *(2)* ponendo *L* 8 quantumlicet *erg. L* 11 patet, *(1)* nova scilicet adhibita incognita *(2)* facta *L* 17 indeterminatas. *(1)* Videndum ergo an ex formulis istis ad *(2)* Igitur *L* 20 an et *erg. L* 23 possit *(1)* geometrica *(2)* analytica *L*

12 Cartesii more: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 40–50 [Marg.] (vgl. *DO* VI S. 413–424).

lium semper problemata ista solvi possint, etsi non constructionibus generalibus, (5) an difficultas quadraturae semper reduci possit ad simplicissimae quadraturam figurae, vel simplicissimae curvae in rectum extensionem, (6) exemplo logarithmorum inquirendum quomodo figurae transcendentes non replicatae ((quae methodo mea ex methodo tangentium [inversa] (sed plerumque imperfecta,) pendent,)) sed gradu aequationis continue variantes ad figuras geometricas sive etiam analyticas quadrandas possint reduci cum et figura angulorum possit in exemplum valere.

5 inversa *erg. Hrsg.*

40. SERIERUM SUMMA PER DIFFERENTIARUM MOMENTA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 223–224. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift erg. Text zweispaltig.
Cc 2, Nr. 776

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 40 ist vermutlich nach N. 38 entstanden, zu dem es außer den thematisch bedingten Korrespondenzen auch konkrete Verbindungen gibt: Von den Figuren *A*–*C* auf S. 584 f. wird nur die fig. *C* im Text behandelt; die funktionslose fig. *A* ist wohl eine Übernahme der Fig. 1 von N. 38_6 S. 423. Auf S. 583 Z. 8 f. äußert sich Leibniz zur Zerlegung der Polynome $y^3 + y^2 + 1$ bzw. $y^3 - y^2 + y - 1$; ähnliche Bemerkungen finden sich auch in N. 38_2 S. 391 Z. 13 f. u. N. 38_{10} S. 465 Z. 16 – S. 466 Z. 2, wo Leibniz die zugehörigen Rechnungen durchführt.

Serierum summa per differentiarum momenta

(1)	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{6}$	
(2)		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		
(3)		1		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{15}$		
(4)	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{36}$	
(5)		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{36}$		$\frac{7}{144}$		$\frac{9}{400}$		$\frac{11}{900}$		addatur
(6)		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{36}$		$\frac{1}{144}$		$\frac{1}{400}$		$\frac{1}{900}$		fiet
(7)		1		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{40}$		$\frac{1}{75}$.		

20 *Nebenrechnung*:
$$\begin{array}{rcl} \cancel{2}6 & & \\ \cancel{9}\cancel{0}0 & \not{f} & 75 \\ \cancel{1}\cancel{2}2 & & \\ 1 & & \end{array}$$

A 5. auferatur 6. fiet:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
(8) & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{50} & & \frac{1}{90} \\
 & & & \frac{7}{18} & & \frac{15}{216} & & \frac{26}{1200} & & \frac{40}{4500}. & \text{Repetatur 3.} \\
 & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} \\
(9) & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \frac{4}{60} & & \frac{5}{150} & \\
(10) & & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{30} & \\
(11) & 0 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{35}
\end{array}
$$

$$(12) \quad \frac{1}{3} \quad \frac{6}{27}\Big|\frac{2}{9} \quad \left[\frac{6}{135}\right] \quad \frac{9}{360}\Big|\frac{3}{120}. \ \text{Confer 12. et 9.}$$

---

14 *Nebenrechnungen zur Lesart zu Z. 7:*

Nicht gestrichen:

$$\begin{array}{r} 150 \\ 15 \\ \hline 139\,[!] \end{array}$$

Gestrichen:

$$\frac{6}{139}\Big|$$

Nicht gestrichen:

$$\frac{6}{9 \frown 15 \sqcap 135}$$

7 (11) *(1)* $\underbrace{\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3}}_{\frac{4}{3}}$ $\underbrace{\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9}}_{\frac{12}{27}\big|\frac{4}{9}}$ $\underbrace{\frac{1}{9} \quad \frac{1}{15}}_{\frac{6}{135}\,(!)}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{35}$ *(2)* 0 *L* 8 $\frac{6}{27}\Big|\frac{2}{9}$ | $\frac{6}{135}$ *erg. Hrsg.* | *(1)* $\frac{6}{144}\Big|\frac{2}{72}$ *(!) (2)* $\frac{9}{360}\Big|\frac{3}{120}$ *L*

---

7 $\frac{1}{9}$: Richtig wäre $\frac{1}{8}$. Leibniz rechnet zunächst konsequent weiter; den angekündigten Vergleich der Differenzenfolgen (12) und (9) führt er jedoch nicht durch, sondern schreibt die Folgen (11) mit dem falschen Wert $\frac{1}{9}$ und (3) an und bildet die Summenfolge von (3). S. 577 Z. 13 schreibt er die Folge (11) zunächst wieder mit dem falschen Wert an, verbessert dann aber in $\frac{1}{8}$.

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
 & \frac{1}{3} & . & \frac{1}{9} & . & \frac{1}{15} & . & \frac{1}{24} & . & \frac{1}{35} & . & \frac{1}{63} & . & \frac{1}{80} & . & \frac{1}{99} \\
 & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} \\
(13) & \frac{4}{3} & & \frac{9}{18}\Big|\frac{1}{2} & & \frac{16}{60}\Big|\frac{4}{15} & & \frac{25}{150}\Big|\frac{5}{30}\Big|\frac{1}{6}
\end{array}$$

Sit 6. in distantias a vertice fiet

$$\begin{array}{lcccccl}
(14) & \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & \frac{1}{48} & \frac{1}{100} & \frac{1}{150} & \text{quae incipit}
\end{array}$$

ut dimidia 8. sed non continuat.

Si 7. multiplicetur in distantias a vertice, fiet 3. quod significat summam summarum huius seriei 7, aequari summae seriei 3.

Eodem modo si 8. multiplices per distantias a vertice unitate auctas seu per numeros 2. 3. 4. 5. fiet iterum series 3. Hinc ex serie 8 et 14 . iunctis habetur series 4. At eadem habetur ex sola serie 14 . per marginalia notata NB. NB. Ergo ex sola serie 8. etiam habetur 4.

$$\begin{array}{lccccc}
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35}, \\
\text{ab} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21}
\end{array}$$

---

5 *Nebenrechnung*: $\cancel{3}$
$\cancel{9}\cancel{0}0$ $\cancel{f}$ 150
$\cancel{6}\cancel{6}6$

11 NB. NB. Nam 7 − 6 $\sqcap$ 5 et 7x − 6x $\sqcap$ 5x. $x \sqcap$ 1. vel 2. vel 3. seu distantiae a vertice. Iam 5x dato datur 4. Ergo datis 7x et 6x dabitur 4. Datur autem 7x nam $\sqcap$ 3. Et datur 3 ut constat. Superest ergo 6x quam nondum habeo. Et quae adeo pendet ex 4x.

6 ut *(1)* dupla *(2)* dimidia *L* 9 unitate *(1)* minutas, seu per *(2)* auctas *L* 10–12 Hinc ... habetur 4 *erg. L* 13 $\frac{1}{3}$ *(1)* $\frac{1}{9}$ *(2)* $\frac{1}{8}$ *L*

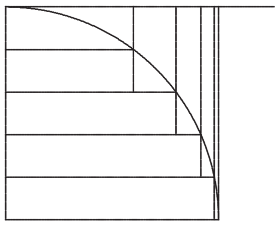
---

5 $\frac{1}{150}$: Leibniz rechnet $6 \cdot \frac{1}{900}$ statt $5 \cdot \frac{1}{900}$ und verfehlt so die Identifizierung $(14) = \frac{1}{2}$ (8).

$$\begin{array}{llllll} [(15)] & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{30} & \frac{1}{40} & \frac{[2]}{105}, \text{ ducatur in distantias, fiet} \\ & & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} & \frac{1}{[10]} & \frac{[2]}{21}. \end{array}$$

Hac methodo saepissime invenimus summam figurae quae datae seriei summas continenti sit aequivalens.

Hinc sequitur, quotiescunque serie in numeros naturales ducta figuram reperimus summabilem, videndum an data summa haberi possit.



[*Fig. 1*]

Differentiae cuiuslibet figurae ductae in numeros naturales seu intervalla a vertice, aequantur figurae complemento. Ideoque si proposita quadam serie in numeros naturales ducta productum quadrari seu summari potest et summa illa a parallelogrammo isopar-

---

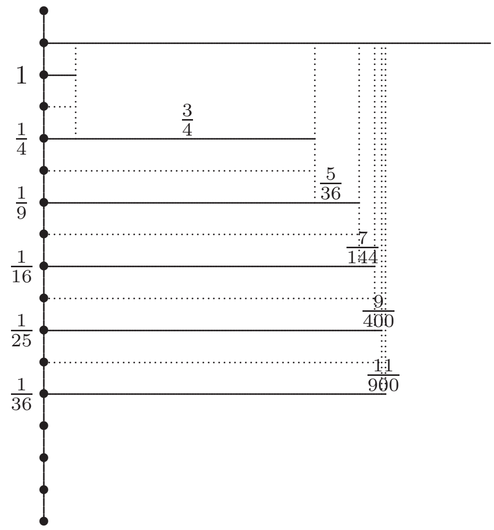
1 *Nebenrechnungen*:

$$\frac{5}{150}\Big|\frac{1}{30} \qquad \begin{array}{rrr} 9 & 15 & 12 \\ & \underline{24} & \underline{30} \\ & & 360 \end{array} \qquad \frac{9}{360}\Big|\frac{1}{40}$$

6 *Nach* possit: Imo male.

577,14–578,3 $\frac{1}{21}$ | (14) *ändert Hrsg.* | 0 *(1)* $\frac{1}{27}$ $\frac{5}{15}$ *(2)* $\frac{1}{24}$ ... $\frac{1}{40}$ | $\frac{1}{105}$ *ändert Hrsg.* |, ducatur ... fiet *(a)* (25) *(b)* | 25 *streicht Hrsg.* | $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{21}$ *ändert Hrsg.* |. Hac *L* 3 invenimus *(1)* figuram *(2)* summam *L* 9 Ideoque *(1)* differentiae *(2)* si *L* 10 quadrari *(1)* potest habetur summa *(2)* seu *L* 12 *(1)* $\frac{5}{15}\Big|\frac{1}{3}$ *(2)* $\frac{5}{150}\Big|\frac{1}{30}$ *L* allelo subtrahatur, residuum erit summa figurae quae ex datae componitur summis; seu residuum erit summa summarum figurae datae.

Hinc porro si datae figurae differentiae, in intervalla ductae quadrari possunt, etiam figura quadrari potest.



[*Fig. 2*]

Hinc cum seriei $\quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{36}$ etc.

differentiae sint $\quad 1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{7}{144} \quad \frac{9}{400} \quad \frac{11}{900}$ etc.

cogitentur diametro quidem applicari per numeros impares.

Area figurae erit: $1 \ \frac{2}{4} \ \frac{2}{9} \ \frac{2}{16}$ etc. Sed si intervalla negligas, et applicata ponas ad 1. 2. 3. 4. 5. non ad 1. 3. 5. 7. area figurae erit $1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{16}.$ Porro differentiae in distantias 1. 2. 3. 4. etc. ductae dabunt:

6 cum *(1)* figurae *(2)* seriei *L*

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{36} \quad \frac{9}{80}.$$ Illius summa reperta, etiam summa $1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.$ haberi potest. Ut autem summa posterioris quaeratur, auferatur inde [dimidia] progressio 7. seu

$$\begin{array}{ccccc l} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & \frac{1}{80}, & \text{fiet:} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \text{etc. quae summa haberi potest,} \end{array}$$

ergo ad summam omnium $1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.$ etc. habendam, opus est hac summa quae supra notata num. 7, scilicet:

$$\begin{array}{ccccc l} 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{18} & \frac{1}{40} & \frac{1}{75} & \text{quae rursus multiplicata per:} \\ 1. & 2. & 3. & 4. & \text{etc.} & \text{dabit:} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15}, & \text{ergo eius habetur momentum} \end{array}$$

ex vertice.

Quadrata numerorum naturalium ducta in differentias dant duplum momentum a vertice complementi figurae datae. Ita:

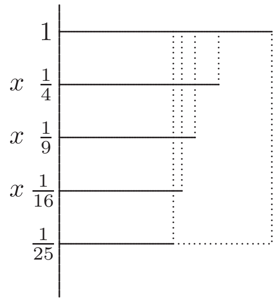
$$\begin{array}{ccccc l} 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{36} & \frac{7}{144} & \frac{9}{400}, & \text{ducta in} \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \text{dant:} \\ 1 & 3 & \frac{5}{4} & \frac{7}{[9]} & \frac{9}{16}. & \end{array}$$

Ad habendum momentum seriei a vertice, ducendi sunt eius termini in numeros naturales. Unde

2–4 inde | *(1)* summa num. 3 *(2)* | dupla *ändert Hrsg.* | progressio 7. seu *erg.* | 1 *L* 8 $\frac{1}{40}$. *(1)* etc. *(2)* $\frac{1}{75}$ *L* 10 ergo *(1)* haec summa, $1\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{40}$ *(a)* etc. *(b)* $\frac{1}{75}$. Hinc etiam summa num. 6. $\frac{1}{4}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{144}\ \frac{1}{36}$ *(!)* seu quadrata | fractionum *erg.* | triangularium haberi possunt *(2)* eius *L* 12 f. dant | duplum *erg.* | momentum *(1)* figurae a vertice, ut de *(2)* a vertice *L* 16 f. $\frac{5}{4}$ | $\frac{7}{6}$ *ändert Hrsg.* | $\frac{9}{16}$. *(1)* Si series quaedam in numer *(2)* Ad *L* 17 vertice *(1)* habetur *(2)*, *(a)* ducendae *(b)* ducendi *L*

1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$,	dabit:
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$.	Quare momentum a vertice

integrae progressionis haberi non potest. Idem momentum a vertice aliter haberi potest, ducantur differentiae figurae in numerorum naturalium quadrata, productum erit duplum momenti a vertice, complementi figurae, quare si dimidium eius a prismate isoparallelo auferatur, restabit momentum figurae, et contra momento figurae reperto habetur et summa ipsorum productorum. Momentum figurae ex axe, habetur unica tantum via, per quadrata scilicet terminorum:



[*Fig. 3*]

Videndum est an ex figura proposita alia fieri possit regularis basi quoque in partes aequales secta certisque accessionibus et diminutionibus; quod statim ostendit aequatio: Nam $\dfrac{a^3}{x^2} \sqcap y$. Ergo $a\sqrt{\dfrac{a}{y}} \sqcap x$. Sed vereor ut hoc in numeris serviat.

Porro quoniam ad summam quadratorum omnium fractionum habendam, sufficit haberi momentum fractionum triangularium, patet centrum gravitatis triangularium de-

2 momentum *(1)* eius *(2)* a vertice *L* 4 in *(1)* numeros na *(2)* numerorum naturalium quadrata, *(a)* habetur etiam resi *(b)* productum erit *(aa)* dupli *(bb)* duplum *L* 5 eius *(1)* ab altitudinis *(2)* a prismate *L* 10 possit *(1)* rationalis *(2)* regularis *L* 14–582,1 desiderari *(1)* Invento centro gravitatis habetur area figurae, modo et detur mo *(2)* Invento ... dividatur *(a)* figura *(b)* momentum *(aa)* ex *(bb)* per *L*

14 centrum gravitatis triangularium: Der gesuchte Schwerpunkt existiert nur für endliche Partialfolgen, so daß die weiteren Folgerungen bis S. 582 Z. 13 nur für solche Folgen gelten.

siderari. Invento centro gravitatis dividatur momentum per distantiam, et habebitur area figurae.

Data summa quadratorum fractionum naturalium, datur et triangularium et contra.

(1) $\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \sqcap$ (2) $\frac{y+1-y}{y^2+y} \sqcap \frac{1}{y^2+y}$.

(3) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2+2y+1} \sqcap$ (4) $\frac{\boxed{y^2}+2y+1\boxed{-y^2}}{y^4+2y^3+y^2}$ sive

(5) $\frac{y+1}{y^4+2y^3+y^2} + \frac{y}{[y^2,\frown]\, y^2+2y+1}$ sive (6) $\frac{1}{y^3+y^2} + \frac{y}{y^4+2y^3+y^2}$ sive

(7) $\frac{1}{y^3+y^2} + \frac{1}{y^3+[2y^2+y]}$. Ergo habetur summa, nempe

(8) $\frac{1}{y+1,\frown y^2} + \frac{1}{[y+1,\square,\frown y]}$. Idem aliter resolvi potest, in

(9) $\frac{2}{y^3+2y^2+y} + \frac{1}{y^4+2y^3+y^2}$.

Si facias ab initio (10) $\frac{1}{y^2-2y+1} - \frac{1}{y^2}$ fiet: (11) $\frac{+2y-1}{y^2-2y+1,\frown y^2}$, quod rursus in duo resolvi potest: (12) $\frac{1}{y-1,\frown y^2} + \frac{1}{y^2-2y+1,\frown y}$, vel in (13) $\frac{2}{y^2-2y+1,\frown y} - \frac{1}{y^2-2y+1,\frown y^2}$.

Quare si unius ex partibus 8 et 9 haberi potest summa, etiam alterius haberi poterit.

(14) $\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+2y+2} \sqcap \frac{\boxed{y^2}+2y+2\boxed{-y^2}-1}{y^2+1,\frown y^2+2y+2} \sqcap$ (15) $\frac{2y+1}{y^2+1,\frown y^2+2y+2}$, summabilis. Dissolvatur, in

6 $\mathrm{y}^2,\frown$ *erg. Hrsg.* 7 (7) $\frac{1}{\mathrm{y}^3+\mathrm{y}^2} + |\, \frac{1}{\mathrm{y}^3+2\mathrm{y}^2+\mathrm{y}}$ ändert *Hrsg.* |. *(1)* Horum ergo duorum *(2)* Ergo *L* 8 (8) $\frac{1}{\mathrm{y}+1,\frown \mathrm{y}^2} + |\, \frac{1}{\mathrm{y}^2+1,\square,\frown \mathrm{y}^2}$ ändert *Hrsg.* |. *(1)* Fiat $\frac{1}{\mathrm{y}^2-2\mathrm{y}+1} - \frac{1}{\mathrm{y}^2}$, habebimus eodem modo $\frac{\boxed{\mathrm{y}^2}\boxed{-\mathrm{y}^2}+2\mathrm{y}-1}{\mathrm{y}^2-\mathrm{y},\square}$, fiet: $\frac{2}{\mathrm{y}^3-2\mathrm{y}^2+\mathrm{y}}$ *(2)* Idem *L*

15 Dissolvatur: Die folgende Zerlegung ist nicht zulässig.

[(16)] $\dfrac{y}{y^2+1, y^2+2y+2}$ $\boxed{+\dfrac{y+1}{y^2+1, \frown\, \llcorner y+1, \square \lrcorner}}$ $+\ \dfrac{1}{y^2+1, \frown\ y+1}$, sive

[(17)] $\dfrac{y}{y^2+1, y^2+2y+2}\ +\ \dfrac{1}{y^3+y^2+y+1}$.

Aliter:

[(18)] $\dfrac{1}{y^2-2y+2} - \dfrac{1}{y^2+1}$ sive [(19)] $\dfrac{\boxed{y^2}\boxed{+1}\boxed{-y^2}+2y-\overset{1}{\boxed{2}}}{y^2-2y+2, \frown\ y^2+1}$, unde

[(20)] $\dfrac{2y-1}{y^2-2y+2, \frown\ y^2+1}$, quae quantitas dissolvi potest in has duas:

[(21)] $\dfrac{y}{y^2-2y+2, \frown\ y^2+1} - \dfrac{1}{y-1, \frown\ y^2+1}$, sive $\dfrac{y}{y^2-2y+2, \frown\ y^2+1} - \dfrac{1}{y^3-y^2+y-1}$.

Hinc patet ut obiter dicam quantitatem hanc y^3+y^2+y+1 vel y^3-y^2+y-1 duos habere divisores: Prior enim fit ex $y^2+1, \frown\ y+1$ posterior fit ex $y^2[+]1, \frown\ y-1$.

$\dfrac{a^2y}{a^2+y^2}$ pendet ex quadratura hyperbolae, demonstrari potest, ex serie eius quadratrice per regressum.

Nam est $\dfrac{y-y^3+y^5-y^7}{\dfrac{b^2}{2}-\dfrac{b^4}{4}+\dfrac{b^6}{6}-\dfrac{b^8}{8}}$ etc. Unde $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}$ at hyperbolae numerus quadrator est: $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$. Patet ergo duplicatam esse hyperbolam figurae propositae. Attamen fatendum est ope collationis numerorum vel serierum quadratricium, non

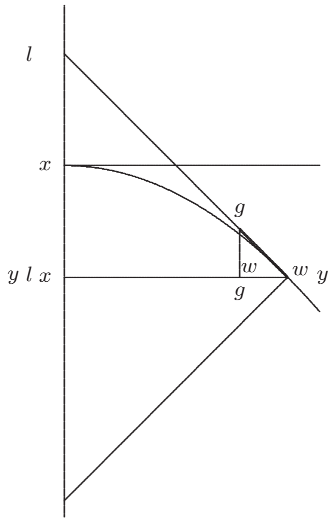
1–6 *Zählung* (15) ... (20) *L ändert Hrsg.* 3 f. Aliter: *(1)* $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2-2y+1}$ *(2)* $\dfrac{1}{y^2-2y+1} - \dfrac{1}{y^2}$ ⊓ y^2-y^2+2y-1 *(3)* | (17) *ändert Hrsg.* | $\dfrac{1}{y^2-2y+2}$ *L* 9 – *L ändert Hrsg.* 10 potest, ex *(1)* numero eius *(a)* characteri *(b)* quadratoris *(2)* serie *L* 14 numerorum | quadratorum *gestr.* | vel *L*

5 dissolvi potest: Die folgende Zerlegung ist nicht zulässig. 8 Hinc patet: Ähnliche Aussagen in N. 38_2 S. 391 Z. 13 f. u. N. 38_{10} S. 465 Z. 16 – S. 466 Z. 2.

nisi totorum, at non et portionum respondentium collationes institui: Indicio sunt tamen. At geometria ostendit etiam $\frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} - \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8}$ inveniri posse ex $\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$.

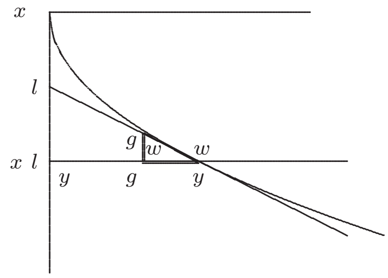
Et hinc iam lux habetur praeclara, stabiliendis per inductionem regulis de ratione totorum inter se ex variante in infinitum, sed regula certa partium ratione.

fig. A



[*Fig. 4*]

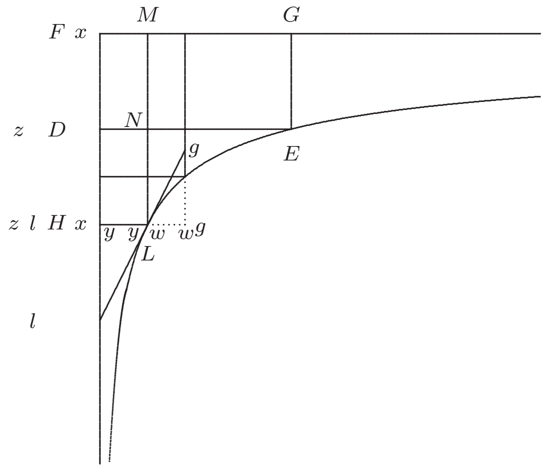
fig. B



[*Fig. 5*]

3 de *(1)* collatione totorum ex *(2)* ratione *L* 4–585,3 partium ratione. *(1)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}^2 - \mathrm{a}^2}$ pendet ex quadratura hyperbolae. Fiat: $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}^2} \sqcap \mathrm{x}$. Unde $\mathrm{a}^3 \sqcap \mathrm{xy}^2$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{y}$. *(a)* Unde $\mathrm{a}^3 \sqcap \mathrm{x}^2\mathrm{y}$. sive $+2\cancel{\mathrm{x}}\mathrm{l} \sqcap -\mathrm{x}^{\cancel{2}}\mathrm{y}$. sive $\mathrm{l} \sqcap \frac{-\mathrm{xy}}{2}$. sive $\mathrm{l} \sqcap \frac{\mathrm{a}^3}{2}$ *(b)* Unde *L*

fig. C



[*Fig. 6*]

$\frac{a^3}{x^2} \sqcap y$. Unde $a^3 \sqcap x^2y$. Unde $-2\cancel{x}ly \sqcap x^{\cancel{2}}y$. Ergo $2l \sqcap x$ seu $l \sqcap \frac{-x}{2}$. Si fecissemus $-x^{\cancel{2}}\cancel{y} \sqcap 2\cancel{x}l\cancel{y}$ idem habuissemus.

$lw \sqcap yg$. At summa omnium yg aequatur figurae, summa vero omnium lw, aequatur in nostro exemplo, vid. fig. C. aequatur inquam summae omnium $\frac{xw}{2}$ at summa omnium xw aequatur figurae in hoc exemplo, in aliis figurae complemento. Ergo hic summa omnium $\frac{xw}{2}$ aequatur figurae dimidiae. Sed haec ita explicanda sunt. Sumatur portio quaedam curvae, EL. Unde rectae demittantur perpendiculares in oppositas directrices EG, ED et LH, LM. Dictum est summam omnium lw (seu $\frac{xw}{2}$) aequari summae omnium y, seu spatio $LHDEL$. At constat omnium xw summam aequari spatio $LMGEL$.

6 in *(1)* fig. B *(2)* nostro *L* 6 omnium *(1)* $-\frac{\text{xw}}{2}$ *(2)* $\frac{\text{xw}}{2}$ *L* 7 figurae *(1)* complemento, et figura omnium −xw *(2)* in *L* 7 hic *erg.* *L* 10 LM. *(1)*) Aio patet *(2)* Dictum *L*

Ergo omnium $\dfrac{xw}{2}$ summa aequabitur dimidio spatio $LMGEL$, at eadem aequatur spatio $LHDEL$, ergo spatium $LMGEL$, est d u p l u m spatii $LHDEL$.

Distinguamus unumquodque horum spatiorum, in id quod cuilibet proprium, et id quod utrique commune est; punctoque intersectionis rectarum DE, et LM, appellato N, commune erit utrique spatium $LNEL$, quod vocabimus ξa, et spatio $LMGEL$ proprium erit rectangulum NG, et spatio $LHDEL$, proprium erit rectangulum DL. Recta autem DH appellata z. et DE appellata e. erit rectangulum $DL \sqcap zy$ et rectangulum $NG \sqcap e-y, \frown x-z$. Ergo spatium $LMGEL \sqcap \xi a,, +e-y, \frown x-z$, et $LHDEL \sqcap \xi a+zy$. Ergo $\xi a,, +e-y, \frown x-z \sqcap 2\xi a+2zy$, sive $\xi a+ex-ez-yx+yz \sqcap 2\xi a+2zy$, sive $ex-ez-yx \sqcap \xi a+zy$. Et $\xi a \sqcap ex-ez-yx-yz$ sive rectangulum DG, demta rectangulorum HM et [HN] summa.

Ipsam FD appellemus ω et erit $z \sqcap x-\omega$, fietque: $ex-ex+e\omega-yx-yx+y\omega \sqcap \xi a$ sive $e\omega-2yx+y\omega \sqcap \xi a$. Ad ξa addatur $HM \sqcap yx$, itemque $NG \sqcap e\omega-y\omega$, fiet spatium $LHFGEL \sqcap 2e\omega-yx$. Et pro y ponendo $\dfrac{a^3}{x^2}$, pro e ponendo $\dfrac{a^3}{\omega^2}$, fiet: $\dfrac{2a^3}{\omega}-\dfrac{a^3}{x}$. Auferatur inde FE, seu $e\omega$, seu $\dfrac{a^3}{\omega}$ fiet: $\dfrac{a^3}{\omega}-\dfrac{a^3}{x}$. aequalis spatio $LHDEL$. Quod si ad ξa addatur NG fiet: $2e\omega-2yx$, sive $\dfrac{2a^3}{\omega}-\dfrac{2a^3}{x} \sqcap$ spatio $LMGEL$. Unde si aequatio fuisset $\dfrac{a^4}{x^3} \sqcap y$ fiet puto $\dfrac{a^3}{\omega^2}-\dfrac{a^3}{x^3}$, item $\dfrac{3a^3}{\omega^2}-\dfrac{3a^3}{x^2}$.

$$y+a \quad \frown \quad y+b \quad \frown \quad y+c \quad \sqcap \quad 0.$$

$$\text{Unde}\quad \begin{array}{llll} y^2 & +a & y & +ab \frown y+c, \sqcap y^3 \\ & +b & .. & \end{array} \quad \begin{array}{llllll} +a & y^2 & +ab & y & +abc \sqcap 0. \\ +b & .. & +ac & .. & \\ +c & .. & +bc & .. & \end{array}$$

---

15 *Zu* $\dfrac{a^3}{\omega}-\dfrac{a^3}{x}$: $\dfrac{a^3x-a^3\omega}{\omega x}$, vel $\dfrac{za^3}{x^2-[z]x}$.

7 DL $\sqcap$ zy *(1)* $-$ez sive zy $-$ ze, *(2)* et *L* 11 DM *L ändert Hrsg.* 12 FD | appellemus *streicht Hrsg.* | appellemus *L* 13 $e\omega-2yx+y\omega \sqcap \xi a$. *(1)* Pro y ponamus $\dfrac{a^3}{x^2}$, et pro e ponamus $\dfrac{a^3}{\omega^2}$, fiet: $\dfrac{a^3}{\omega}-\dfrac{2}{-}$ *(2)* Ad *(a)* x *(b)* ξa *L* 22 ω *L ändert Hrsg.*

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ summetur. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \sqcap \frac{b+a}{ab}$, $+\frac{1}{c} \sqcap \frac{bc+ac}{abc}$.

Hinc si series quotcunque fractionum numeratorem constantem habentium ineunda sit: aequatio fingenda est cuius incogniti, seu radices fingantur ipsi nominatores. Summa eorum erit terminus secundus: summa rectangulorum sub ipsis terminus tertius: [factus] ex omnibus terminus ultimus. Sed ut cum aliis terminis nihil sit nobis negotii, fingenda est aequatio, quae non habeat nisi terminos maximum qui tot est dimensionum quot sunt nominatores seu quasi-incognitae, secundum qui est summa nominatorum, tertium, qui ignoratur sed qui velut cognitus consideratur, qui est summa fractionum, per ultimum multiplicatarum; et ultimum qui est factus ex denominatoribus. Sed ista aequatio fateor intractabilis est: Interim synthetica methodo serviunt ista ad inveniendas summas; v. g. si sit:

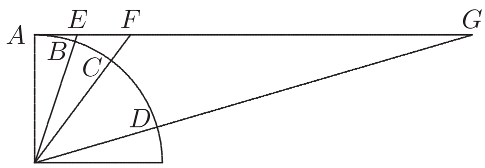
$y^{100} + 1000y^{99} \ * \ * \ * \ +100y \sqcap 100,000$.

Hoc modo summa omnium fractionum quarum nominatores sunt radices, numerator unitas erit $\frac{100}{100,000}$ vel $\frac{1}{1000}$. Sed et secundus terminus omitti potest. Addatur aliquid radici, seu pro y. ponatur $z+1$. et habebitur omnium aliarum combinationum nempe et solidorum ex omnibus radicibus etc. summa.

$$\begin{array}{cccc}
a & & & \\
 & g & & \text{etc.} \\
b & & m & \\
 & h & & s \\
c & & n & \\
 & i & & t \\
d & & o & \\
 & k & & v \\
e & & p & \\
 & l & & w \\
f & & q & \\
 & f & & x \\
0 & & f & \\
 & 0 & & f \\
 & & 0 & \\
 & & & 0
\end{array}$$

Ponantur termini inter a. et f. finitas quantitates interiecti infiniti, continue decrescentes, sed incremento tali, ut nunquam infra f descendant, quemadmodum cogitare possumus fieri, si a, ponatur esse circulus, et f. cogitetur esse quadratum inscriptum, e. octogonum inscriptum, d. hexdecagonum etc.

Videndum est an differentiae $l.k.i.$ etc. ad certam seriem vel progressionem revocari possint, quae sit summabilis. Eius seriei summa aequabitur circulo. Idem est in circumferentiis polygonorum:



[*Fig. 7*]

Ostensum est ab aliis si AE tangens arcus dati AB sit x , AF tangentem arcus dupli AC fore $\dfrac{2a^2x}{a^2-x^3}$. Hinc patet semper rationalem esse tangentem arcus dupli si rationalis tangens arcus dati. Ponatur iam arcus datus esse infinite parvus, et tangens eius esse β. Tangens arcus dupli erit $\dfrac{2a^2\beta}{a^2-\beta^2}$ et tangens arcus quadrupli erit: $\dfrac{2a^2 \frown \dfrac{2a^2\beta}{a^2-\beta^2}}{a^2 - \dfrac{4a^4\beta^2}{a^4-2a^2\beta^2+\beta^4}}$

587,2 series *(1)* progressionis harmoni *(2)* quotcunque fractionum *(a)* nominatorem *(b)* numeratorem *L* 587,3 cuius *(1)* | terminus *streicht Hrsg.* | ultimus *(2)* incogniti *L* 587,4 summa *L ändert Hrsg.* 587,6 f. sunt *(1)* incognitae *(2)* nominatores *L* 587,8 f. fractionum *(1)* et ultimum qui est *(2)* per ultimum *(a)* divisarum *(b)* multiplicatarum *L* 3 esse *(1)* circumferentia *(2)* circulus *L* 6 f. in *(1)* polygonis *(2)* in *(3)* circumferentiis *L* 10 esse *(1)* pars *(2)* tangentem *L* 11 iam *(1)* tangens *(2)* arcus *L*

9 ab aliis: vgl. J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura ... pars prima*, 1647, S. 13 u. S. 47 bis 60, wo zehn Beweise von verschiedenen Mathematikern abgedruckt sind; der Satz wird mit Hinweis auf die vorliegenden Beweise analytisch bewiesen bei Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II, S. 366–368.

atque ita crescendo in infinitum donec ad certum perveniatur terminum, qui sit v. g. quadratum circumscriptum.

Haec fere gemina illis quae alibi etiam de exprimendis ordinatis curvarum dixi.

$$\text{Progressio:}\quad \underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}_{\displaystyle\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}_{\displaystyle\frac{2}{35}} + \underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}_{\displaystyle\frac{2}{99}.}$$

$$\text{Sit iam}\quad \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}_{\displaystyle\frac{2}{15}} + \underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}_{\displaystyle\frac{2}{63}} + \underbrace{\frac{1}{11}-\frac{1}{13}}_{\displaystyle\frac{2}{143}.}\quad \text{fiet}$$

$$\text{Ergo}\quad \frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}\ \text{etc.,,}\quad + \quad \frac{2}{15}+\frac{2}{63}+\frac{2}{143}\ \text{etc.} \sqcap 1.$$

$$\text{Sive}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}\ \text{etc.} \sqcap \frac{1}{2}$$

$$\text{quia}\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\ \text{etc.} \\[2ex] +\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\ \text{etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}\ \text{etc.} \\[2ex] \frac{2}{15}+\frac{2}{63}+\frac{2}{143}\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\text{Eodem modo:}\quad \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\displaystyle\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\displaystyle\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\displaystyle\frac{1}{30}} + \underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{\displaystyle\frac{1}{56}} + \underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}_{\displaystyle\frac{1}{90}.}$$

facit:

$$\text{At}\quad \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\displaystyle\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{\displaystyle\frac{1}{20}} + \underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}_{\displaystyle\frac{1}{42}} + \underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}_{\displaystyle\frac{1}{72}} + \underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{11}}_{\displaystyle\frac{1}{110}.}\ \text{etc.} \sqcap$$

14 f. $\frac{1}{90}$. *(1)* Eodem modo *(2)* At *L*

3 alibi: *Approximatio ad mensuram circularem geometrica*, *LSB* VII, 1 N. 6_2 S. 71+73, wo fast das gleiche Differenzenschema wie S. 587 Z. 18–32 auftritt.

$$\text{Ergo iungendo: } \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56} \text{ etc. } \sqcap\ 1$$

$$\text{et } \quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28} \text{ etc. } \sqcap\ 2.$$

Quod verissimum.

$$\text{Eodem modo } \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\substack{\frac{2}{8}\\[4pt] \frac{1}{4}}} + \underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{\substack{\frac{2}{48}\\[4pt] \frac{1}{24}}} + \underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{\substack{\frac{2}{120}\\[4pt] \frac{1}{60}}} + \underbrace{\frac{1}{14}-\frac{1}{16}}_{\substack{\frac{2}{224}\\[4pt] \frac{1}{112}}}$$

$$\text{Iam } \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}_{\frac{2}{24}} \quad \underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{10}}_{\frac{2}{80}} \quad \underbrace{\frac{1}{12}-\frac{1}{14}}_{\frac{2}{168}} \text{ etc. facit} \quad \text{etc.}$$

$$\text{Ergo } \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16} \text{ etc.} \\[8pt] +\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16} \text{ etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{8}+\frac{2}{48}+\frac{2}{120}+\frac{2}{224} \\[8pt] +\frac{2}{24}+\frac{2}{80}+\frac{2}{168} \end{array}\right.$$

$$\text{Ergo: } \frac{1}{8}+\frac{1}{24}\left[+\frac{1}{48}\right]+\frac{1}{80}\left[+\frac{1}{120}\right]+\frac{1}{168}+\frac{1}{224} \text{ etc. } \sqcap\ \frac{1}{4}.$$

$$\text{Iam } \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143} \text{ etc. } \sqcap \frac{1}{2}.$$

$$\text{Et } +\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\left[+\frac{1}{48}\right]\left[+\frac{1}{80}\right]\left[+\frac{1}{120}\right] \text{ etc. } \sqcap \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}\left[+\frac{1}{48}\right]+\frac{1}{63}\left[+\frac{1}{80}\right]+\frac{1}{99}\left[+\frac{1}{120}\right]+\frac{1}{143} \text{ etc. } \sqcap \frac{3}{4}.$$

12 $+\frac{1}{48}$ *erg. Hrsg.* 12 $+\frac{1}{120}$ *erg. Hrsg.* 12 f. $\sqcap \frac{1}{4}$. *(1)* Quare denique: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+$ *(2)* Iam *L* 14 $+\frac{1}{24}$ $|+\frac{1}{80}+\frac{1}{168}+\frac{1}{224}$ *ändert Hrsg.* | etc. *L* 15 $\frac{1}{35}$ $|+\frac{1}{80}+\frac{1}{63}+\frac{1}{168}+\frac{1}{99}+\frac{1}{224}$ *ändert Hrsg.* | $+\frac{1}{143}$ *L*

Superest ut quaeramus summam huius seriei,

$$\frac{1}{3} \quad - \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{7} \quad - \quad \frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{11} \quad - \quad \frac{1}{13}$$

$$+\frac{2}{15} \quad -\frac{2}{35} \quad +\frac{2}{63} \quad -\frac{2}{99} \quad +\frac{2}{143} \sqcap \frac{1}{3} - \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} \text{ etc.}$$

Ergo $\frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc. $\sqcap \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. $\sqcap \frac{2}{15} + \frac{2}{63} + \frac{2}{143}$ etc. $-\frac{1}{6}$.

Ergo $\frac{1}{6} \sqcap \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc.

Ergo $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc. $\sqcap \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \sqcap \frac{3}{6} \sqcap \frac{1}{2}$ ut ante.

Nota si $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ etc. multiplicentur per $\frac{2}{8}$,

fiet: $\frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120}$ etc. seu

$\frac{2}{9-1} + \frac{2}{25-1} + \frac{2}{49-1}$ etc. quod iterum ad demonstrandam aliter huius quoque seriei summam servit.

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + 2y\beta + \beta^2} \sqcap \frac{\boxed{y^2} + 2y\beta + \beta^2 \boxed{-y^2}}{y^2 + 2y\beta + \beta^2, \frown y^2} \quad \text{summabilis.} \quad (1)$$

$$\frac{1}{y^2 - 2y\beta + \beta^2} - \frac{1}{y^2} \sqcap \frac{\boxed{y^2 - y^2} + 2y\beta + \beta^2}{y^2 - 2y\beta + \beta^2, \frown y^2} \quad \text{summabilis.} \quad (2)$$

Iungantur 1. et 2., ac primum addendo, fiet:

1 f. seriei *(1)* 15 *(2)* $\frac{1}{15}\ \frac{1}{63}$ *(3)* Quod si ergo vel *(4)* 1 $\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{9}} + \underbrace{\frac{1}{11} - \frac{1}{13}}$ *(a)* $1 + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \frac{1}{99} + \frac{1}{143} \sqcap \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. *(b)* $1 + \frac{2}{15} - \frac{2}{35} + \frac{2}{63} - \frac{2}{99} + \frac{2}{143} \sqcap \frac{2}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc.,, $\frown$ 2 *(aa)* demto *(bb)*$\sqcap$ *(5)* $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$ *L*

12 (2): Auf der rechten Seite der Gleichung müßte im Zähler $-\beta^2$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter, der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Überlegung bis S. 592 Z. 3.

$$\frac{2y\beta+\beta^2,\frown y^2,\frown y^2\boxed{-2y\beta}+\beta^2,,+\quad +2y\beta+\beta^2,\frown y^2\frown y^2+\boxed{+2y\beta}+\beta^2}{y^4,,\frown\quad y^4+2\beta^2y^2+\beta^4,-4\beta^2y^2}\text{ sive}$$

$$\frac{4y\beta+2\beta^2\frown y^2,\frown y^2+\beta^2}{y4\,2,\frown\quad y^2\boxed{+2\beta^2y^2}+\beta^4\boxed{-4\beta^2y^2}}.$$
$$-2\beta^2y^2$$

Iungi possunt et subtrahendo, et fiet $\dfrac{4\cancel{y}\beta,\frown 2y\beta+\beta^2}{y^{\cancel{2}},\frown\quad y^4-2\beta^2y^2+\beta^4}$ cuius seriei datur rursus summa.

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+\beta}\sqcap\frac{\boxed{y}+\beta\boxed{-y}}{y^2+\beta y}.\qquad \frac{1}{y-\beta}-\frac{1}{y}\sqcap\frac{\boxed{y-y}+\beta}{y^2-\beta y}.$$

Iungantur addendo, fiet: $\dfrac{\boxed{\beta y^2\boxed{-\beta^2y}+\beta y^2\boxed{+\beta^2y}}2\beta y^2}{y^4-\beta^2y^2}\sqcap\dfrac{2\beta}{y^2-\beta^2}.$

Iungantur subtrahendo, fiet: $\dfrac{-\beta y^2+\beta^2y+\beta y^2+\beta^2y}{y^4-\beta^2y^2}\sqcap\dfrac{2\beta^2}{y^3-\beta^2y}.$

Huius ergo seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}$ etc. habetur summa, item huius: $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}$ etc. [$\frown$ 6] $\sqcap$ 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$, quae est series [reciprocorum] pyramidalium, nimirum omnes numeri cubi radicibus minuti sunt senarii, et divisi per 6. dant numeros pyramidales.

$$\frac{1}{4-1}+\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}\text{ etc.}\sqcap\frac{3}{4}.$$

Iam $\dfrac{1}{4-1}\sqcap\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{256}$ etc.

$$\frac{1}{9-1}\sqcap\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\frac{1}{6561}\text{ etc.}$$

---

5 *Nebenrechnung*: $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+b}\sqcap\dfrac{y+b-y}{y^2+by}\sqcap\dfrac{b}{y^2+by}$

9 $\frown$6 *erg. Hrsg.* 9 reciprocorum *erg. Hrsg.*

Omnes ergo omnium fractionum potestates exponentium parium simul sumtae aequantur tribus quartis.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{3} & - & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{9} & - & \frac{1}{12} & + & \frac{1}{15} & - & \frac{1}{18} \\
 & \frac{3}{18} & & & & \frac{3}{108} & & & & \frac{3}{270} & \\
 & \frac{1}{6} & & & & \frac{1}{36} & & & & \frac{1}{90} & \\
\frac{1}{6} & - & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{12} & - & \frac{1}{15} & + & \frac{1}{18} & - & \frac{1}{21} \\
 & \frac{3}{54} & & & & \frac{3}{180} & & & & \frac{3}{378} & \\
 & \frac{1}{18} & & & & \frac{1}{60} & & & & \frac{1}{126} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$\text{Ergo}\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18}\ \text{etc.} \\[2ex] \qquad + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18}\ \text{etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{36}\ \ \frac{1}{90}\ \ \text{etc.} \\[2ex] \frac{1}{18}\ \ \frac{1}{60}\ \ \frac{1}{126}\ \ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Ergo} & \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} + \frac{1}{126}\quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{3} + \frac{1}{[9]} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63}\quad \text{etc.} \sqcap \frac{2}{3}\ \text{et} \\
 & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}\qquad\quad \sqcap 2,\ \text{ut dudum scimus.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\text{Sed}\ \frac{1}{1} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{10} & + & \frac{1}{13} & - & \frac{1}{16} & \text{etc.} \\
 & \frac{3}{4} & & & & \frac{3}{70} & & & & \frac{3}{208} & & \text{etc.} \\
\frac{1}{4} & - & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{10} & - & \frac{1}{13} & + & \frac{1}{16} & - & \frac{1}{19} & \text{etc.} \\
 & \frac{3}{28} & & & & \frac{3}{130} & & & & \frac{3}{304} & & \text{etc.}
\end{array}$$

1 omnium *(1)* totius *(2)* rerum ⟨combi⟩ *(3)* fractionum *L*   13 6 *L ändert Hrsg.*

$$\text{Unde}\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}+\frac{1}{304}\qquad \sqcap\ \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{14}\quad \frac{1}{35}\quad \frac{1}{65}\quad \frac{1}{104}\quad \frac{1}{152}\ \text{etc.}\ \sqcap \left[\frac{2}{3}\right]$$

Series quadratrix $\dfrac{1}{4y^2-1}$. Ponendo y esse numerum imparem, erit differentia: $\dfrac{1}{4y^2-1}-\dfrac{1}{4y^2+16y+15}$, seu $\dfrac{16y+16}{16y^4+64y^3+60y^2-16y-15}$.

Si invicem addantur $\dfrac{a^3}{a^2+y^2}$ et $\dfrac{a^3}{y^2-a^2}$, fiet: $\dfrac{2y^2[a^3]}{y^4-a^4}$.

Si invicem addantur $\dfrac{a^3}{a^2+y^2}$ et $\dfrac{a^3}{a^2-y^2}$, fiet: $\dfrac{[2]a^5}{a^4-y^4}$. Qua habita habetur et $\dfrac{a^4}{a^4-y^4}$, inde $\dfrac{y^4+y^8+y^{12}+y^{16}}{\frac{1}{5}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{17}}$ etc.

Iam $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}\sqcap\dfrac{y^2-y^4+y^6}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}$ etc. Addendo ergo $\dfrac{y^4}{a^4-y^4}$, et $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}$ summa omnium fiet: $\dfrac{[a^2y^2]}{a^4-y^4}\sqcap\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}$ etc.

Quid si sit: $\dfrac{y^2a}{a^2+2ay+y^2}\sqcap x$, fiet:

$$\frac{y^2a}{a^2},,\ -\frac{2ay[+]y^2,\frown\ y^2a}{a^4}+\frac{2ay[+]y^2,\square,\frown\ y^2a}{a^6}\ \text{etc.}$$

$$\frac{a^2}{a^2+2ay+y^2}\ \text{quadrabilis.}$$

2 $\frac{1}{6}$ *L ändert Hrsg.* 4 $-\dfrac{1}{4y^2+16y+15}$, *(1)* differentia *(2)* seu *L* 5 a^3 *erg. Hrsg.* 6 2 *erg. Hrsg.* 9 $2y^4+a^2y^2$ *L ändert Hrsg.* 11 $-$ *L ändert Hrsg. zweimal*

$$\frac{1}{4y^2-1} \sqcap \frac{1}{2y+1,2y-1}.$$

$$\Bigg[-\frac{1}{4y^2,+2,2y,2,+,4-1}+\frac{1}{4y^2-1} \sqcap \frac{\boxed{4y^2}+8y+3\boxed{-4y^2}+1}{} \sqcap$$

$\dfrac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1} \sqcap \dfrac{2y+2,+2y,,\frown 2y+2,-2y \sqcap 8y+4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}$ dividatur per $2y+1$, tam nominator quam numerator, fiet: $\dfrac{4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,2y-1} \sqcap \dfrac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}\Bigg]$ quae ducta in $2y+3$. distantiam a vertice aliquo, dabit: $\dfrac{4}{4y^2-1}$. Et quadruplum summae, habetur ex ductu hoc differentiarum. Cum aliunde constet hunc ductum dare eius complementum, unde videtur aliquid duci ad summam seriei huius quadratricis ineundam.

$$\begin{matrix} 2 & 6 & 10 & 14 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{35} & \frac{1}{99} & \frac{1}{[195]} & \frac{1}{323}. \end{matrix}$$

Esto y numerus impar, erit $\dfrac{1}{4y^2-1}$terminus seriei quadratricis.

1–4 $\sqcap \dfrac{1}{2y+1,2y-1}$. *(1)* $\dfrac{1}{4y^2,+2,2y,2,+4,-1}-\dfrac{1}{4y^2-1}$ *(2)* $-\dfrac{1}{4y^2,+2,2y,2,+4,-1}+\dfrac{1}{4y^2-1} \sqcap \dfrac{\boxed{4y^2}+8y+3\boxed{-4y^2}+1}{} \sqcap \dfrac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1} \sqcap \dfrac{2y+2,,+2y,,\frown 2y-2,-2y \sqcap 8y+4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}$ *(a)* dividatur per $2y+1$, *(aa)* fiet *(bb)* tam nominator quam numerator, fiet: $\dfrac{4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\frown 2y-1} \sqcap \dfrac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}$ *(b)* multiplicetur per $2y+1$, fiet *(3)* | $-\dfrac{1}{4y^2,+2,2y,2,+16,-1}+\dfrac{1}{4y^2-1} \sqcap \dfrac{\boxed{4y^2}+8y+15\boxed{-4y^2}+1}{} \sqcap \dfrac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,\ 4y^2-1} \sqcap \dfrac{2y+4,,+2y,,\frown 2y-2,-2y \sqcap 8y+16}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,\ 4y^2-1}$ *ändert Hrsg.* | dividatur per $y+2$, fiet $\dfrac{4}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,,\frown 2y-1} \sqcap \dfrac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}$ *gestr., erg. u. ändert Hrsg.* | quae *L*

6 aliunde constet: Leibniz verwendet den Satz bereits S. 578 Z. 8 f.

$\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1} \sqcap \frac{y+1-y}{y^2+[y]} \sqcap \frac{1}{y^2+[y]}$. Sed quia differentiae ipsarum y sunt $2_{[,]}$ sic potius faciemus: $\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}$, vel potius denique: $\frac{1}{2y}-\frac{1}{2y+2}$ fiet: $\frac{2y+2-2y}{4y^2+4y} \sqcap \frac{1}{2y^2+2y}$, cuius dimidium $\frac{1}{4y^2+4y}$. Vel ita: $\frac{1}{2y-2}-\frac{1}{2y} \sqcap \frac{\boxed{2y-2y}+2}{4y^2-4y}$ cuius dimidium: $\odot\frac{1}{4y^2-4y}$, addatur ad ☽ $\frac{1}{4y^2+4y}$ fiet $\frac{4y^2\boxed{+4y^2}+4y^2\boxed{-4y^2}}{16y^4-16y^2}$, sive $\frac{1}{2y^2-2}$ cuius duplum ♀ $\frac{1}{y^2-1}$.

Contra si alterum ab altero auferatur, ☽ a $\odot$, restabit $\frac{\boxed{+4y^2}+4y\boxed{-4y^2}+4y}{16y^4-16y^2}$ cuius [duplum]: ☿ $\frac{1}{y^3-y}$. Cuius seriei habetur summa. Addantur hae duae series, ♀ et ☿, fiet:

595,9 *Nebenrechnungen*:

Zur Lesart, nicht gestrichen:		*Zum gültigen Text*:
14	5	18
14	$\cancel{1}\cancel{4}$	18
56	$\cancel{2}\cancel{8}5$ ⨍ 19	144
14	$\cancel{1}\cancel{5}5$	18
296 [*!*]	$\cancel{1}$	296

595,9 f. $\frac{1}{99}$ | $\frac{1}{295}$ ändert Hrsg. | $\frac{1}{323}$. *(1)* Multiplicentur ista per 3. 7. 11. 15. 19. *(2)* Esto *L*

1 1 *L ändert Hrsg. zweimal* 3 $\frac{1}{4y^2+4y}$. *(1)* Unde auferenda a *(a)* 2 *(b)* $\frac{1}{4y^2-1}$, restabit $\frac{1}{4y^2-1}-\frac{1}{4y^2+2} \sqcap \frac{\boxed{4y^2}+2\boxed{-4y^2}+1}{16y^4+8y^2-2 \atop -4\,..} \sqcap \frac{3}{16y^4+4y^2-2}$ *(2)* Vel *L* 4 fiet *(1)* $\frac{4y^2\boxed{+4y}+4y^2\boxed{-4y}}{16y^4+16y^2}$, sive *(a)* 8 *(b)* $\frac{1}{2y^2+2}$ *(c)* $\frac{y^2}{2y^2+2}$ cuius duplum erit: $\frac{y^2}{y^2+1}$, vel $1-\frac{1}{y^2+1}$. Contra *(2)* $\frac{4y^2\boxed{+4y}+4y^2\boxed{-4y}}{16y^4+16y^2}$ *L* 5 si *(1)* addantur simul, fiet: *(2)* alterum *L* 6 quadruplum *L ändert Hrsg.*

$\dfrac{y+1}{y^3-y} \sqcap \dfrac{1}{y-1,\frown y} \sqcap \dfrac{1}{y^2-y}$. Contra si altera ab altera auferatur, fiet: $\dfrac{y-1}{y^3-y} \sqcap \dfrac{1}{y^2+y}$.

$$\begin{array}{cccccccc}
\dfrac{1}{4+2} & \dfrac{1}{9+3} & & \qquad\qquad & \dfrac{1}{4-2} & \dfrac{1}{9-3} & \dfrac{1}{16-4} & \dfrac{1}{25-5} \\[2ex]
\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{12} & \dfrac{1}{20} & & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{12} & \dfrac{1}{20}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{1}{4-2} & - & \dfrac{1}{4+2} & \sqcap & \dfrac{2+2}{16-4} & & \dfrac{1}{3} & & \\[2ex]
\dfrac{1}{9-3} & - & \dfrac{1}{9+3} & \sqcap & \dfrac{9+3-9+3}{81-9} & & \dfrac{1}{12} & & \\[2ex]
\dfrac{1}{16-4} & - & \dfrac{1}{16+4} & \sqcap & \dfrac{8}{256-96} & \sqcap & \dfrac{1}{32-2} & \sqcap & \dfrac{1}{30}
\end{array}$$

41. AUS UND ZU GOSSELINS DE ARTE MAGNA

[Oktober 1674 – Januar 1675]

Leibniz hat — vermutlich während seines Aufenthaltes in Paris — ein Exemplar von G. Gosselins *De arte magna*, Paris, 1577 erworben, das sich heute in der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover befindet. Oben auf dem Titelblatt steht ein Eintrag von fremder Hand: „ex lib: Jacobi Michelet de La Cheuallerye. ℬ9. n°. 109.“

Die gestrichene Marginalie auf fol. 11 r° (= S. 599 Z. 13–22) dürfte unmittelbar vor N. 41_2 entstanden sein, wo dieselbe Rechnung korrekt durchgeführt ist (= S. 602 Z. 4–16). Dies kann frühestens im Oktober 1674 geschehen sein, da in N. 41_2 auf das datierte Stück N. 38_{16} verwiesen wird. Das Wasserzeichen von N. 41_2 ist für September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 41_2 muß vor dem 3. März 1675 entstanden sein, da es in dem datierten Stück N. 44_2 erwähnt wird.

Dem Text Gosselins ist die Blattzählung der Ausgabe von 1577 in eckigen Klammern vorangestellt. Die Marginalien von Leibniz werden als Fußnote wiedergegeben. Marginalien, Korrekturen oder Unterstreichungen im Inhaltsverzeichnis sowie auf fol. 4 r°–7 r°, 9 r°, 11 r° u. 25 v°, die von fremder Hand stammen oder Leibniz nicht eindeutig zugeschrieben werden können, sind nicht wiedergegeben.

41_1. HANDEXEMPLAR

Überlieferung: *LiH* Marginalien in G. Gosselin, *De arte magna*, Paris, 1577: *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 317
Cc 2, Nr. 00

[fol. 5 v°]

...

Theorema nostrum ad rationem vestigandi lateris Cubici. Cap. VII.

Si numerus in duas partes quascunque secetur Cubus totius aequalis erit Cubis partium; et facto ex triplo uniuscuiusque partis in factum ex una in alteram, ut 8 dividatur in 5 et 3, Cubus 8 est 512: Cubus 5. est 125, Cubus 3. est 27, factus ex 3 in 5. est numerus

---

24–599,3 $\llcorner a+b \lrcorner^3 \sqcap a^3+b^3+3ab \frown a+b \sqcap a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ vel $\sqcap a^2, \frown a+3b, , +b^2, \frown 3b+a$ vel $\sqcap a, \frown a^2+3ab+3b^2, +b^3$ vel $\sqcap a^3, +b, \frown 3a^2+3ab+b^2$.

---

6 Jacobi Michelet de La Cheuallerye: nicht ermittelt.

15, qui ductus in triplum 5. hoc est in 15, facit 225, idem numerus 15 ductus in triplum 3 hoc est 9 efficit 135, quae omnia simul sumpta aequalia sunt Cubo 8, nam 125, 27, 225, et 135, faciunt 512.

. . .

[fol. 11 r^{o}/v^{o}]

. . .

De Proportione Arithmetica. Cap. IX
Dato latere vestigandi cuiuscunque Polygoni
generalis ratio et facilis.

Auferemus 2 ex numero Polygoni, auferemus et monadem a latere, tum residuos hos numeros multiplicabimus invicem, facto addemus 2, summa haec ducta in semissem,

---

10–600,3 *Gestrichen*:

$$\begin{array}{r}
b-2 \\
y-1 \\ \hline
-2y+2 \\
+b..\,\underline{-\,b} \\
+\,2 \\ \hline\hline
-2y+b \\
+b..\qquad \\ \hline
\dfrac{y}{2} \\ \hline\hline
-y^2+\dfrac{b}{2}y \\
+\dfrac{b}{2}..\qquad
\end{array}$$

15 f. *(1)* $\begin{array}{l}-2y-2\\ +b..\underline{+b}\end{array}$ *(2)* $\begin{array}{l}-2y+2\\ +b..\underline{-b}\end{array}$ *L*

---

18 $+b$: Richtig wäre $-b+4$; Leibniz erkennt den Fehler, korrigiert unvollständig und streicht die Marginalie. Richtig durchgeführt ist die Rechnung in N. 41₂ S. 602 Z. 4–16.

vel contra semissis lateris in hanc summam, facit polygonum quaesitum. Atque hanc a se excogitatam rationem demonstravit Vir Doctissimus M. Bressius Professor Mathematicus.

Vestigemus triangulum ab latere 6, quia triangulum habet tres angulos, subductis 2 restat 1, deduco etiam 1 ex 6, restat 5, quem multiplico in 1 residuum angulorum fit ipse 5, cui addo 2, existit 7, hunc multiplico per semissem 6 lateris, hoc est per 3, exurgunt 21, triangulus ab latere 6.

Vestigemus Pentagonum ab latere 6, deduco 2 ex 5 numero angulorum, restant [3], deduco 1 ex 6, supersunt 5, residuos hos numeros invicem multiplico, 5 in 3, fiunt 15, addo 2, existunt 17, quae multiplico per 3 semissem 6 lateris, fiunt 51, atque tantus est Pentagonus cuius latus est 6. Idemque de reliquis esto iudicium.

8–11

$$\begin{array}{l}
5-2 \sqcap 3 \sqcap b-2 \\
y-1 \\
y-1, \frown \underbrace{b-2}_{c}, +2, , \frown \dfrac{y}{2} \\
yc-ca+2a^2 \\
\qquad\qquad \dfrac{y}{2} \\
\hline\hline
\dfrac{y^2c-ca\ \ y \\ \quad +2a^2}{2}
\end{array}$$

8 2 *H ändert LiH*

---

2 demonstravit: Beweis von M. Bressieu nicht gefunden. — Der Satz ist bereits bewiesen in DIOPHANT, *De multangulis numeris*, prop. 8.

41_2. DE SUMMA FRACTIONUM QUARUM NOMINATORES NUMERI POLYGONI

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 17 Bl. 10–11. 1 Bog. 4°. 2 1/2 S. Bl. 11 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 756

De summa fractionum quarum numeratores constans; nominatores numeri polygoni.

Ex Gosselino *De arte magna sive algebra* lib. 1. cap. 11 [*!*]. *Dato latere vestigandi polygoni ratio generalis ac facilis.*

Auferemus 2 *ex numero angulorum; auferemus et monadem a latere*[;] *residuos multiplicabimus invicem; facto addemus* 2*; summa ducta in lateris semissem, dabit polygonum quaesitum.*

V. g. vestigemus Δ^{lum} *a latere* 6*, quia triangulum tres habet angulos, subductis* 2 *restat* 1*; ex* 6 *aufer* 1 *restat* 5. *Iam* $5 \frown 1 \sqcap 5$, *adde* 2, *fit* 7, *multiplica per* $\frac{6}{2} \sqcap 3$, *fiet* 21 *triangularis numerus quaesitus.*

Ego id analytice ita enuntio: Si numerus angulorum sit b, latus sit y. Erit polygonum

$$\frac{\begin{cases} -2ay^2 \\ +b\ \ .. \end{cases}}{2} \quad \frac{\begin{cases} +4a^2y \\ -ba\ \ .. \end{cases}}{2} \quad \text{sive} \quad b-2, \frown y-1,,+2,,\frown \frac{y}{2}.$$

---

8 Ex Gosselino: *De arte magna*, 1577, Buch 1, Kap. IX, Bl. 11 r° [Marg.]. 16–18 Erit polygonum: Leibniz berechnet hier die allgemeinere Formel $((b-2a)(y-a)+2a^2)\frac{y}{2}$, in der a für die Einheit steht (vgl. N. 36 S. 366 Z. 2 f.).

Si esset $\frac{e}{a}y^2+ely+el^2-\beta e^2$ iniri poterit summa, fractionum ab ipsis denominatarum, ut alibi a me inventum est. Sunt autem $e.\ a.\ \beta.$ datae; iam ut termini ubique conferri

---

601,18 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{r} b-2 \\ \underline{y-1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3-2 \sqcap 1 \\ 6-1 \sqcap 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2y+2 \\ \underline{+b..-b} \\ +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2y+4 \\ \underline{+b..-b} \\ \frac{y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -y^2+2y \\ \underline{+\frac{b}{2}.. \quad -\frac{b}{2}..} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \boxed{\begin{array}{r} -36 \\ 54\ \boxed{+3 \frown 18} \end{array}} & \begin{array}{r} +12 \\ -9 \end{array} & \\ 18 & \overline{+3} & \sqcap 21 \end{array}$$

2 datae; *(1)* | iam *streicht Hrsg.* | termini conferantur, fiet: $-2a+b \sqcap 2e$ et $e \sqcap \frac{-2a+b}{2}$ *(2)* iam *L*

14–16 *(1)*
$$\left.\begin{array}{cc} -9 & +6 \\ \boxed{+\frac{3}{2} \frown 9} & \boxed{-\frac{3}{2} \frown 3} \\ \frac{27}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{27-9}{2} \sqcap \frac{18}{2} \sqcap 9$$
(2)
$$\begin{array}{r} \boxed{\begin{array}{r} -36 \\ 54\ \boxed{+3 \frown 18} \end{array}} \\ 18 \end{array}$$
L

---

2 alibi: N. 38_{16} S. 532 Z. 5 – S. 533 Z. 6.

possint scribatur: $2ez^2 + 2elz + 2el^2 - 2\beta e^2$. Et in polygono pro y. pone $z + f$. fiet $y^2 \sqcap z^2 + 2fz + f^2$ et iam ordinando:

$$\begin{array}{cccccc} - & 2az^2 & - & 4faz & - & 2af^2 \\ + & b.. & + & [2]bf.. & + & bf^2 \\ & & + & 4a^2\,.. & + & 4a^2f \\ & & - & ba\,.. & - & baf\;\;. \end{array}$$

Conferantur termini terminis: $e \sqcap \dfrac{-2a+b}{2}$. $l \sqcap \dfrac{-4fa + [2]bf + 4a^2 - ba}{2e \sqcap -2a+b}$.

$[2e]l^2 \sqcap -2af^2 + bf^2 + 4a^2f - baf + 2\beta e^2$. Quibus valoribus inter se iunctis habebitur valor ipsius f. pariter et l. Quibus obtentis poterit inveniri fractionum omnium a polygonis denominatarum, numeratorem constantem habentium summa. In triangulo ipsa f. necessaria non est.

Summam habens seriei $\dfrac{1}{y^2 + ly + l^2 \atop -\beta^2}$ quaeritur summa huius seriei: $\dfrac{1}{z^2 + \frac{1}{2}\beta z}$.

Pone $z \sqcap y + d$. erit $z^2 \sqcap y^2 + 2dy + d^2$. et $\dfrac{1}{2}\beta z$. erit $\sqcap \dfrac{1}{2}\beta y + \dfrac{1}{2}\beta d$. et conferendae erunt

$$\text{formulae hae:}\quad \left\{ \begin{array}{cccccc} y^2 & + & ly & + & l^2 \\ & & & - & \beta^2 \\ \\ y^2 & + & 2dy & + & d^2 \\ & + & \frac{1}{2}\beta.. & + & \frac{1}{2}\beta d. \end{array} \right.$$

Erit $l \sqcap 2d + \dfrac{1}{2}\beta \sqcap \dfrac{4d+\beta}{2}$, et $l^2 \sqcap \dfrac{16d^2 + 8d\beta + \beta^2}{4}$. $l^2 - \beta^2 \sqcap d^2 + \dfrac{1}{2}\beta d$, ergo

$$\frac{\overset{12}{\boxed{16}}d^2 + \overset{6}{\boxed{8}}d\beta \boxed{+\beta^2} - \overset{3}{\boxed{4}}\beta^2}{\cancel{4}} \sqcap \frac{\boxed{4d^2} + \boxed{2\beta d}}{\cancel{4}}$$ sive $4d^2 + 2d\beta \sqcap \beta^2$, sive $d^2 + \dfrac{1}{2}d\beta + \dfrac{1}{16}\beta^2 \sqcap \dfrac{1}{16}\beta^2 + \dfrac{\beta^2}{4} \sqcap \dfrac{5\beta^2}{16}$ et erit $d + \dfrac{1}{4}\beta \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{5}}{4}$, sive $d \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{5}, -\beta}{4}$.

4+7 2 *erg. Hrsg. zweimal* 8 2e *erg. Hrsg.* 9 ipsius f. *(1)* eademque methodo *(2)* pariter *L*

Maioris certitudinis causa cum hac serie conferamus (ex qua ista: $\begin{array}{l} y^2 + ly + l^2 \\ \qquad\qquad -\beta^2 \\ \qquad\quad + \frac{1}{2}f\beta \end{array}$ facta est): $\quad y^2 \begin{cases} +2ga & y \\ \dfrac{+f\beta}{f} & .. \end{cases} \quad \begin{cases} +g^2a^2 \\ \dfrac{+f\beta ga}{f^2} \end{cases}$, fiet : $2df \boxed{+\frac{1}{2}\beta f} \sqcap 2ga + \boxed{+f\beta}$.

Unde $4df - f\beta \sqcap 4ga$, sive $f \sqcap \dfrac{4ga}{4d-\beta}$ et $f^2 \sqcap \dfrac{16g^2a^2}{16d^2 - 8d\beta + \beta^2}$.

Iam $2d^2f^2 + \beta df^2 \sqcap 2g^2a^2 + 2f\beta ga$.

$$\frac{16g^2a^2}{16d^2 - 8d\beta + \beta^2} \qquad\qquad \frac{4ga}{4d-\beta}$$

Unde:

$\boxed{32d^2g^2a^2} + \boxed{\overset{24}{\overset{32}{\boxed{16}}}}\,\beta dg^2a^2 \sqcap \boxed{32d^2g^2a^2}\ \boxed{-16d\beta g^2a^2}\ \boxed{+2\beta^2g^2a^2}\ \boxed{+8\beta g^2a^2 4d} - \overset{6}{\boxed{8}}\,\beta g^2a^2\beta$ fiet $4d \sqcap -\beta$ seu $d = \dfrac{-\beta}{4}$. Sed ita ex formula proposita $\begin{array}{l} y^2 + 2d\,y + d^2 \\ \quad +\frac{1}{2}\beta.. + \frac{1}{2}\beta d \end{array}$ fiet:

1–4 ex qua ... facta est: Leibniz übernimmt die folgende Formel aus N. 38_{16} S. 529 Z. 2.
10 Leibniz übersieht den Faktor 4 im vorletzten Term der rechten Seite der Gleichung, deren Reduktion $0 = -6\beta^2g^2a^2$ ergäbe. Im weiteren Verlauf treten zusätzliche Rechenfehler auf: Konsequent gerechnet müßte in S. 605 Z. 1 $y^2 - \dfrac{\beta^2}{16}$ stehen, in S. 605 Z. 3 $f \sqcap \dfrac{4ga}{8d}$ sowie $f \sqcap \dfrac{-2ga}{\beta}$; in S. 605 Z. 12–14 fehlt der Term $+16c\beta^2gay$ hinter der Klammer und in S. 605 Z. 14 müßte $-4g^2a^2\beta y$ im Nenner des ersten Bruches stehen.

$y^2 - \frac{\beta}{2}y + \frac{\beta^2}{16}$, sive $y^2 \; * -\frac{\beta^2}{8}$.

$+\frac{\beta}{2} \,..\, - \frac{\beta^2}{8}$

At $f \sqcap \frac{ga}{8d}$ sive $f \sqcap \frac{-ga}{2\beta}$.

Igitur ex quantitate: $\mp \frac{cy+da}{fy+ga} \pm \frac{\begin{matrix}cy+c\beta\\ +da\end{matrix}}{\begin{matrix}fy+f\beta\\ +ga\end{matrix}}$ fiet: $\mp \frac{cy - \frac{\beta a}{4}}{-\frac{ga}{\beta}y + ga} \pm \frac{\begin{matrix}cy+c\beta\\ -\frac{\beta a}{4}\end{matrix}}{\begin{matrix}\frac{-ga}{2\beta}y + \boxed{-}\frac{ga}{2}\\ \boxed{+ga}\end{matrix}}$

sive: $\mp\frac{4c\beta y - \beta^2 a}{-2gay+4ga\beta} \pm \frac{\begin{matrix}4c\beta y + 4c\beta^2\\ -\beta^2 a\end{matrix}}{-2gay+2ga\beta}$.

$$\frac{\begin{array}{l}\mp\left\{\begin{array}{rrr} -8c\beta gay^2 & +2\beta^2a^2gy & \\ & -8c\beta^2ga.. & -2\beta^3a^2g\end{array}\right. \\ \pm\left\{\begin{array}{rrr} -8c\beta ga.. & -8c\beta^2ga.. & +16ga\beta^3c \\ & 2ga^2\beta^2.. & -4ga^2\beta^3\end{array}\right.\end{array}}{\begin{array}{rrr} 4g^2a^2y^2 & -8g^2a^2\beta y & +8g^2a^2\beta^2 \\ & -8g^2a^2\beta.. & + \end{array}} \quad \text{sive} \quad \frac{\pm 16ga\beta^3c \mp 2ga^2\beta^3, \smile 4g^2a^2}{y^2-4\beta y+2\beta^2}.$$

1+3 $-\frac{\beta^2}{8}$. *(1)* Sed hoc nihil noceret, nisi inde quantitas ipsius f. fieret infinita, nam 4d $-\ \beta \sqcap 0$ *(2)* At *L*

5 ex quantitate: Leibniz übernimmt die folgende Formel aus N. 38₁₆ S. 530 Z. 1–8.

42. DE GENERALIBUS CALCULIS CONSTITUENDIS
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung:

L Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 228. 1 Ausschnitt ca 20,9 x 1,2 cm. 1 1/2 Z. auf Bl. 228 r°. Bl. 228 v° leer. — Spuren fremden Textes an der oberen und unteren Schnittkante.
E (mit dt. Übs.): Knobloch, *Übersicht*, S. 4.
Cc 2, Nr. 1514

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden. Mit der Summierung von Reihen mittels der Berechnung von Momenten befaßt sich Leibniz hauptsächlich ab Oktober 1674 (vgl. N. 38, N. 40, N. 45). Ähnliche Überlegungen wie in der vorliegenden Notiz äußert Leibniz detaillierter im Schlußabschnitt von N. 43_3 vom Januar 1675. N. 42 dürfte also in der Zeit von Oktober 1674 bis Januar 1675 entstanden sein.

Constituendi generales calculi de summis, et summis summarum et momentis ex basi vel vertice. Hinc praeclara admiranda et generalia habebuntur.

43. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS
Januar 1675

Die folgenden drei Stücke stehen in einem engen Zusammenhang und sind von Leibniz unter eine Überschrift gestellt worden. Den im ersten Teilstück durchgeführten Ansatz überprüft er im zweiten mittels Kontrollzahlen, wobei er im ersten Teilstück Kontrollzahlen, Neunerproben und Nebenrechnungen sowie eine Schlußbemerkung nachträgt. Das dritte Teilstück setzt die Betrachtung fort.

43$_1$. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS PRIMA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 1. 1 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1 v° leer. Links Rand max. 6 cm. Am Rande Nebenrechnung zu N. 43$_2$ (= S. 625 Z. 6–18).
Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675

De seriebus summabilibus,

$$\text{et in specie hac: } \frac{1}{z^2 + \frac{\beta}{2}z \quad *}$$

Reperi duo maxima geometriae problemata reduci ad summam huius seriei numerorum rationalium decrescentis in infinitum productae, $\dfrac{1}{z^2 + \frac{\beta}{2}z \quad *}$ ponendo z esse indeterminatam progressione arithmetica crescentem, sive primanam, 1.2.3.4.5. etc. vel 1.3.5.7. etc. vel 2.5.8.11. etc. et β esse huius arithmeticae progressionis intervallum, ac proinde quantitatem eandem perpetuo et constantem.

15 *erg. L* 17 f. indeterminatam *(1)* geometrica *(2)* progressione *L*

16 problemata: Gemeint sind die Kreis- und die Hyperbelquadratur; s. u. N. 43$_3$.

Ut autem appareat, an haec series sit summabilis, nullam hactenus aliam novi methodum, quam ut omnium serierum summabilium, ipsi seriei datae, aut eius multiplae similium, fiat enumeratio. Reperta enim a me ratio est, si quis laborem calculi subire velit, enumerandi series numerorum summabiles omnes. Nimirum series sunt summabiles, quae sunt differentiae serierum. Itaque series p u r a s , atque r a t i o n a l e s , id est in quibus quantitas indeterminata non ingreditur ullam radicem, enumerare incipiemus, earumque differentias investigare. Quod si hac methodo res non succedit, videndum est, quibus casibus effici potest, ut serierum irrationalium aut non purarum, differentiae tamen fiant rationales et purae.

Incipiemus a rationalibus et puris, ex quibus simplicissima,

$$\text{(I)}\ \frac{y+d}{y+g}\text{: et differentia: (II)}\ \pm\frac{y+d}{y+g}\mp\frac{\begin{array}{c}y+\beta\\+d\end{array}}{\begin{array}{c}y+\beta\\+g\end{array}}$$ qua reducta multiplicando per crucem

$(\times)$ fiet

$$\text{(III)}\ \begin{array}{llll}\boxed{\pm y^2} & \boxed{\begin{array}{c}\pm dy\\ ..\beta..\\ ..g..\end{array}} & \begin{array}{l}\pm\ \beta d\\ ..\ \boxed{g\,..}\end{array} & \smile\ \begin{array}{l}y^2+2g\,y+g^2\\ \quad+\ \beta\,..+\beta g\end{array}\\ \boxed{\mp y^2} & \boxed{\begin{array}{c}\mp \beta y\\ ..d..\\ ..g..\end{array}} & \begin{array}{l}\mp\ g\beta\\ ..\ \boxed{gd}\end{array} & \end{array}$$

et destructis destruendis atque ordinando in modum fractionis fiet: (IV) $\dfrac{\pm\beta d\mp g\beta}{\begin{array}{c}y^2+2gy+g^2\\ +\beta\ ..+\beta g\end{array}}$.

Quod si ab initio posuissemus (V) $\dfrac{y+d}{fy+ga}$ habuissemus: (VI) $\dfrac{\pm\beta df\mp g\beta a}{\begin{array}{c}f^2y^2+2fagy+a^2g^2\\ +f^2\beta\ ..+agf\beta\end{array}}$. (ℵ)

Idque utilius arbitror. Porro quoniam inventa haec series, cuius formula (ℵ) eundem constantem habet numeratorem, negligi poterit ille, et formula eius conferri cum hac,

3 a me *erg. L* 4 numerorum *erg. L* 5 differentiae *(1)* summab *(2)* serierum *L* 12 reducta | fiet *streicht Hrsg.* | multiplicando *L*

$\dfrac{1}{f^2y^2+f^2by+f^2ca}$. Unde quoniam termini primi iidem, conferendo secundos, fiet aequatio haec: $2ag+f\beta \sqcap fb$. Unde $g \sqcap f, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}$ et $a^2g^2 \sqcap \dfrac{f^2}{4} \frown b^2-2b\beta+\beta^2$, eosque valores inserendo in aequationem $a^2g^2+agf\beta \sqcap f^2ca$ ex terminis ultimis collatis natam, fiet, $a^2f^2 \frown \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2}{4}, +f^2\beta \frown \dfrac{b-\beta}{2} \sqcap f^2ca$. et ipsa f^2 per divisionem evanescente fiet $c \sqcap \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2+2b\beta-2\beta^2}{4a}$ sive $\underline{\underline{c}} \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4a}$. Itaque formula omnis, cuius series, summatrix, pura et rationalis, poterit reduci ad hanc: (ב) $\dfrac{1}{y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$. Ex hoc calculo apparet, etiam f. fuisse inutilem. Iam cum hac serie inventa (ב), conferri non potest data (ג). Sequeretur enim $\dfrac{\beta}{2} \sqcap b$. ex collatis terminis secundis, ponendo $z \sqcap y$ et $\beta \sqcap b$ ex collatis ultimis. Quod implicat. Quod si explicemus z per $y+d$. ex formula (ג), fiet (ה) $\dfrac{1}{\begin{array}{c} y^2+2dy+d^2 \\ +\dfrac{\beta}{2} \,..\, +\dfrac{\beta d}{2}\end{array}}$. Unde collatis formulis (ה) et (ב), ob terminos secundos, fiet: $b \sqcap \dfrac{4d+\beta}{2}$, sive $b^2 \sqcap \dfrac{16d^2+8d\beta+\beta^2}{4}$. Sed ob terminos ultimos, fiet alius valor, ipsius b^2, nempe $4d^2+2\beta d+\beta^2$. Contradictio ergo, sive differentia inter hos duos valores est $\dfrac{3\beta^2}{4}$. Eadem autem erat supra contradictio sive differentia, inter duos ipsius b^2, valores

4 $\sqcap$ f^2ca. *(1)* destructaque omn *(2)* in *(3)* et *L* 4 f. evanescente *(1)* fiet c $\sqcap$ *(2)* et ponendo b $-$ a $\sqcap$ d. (quoniam nulla hic confusio metuenda, quandoquidem superiore ipsius d significatione non amplius opus habemus,) sive $\underline{\underline{\mathrm{b}}}$ $\sqcap$ d + a. fiet $\underline{\underline{\mathrm{c}}}$ $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{ad}^2+\mathrm{d}\beta^2}{\beta^2}$. Formula ergo omnis, cuius series summatrix pura et rationalis, non assurgit ultra primanos; ad hanc reduci potest: $\dfrac{1}{\begin{array}{c}\mathrm{y}^2+\mathrm{dy}+\mathrm{ad}^2 \\ +\mathrm{a}..+\beta^2\mathrm{d}\end{array}}$ *(3)* fiet *L* 8 data (ג). *(1)* ponendo enim $\dfrac{\beta}{2}$ $\sqcap$ b. Ergo $\dfrac{\beta^2}{4}$ $\sqcap$ b^2 ob terminos secundos, impossibile est ergo esse b $\sqcap$ β ut sequeret *(2)* Sequeretur *L* 10 terminos *(1)* ultimos, fiet *(2)* secundos *L* 12 terminos *(1)* primos *(2)* ultimos, | fiet: *streicht Hrsg.* | fiet *L*

nempe $\frac{\beta^2}{4}$ et β^2. Patet ergo explicationem impossibilitati non mederi. Quod generaliter demonstrari operae pretium foret. Plurimum enim calculos contrahit haec observatio. Demonstrabitur autem optime conferendo formulam quandam indeterminatam, modo explicatam, modo non explicatam, cum quadam alia indeterminata: Hoc modo: Sit formula: $y^3+by^2+acy+a^2d$. conferenda cum formula alia simili $y^3+ey^2+afy+a^2g$, vel eius explicatione, si in locum ipsius y in posteriore substituatur $y+h$, ita enim non desinet esse similis: sed ita aio si collatio inter non explicatas impossibilis, fore et inter explicatas; nam si non explicatas conferas, literae fiunt eaedem, erit enim $b \sqcap e$. et $c \sqcap f$. et $d \sqcap g$. (in quibus valoribus continetur impossibilitas). Idem ergo est conferre aequationem explicatam cum alia, quod conferre cum se ipsa non-explicata; explicatio ergo mutat nihil. Nempe [si] pro $z^2+\frac{\beta}{2}z\,*$. ponas z^2+z+ac, et cum eo conferas $y^2+by+\frac{b^2-\beta^2}{4}$ sive si id cum $y^2+2dy+d^2$ conferas, sive conferas cum $y^2+ly+am$. Itaque antea conferas has duas

$$\begin{array}{l} +e\ ..\ +ed \\ \qquad\ +ac \end{array}$$

novissimas formulas, nempe ex secundis $e \sqcap l-2d$. ergo erit $am \sqcap \boxed{d^2}+ld, -\boxed{2}d^2+ac$. Unde $y^2+ly+ld$, adeoque $l \sqcap b$. etc. Sed nota si explicatio mutet gradum formulae, ut

$$\begin{array}{l} -d^2 \\ +ac \end{array}$$

si pro z ponatur y^2 etc. aliterve tunc fieri posse, ut postea succedat collatio. Sed haec obiter.

Uno iam gradu altius ad formulam quadratricem altiorem assurgamus:

$$\text{VII}\quad \frac{y^2+ny+ap}{\frac{q}{a}y^2+ry+as}.\ \text{et differentia erit:}\ \text{VIII}\ \dagger\ \frac{y^2+ny+ap}{\frac{q}{a}y^2+ry+as}\ \ddagger\ \frac{\begin{array}{rrr} y^2+2\beta y & & +\beta^2 \\ +\ n & .. & +n\beta \\ & & +ap \end{array}}{\begin{array}{rrr} \frac{q}{a}y^2+2\beta\frac{q}{a}y & & +\frac{q}{a}\beta^2 \\ +\ r & .. & +r\beta \\ & & +as \end{array}}.$$

6 in *(1)* eius locum substitu *(2)* locum *L* 11 si *streicht L, erg. Hrsg.* 11 et *(1)* conferas cum $\frac{1}{y^2+by}$ *(2)* cum *L* 16 explicatio *(1)* contineat praeterea *(2)* mutet *L* 21 altius *(1)* | assurgamus *streicht Hrsg.* | ad formulam: *(2)* ad *L*

Qua formula reducta apparebit, non assurgi altius quam si l. et n. fuissent $\sqcap 0$. nempe etsi in speciem nominator huius differentiae reductae assurgat ad quadratoquadratum, tamen quadratoquadrato, et cubo destructis, in numeratore restabit tantum quadratus cum radice. Nominator vero utique ad quadratoquadratum assurget. Facta ergo multiplicatione per crucem, fiet numerator IX

$$
\begin{array}{llllllll}
-50 & \dagger \dfrac{qn}{a}\beta & y^2 & -\;6 & \dagger 2qp\beta & y & -\;3 & \dagger qp\beta^2\;. \\
 & & & -\;2 & ..\,\dfrac{qn}{a}\beta^2 & .. & -12 & ..\,rpa\beta \\
+4[\frown 25] & \dagger r\beta & .. & +12 & \dagger 2as\beta & .. & +\;6 & \dagger as\beta^2 \\
 & & & \underline{+\;4} & ..\,r\beta^2 & .. & \underline{+12} & ..\,nsa\beta \\
 & & & 8\frown 5 & & & 3 & \\
 & & & 40 & & & & \\
 & \boxed{q.n.r.} & & & \boxed{\begin{array}{l}q.n.r.\\ p.s.\end{array}} & & & \boxed{\begin{array}{l}q.n.r.\\ p.s.\end{array}}
\end{array}
$$

Quem conferamus cum alia formula, $ady^2 + a^2ey + a^3f$. Hinc opeque huius collationis investigabimus literas, ipsi numeratori proprias, n. et p. nam reliquae, q, r, s. sunt ipsi cum nominatore communes, nempe ex terminis primis $n \sqcap \dagger \dfrac{a^2d}{q\beta} + \dfrac{ra}{q} \sqcap \dagger \dfrac{a^2d + ra\beta}{q\beta}$ et ob terminos secundos, $p \sqcap \dfrac{\dagger a^2e \dagger ad\beta -r\beta^2 + 2as\beta +r\beta^2}{2q\beta}$ et ob terminos ultimos,

---

6–11

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Kontrollrechnung}: & +50 \\
 & +40 \\
 & \underline{+\;3} \\
 & \;\;93 - 46 \sqcap 47
\end{array}
$$

3 in numeratore *erg. L* 8 $\frown$ 25 *erg. Hrsg.* 14 Hinc *(1)* in collatis terminis primis q $\sqcap$ *(2)* opeque *L* 16 ex … primis *erg. L*

6–11 u. S. 612 Z. 1–3: Leibniz verwendet die Kontrollzahlen $a = q = \beta = 1$, übernimmt von N. 46₂ S. 621 Z. 10 die Werte $y = 5, n = 2, p = 3, r = 4, s = 6$ und setzt $\dagger$ gleich $-$. Für die Neunerprobe in S. 612 Z. 1–3 kommen die Werte $e = 8$ und $d = 2$ hinzu. — Vgl. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

$$\begin{array}{l}
\quad\ 4 \qquad\qquad 8 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 \\
f \sqcap + q\beta\ a\cancel{2}e - q\beta\cancel{d}d\beta \ddagger 2q\beta\cancel{d}s\beta \ \ddagger 2\cancel{d}s\beta^2,\ -2a^2ds\cancel{d}\boxed{\ddagger 2ra\beta s\cancel{d}},, \smile 2qa^2, \text{ et fiet nume-} \\
\qquad ra\ \ldots \qquad ra\ \ldots \qquad \boxed{.ra\ \ldots}
\end{array}$$

$$\text{rator: } \frac{\begin{array}{l} ady^2 + a^2ey \ddagger a\beta^2 s - \ \beta^2\,d\,q + \beta a\,e\,q \ddagger 2\beta^2 qs \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \ a\beta\ \cdot r + a^2\ \cdot r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 2a^2\ \cdot s \end{array}}{\dfrac{2q}{a}}$$

Nominator vero formulae VIII erit

$$\begin{array}{llll}
\text{X}\ 625)\dfrac{q^2}{a^2}y^4 8) + \dfrac{2qr}{a}\ \ y^3\ 12) + 2qs & y^2 & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 16) + \quad r^2 & ..\ \ 48) + 2rsa\ \ y\ 36) + a^2s^2 & & \\
\quad + \dfrac{2\beta q^2}{a^2}\ \ldots \quad \boxed{+\dfrac{qr\beta}{a}\qquad ..} & & & \\
\qquad\qquad\qquad + \dfrac{3\,2\,\beta qr}{a}\ .. & + r^2\beta\ \ \cdot & & \\
 & + 2\beta qs\ \cdot & + asr\beta & \\
\qquad\qquad\qquad + \dfrac{q^2}{a^2}\beta^2\quad .. & + \dfrac{rq\beta^2}{a}\ \cdot & + sq\beta^2 &
\end{array}$$

9–14 *Neben- und Kontrollrechnungen*:

5	48	125	28
25	5	8	25
125	240	1000	140
5			56
625			700

---

2 $\ddagger 2\cancel{d}s\beta^2$: Richtig wäre $\ddagger 2qs\beta^2$; da Leibniz auf S. 613 Z. 5 $q = a$ setzt, wird der Fehler kompensiert.
9–14 Vgl. Erl. zu S. 611 Z. 6–11 u. Z. 1–3.

Calculus cum eo, quem alibi inii consentit. Superest ut hanc quoque formulam X, cum alia generali, $y^4+gy^3+ahy^2+a^2ly+a^3m$ [conferamus]. Nam terminum summae dimensionis per aliquam arbitrariam multiplicare nolui, quia non possunt eiusdem fractionis omnes termini tam in numeratore, ut supposuimus, quam in nominatore, assumi arbitrarii. Itaque $\underline{\underline{q}} \sqcap a$. Instituta iam collatione ex terminis $2^{\rm dis}$ erit $r \sqcap \dfrac{g-2\beta}{2}$, et ex terminis tertiis fiet: $s \sqcap ah \begin{cases} -g^2 \quad -3\,\beta \frown \dfrac{g\boxed{-2\beta}}{2}\ \underset{+}{\boxed{-}}\beta^2,, \smile 2q \\ \boxed{+4g\beta} \\ \dfrac{\boxed{-4\beta^2}}{4} \end{cases}$ sive $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$

612,9–14

		625			625
8	$\frown$	125	$\sqcap$	1000	1000
12 16 }	$\frown$	25	$\sqcap$	700	700
48	$\frown$	5	$\sqcap$	240	240
		36			36
2	$\frown$	125	$\sqcap$	250	2601
12	$\frown$	25	$\sqcap$	300	250
1				25	325
16					160
12					24
4					6
32	$\frown$	5	$\sqcap$	160	3366
		24			
		6			

2 conferamus *erg. Hrsg.*

---

1 alibi: N. 38₁₆ S. 533 Z. 9 – S. 534 Z. 5.

et $rs \sqcap \dfrac{4ahg - g^3\boxed{-2\beta g^2}\boxed{+4\beta^2 g} - 8a\beta h\boxed{+2\beta g^2} + 8\,4\,\beta^2 g - 8\beta^3}{16a}$. Et $r^2 \sqcap$ $\dfrac{g^2 - 4g\beta + 4\beta^2}{4}$. Quos valores substituendo in aequatione ex terminis quartis collatis nata, ex $l \sqcap \dfrac{2ars + \beta r^2 + 2\beta as + \beta^2 r}{a^2}$, fiet:

$$l \sqcap 4ahg - g^3\boxed{-8a\beta h}\ \boxed{+8\beta^2 g}\ \boxed{-8\beta^3},\ \boxed{+2\beta g^2}\ \boxed{-8g\beta^2}\ \boxed{+8\beta^3},\boxed{+8\beta ah}\boxed{-2\beta g^2}$$
$$\boxed{-4\beta^2 g}\ \boxed{+8\beta^3},\boxed{+4\beta^2 g}\ \boxed{-8\beta^3},, \smile 8a^2,$$ sive $l \sqcap 4ahg - g^3, \smile 8a^2$.

Eodem modo $m \sqcap a^{\cancel{2}}s^2 + \cancel{a}\beta rs + \cancel{a}\beta^2 s, \smile a^{\cancel{3}2}$. ex collatione ultimorum, et pro s. et rs. substituendo eorum valores, ac pro s^2, ponendo:

$$\frac{\overset{\cancel{4}}{16a^2h^2} - \overset{\cancel{5}}{8ahg^2} - \overset{\cancel{1}}{16ah\beta g} + \overset{\cancel{7}}{32ah\beta^2}, +\overset{\cancel{1}}{g^4} + \overset{\cancel{4}}{4\beta g^3} - 4\overset{\cancel{5}}{\boxed{-8}}\beta^2 g^2\boxed{+4\beta^2 g^2} - \overset{\cancel{2}}{16\beta^3 g}, +\overset{\cancel{7}}{16\beta^4}}{64a^2}$$

fiet $\underset{\langle\cancel{3}\rangle}{\underline{m}} \sqcap \underset{\cancel{4}}{16a^2h^2} - \underset{\cancel{5}}{8ahg^2}\boxed{-16ah\beta g} + \underset{\cancel{7}}{32ah\beta^2} + \underset{\cancel{1}}{g^4}\boxed{+4\beta g^3}\boxed{-4\beta^2 g^2}\boxed{-16\beta^3 g} + \underset{\cancel{7}}{16\beta^4}$,

$$\boxed{+16\beta ahg}\boxed{-4\beta g^3}\boxed{-32a\beta^2 h}\boxed{+32\beta^3 g}\boxed{-32\beta^4},\boxed{+32\beta^2 ah} - 12\underset{\cancel{6}}{8}\,\beta^2 g^2\boxed{-16\beta^3 g}\boxed{+32\beta^4},,$$

$\smile 64a^3$. adeoque $m \sqcap 16a^2h^2 - 8ahg^2 + 32ah\beta^2 + g^4 + 16\beta^4 - 12\beta^2 g^2, \smile 64a^3$.

613,6 f. *Unter* $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$: Causa erroris in seqq. quod hic pro $4\beta^2$. scripseram β^2.

613,6+7 $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$: Leibniz hat den Faktor 4 im letzten Term des Zählers zunächst vergessen. Der Fehler pflanzt sich fort bis S. 619 Z. 3. Auf S. 619 Z. 8 f. entdeckt Leibniz eine andere Unstimmigkeit und überprüft daraufhin die Rechnung auf dem folgenden Bogen sowie durch Rechenkontrollen S. 611 Z. 6–11, S. 612 Z. 1–3, S. 612 Z. 9–14, S. 613 Z. 6, Z. 8–13 u. S. 619 Z. 2. In N. 43_2 S. 624 Z. 3 f. erkennt er die Ursache des ersten Fehlers und verbessert von S. 613 Z. 7 – Z. 14. Die Neunerprobe S. 613 Z. 6 mit den Werten $g = 10$ und $h = 41$ von N. 46_2 S. 622 Z. 18 sowie die restliche Rechnung korrigiert er nicht. 8 Vgl. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

Formula ergo, cuius summatrix ascendit ad quadratum, ad hanc semper fractionem reduci poterit: $dy^2 + aey + a^2 f \ \smile \ y^4 + gy^3 + ahy^2 + a^2 ly + a^3 m$, modo explicentur, $m, l, f.$ per solas a, β, d, e, g, h. Valores autem ipsarum m, et l, ita habemus inventos per has solas. Tantum ergo opus est, ut in valore ipsius f, ipsae $r.$ et $s.$ explicentur. $q.$ quoque explicanda est per a. Habebimus ergo hunc valorem ipsius f,

$$f \ \sqcap \ \boxed{8a^2\beta e}, + 4ga^2e \boxed{-8\beta a^2 e}, \boxed{-8a\beta^2 d}, \boxed{-4ga\beta d}\boxed{+8\beta ad\beta}, \boxed{\dagger 2qs\beta^2 \dagger 2as\beta^2},$$

$-8a^2dh + 2adg^2 \ \boxed{+4ad\beta g} - 2ad\beta^2,, \smile 16a^3$, adeoque destructis destruendis, et deprimendo per $2a$, fiet $f \sqcap +2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d, \smile 8a^2$. Itaque formula quaelibet seriei summabilis per aliam seriem quadratricem ad quadratum nec ultra assurgentem, reduci poterit ad formulam hanc,

(XI)

$$dy^2 + aey + \frac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}, \smile \ y^4 + gy^3 + ahy^2 + \frac{4ahg - g^3 - 3\beta^2 g}{8}\ y + \frac{16a^2h^2 - 8ag^2h + 8a\beta^2 h - 6\beta^2 g^2 + g^4 - \beta^4}{64}.$$

Proposita autem formula seriei cuius summatrix quaeritur, ante omnia reddenda est huic formulae similis, ideoque necesse est dimensionum huius numerum non excedere; aut si excedat, debet divisibilis esse, sive debent numerator et nominator habere communem mensuram. Sin infra numerum dimensionum subsidat data; impleri poterit ille, vel multiplicatione vel adiectione; multiplicatione, multiplicando datam per quandam arbitrariam formulam; adiectione, addendo ei aut subtrahendo aliam cuius summatrix nota est: nam si productae summatrix inveniri poterit, eo ipso etiam propositae summatrix reperietur; auferendo vel addendo summatricem adiectae a summatrice productae. Ubi iam formula proposita formulae summabili, nempe (XI) similis reddita est, instituenda est collatio, quae si succedit, habemus inventam seriem propositae summatricem. Sin vero collatio nos ducat ad impossibile, sequitur neque seriem propositae (aut productae ex proposita cum alia cognitae summatricis) summatricem huius cuius summatrix proposita, nempe hoc loco quadratici gradus esse.

8 quaelibet *(1)* summabilis per aliam form *(2)* seriei *L* 9 nec ultra *erg. L* 16 debet *(1)* numerator divisibilis esse, sive debet *(2)* divisibilis *L* 17 numerum *(1)* terminorum *(2)* dimensionum *L* 18 vel *(1)* additione *(2)* adiectione *L* 20 f. reperietur; *(1)* addendo *(2)* auferendo *(a)* si *(b)* vel *L* 22 proposita *(1)* quadrabili *(2)* formulae *L*

Haec iam in formula data ג, et summatrice XI. experiamur; ac primam seriem $\dfrac{1}{z^2+\dfrac{\beta}{2}z \quad *}$ ponendo $z \sqcap y$ multiplicemus per $dz^2 + aez + \dfrac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}$.

Fiet numerator productus idem cum numeratore formulae XI. ponendo esse $x \sqcap y$ quod alioqui necessarium erat, quia numerator formulae huius, ג, est 1. Ergo superest, ut nominatorem formulae ג, multiplicando per numeratorem formulae XI. conferamus productum cum nominatore formulae XI. productum erit

$$\text{XII}\quad \begin{array}{llll} dy^4 & +\dfrac{d\beta}{2}\,y^3 & & * \\ & +ae\ \ \ldots\ + & \dfrac{ae\beta}{2}\,y^2 & \\ & & +\dfrac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}\ \ldots\ +\dfrac{2aeg\beta - 4adh\beta + dg^2\beta - \beta d}{16}\,y & * \end{array}$$

Quae formula conferatur nominatori formulae XI. per $\underline{d}$. multiplicato, $dy^4 + dgy^3 + adhy^2$ etc. etc. Unde termini primi iidem. Et conferendo secundos, $e \sqcap \dfrac{2gd - \beta d}{2a}$. Et ex collatis tertiis fiet: $3\,4\,\cancel{d}gd\beta - 2\cancel{d}\beta^2 d + 2\cancel{d}g^2 d\ \boxed{-\cancel{d}\beta g d}\ - 4adh + dg^2 - \beta^2 d, -8adh \sqcap 0$, sive fiet, $h \sqcap 3g\cancel{d}\beta - 2\cancel{d}\beta^2 + 2\cancel{d}g^2 + \cancel{d}g^2 - \beta^2\cancel{d}, \smile 12a\cancel{d}$.

Collatis quartis poterunt omnia dividi per d, proinde ipsa d. est inutilis, cumque duae supersint aequationes, una ex collatis quartis, altera ex collatis ultimis sive quintis terminis; arbitraria autem non nisi unica sit, quae restet, nempe g. cum d. sit inutilis; patet collationem impossibilem esse. Potuissem loco formulae ג adhibere formulam ה, sed calculus erit prolixus, effectus vero quantum iudicare licet, idem.

Itaque ad alteram methodi partem recurrendum est, et ipsi $\dfrac{m}{\dfrac{s}{a}y^2 + \dfrac{\beta}{2}y \ *}$ addenda formula ב, $\dfrac{n}{\dfrac{a}{s}y^2 + by + \dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$.

$$\frac{ma}{s}y^2 + mb\,y + \frac{mb^2 - m\beta^2}{4}$$

2 ponendo z ⊓ y *erg. L* 3 ponendo ... x ⊓ y *erg. L* 11 Unde *(1)* conferendo terminos primos, sequitur esse d ⊓ a. et e ⊓ g *(2)* termini *L* 14 quartis *(1)* habebitur pure ipsa d. nempe fiet 8ah *(2)* poterunt *L* 15 collatis *(1)* tertiis *(2)* quartis *L* 19 et *(1)* | ipsi *streicht Hrsg.* | *(2)* form *(3)* ipsi *L*

$$\text{Summa: } \frac{\frac{ns}{a} \,..\, + \frac{\beta n}{2} \,..}{y^4 + \frac{bs}{a} y^3 + \frac{s}{a} \frown \frac{b^2 - \beta^2}{4} y^2 + \frac{\beta a}{2s} \ldots + \frac{\beta b}{2} \,..\, + \frac{\beta b^2 - \beta^3}{4} y} \quad \text{XIII} \,.$$

Quae formula XIII. conferenda cum formula XI, numerator primum cum numeratore, ubi conferendo terminos primos, fiet: $m \sqcap \dfrac{dsa - ns^2}{a^2}$, et ex secundis collatis fiet, $e \sqcap 2dsab - 2ns^2b + a^2\beta n, \smile\ 2a^3$; et ex tertiis fiet: $2dsabg - 2ns^2bg + a^2\beta ng, -4a^3dh + da^2g^2 - \beta^2a^2d \sqcap +2dsab^2 - 2ns^2b^2, +2dsa\beta^2 - 2ns^3\beta^2$ XIV . In qua aequatione num. [XIV.] sunt arbitrariae d, s, n, b, g, h, et cuiusnam autem valorem eius ope inveniri satis sit, patebit ex progressu. Nam ex istis 6 literis arbitrariis alicuius quae et in nominatore reperitur quaerendus est valor; nempe ex his, $s.b.g.h$. Si hae 4 literae in nominatore collationi non satisfaciunt, ut scilicet hoc modo, et reliquae, d, n, in nominatorem gliscant; sin illis careri potest, interest ad calculi compendium, ipsas in nominatorem non intrare; id ergo primum in nominatore excutiendum est. Nimirum ex secundis ipsius nominatoris, $2s^2b + \beta a^2 \sqcap 2gas$, adeoque $b \sqcap 2gas - \beta a^2, \smile\ 2s^2$. Et $b^2 \sqcap 4g^2a^2s^2 - 4ga^3s\beta + \beta^2a^4, \smile\ 4s^4$. Unde in terminis tertiis fiet: $4g^2a^2s^2 - 4ga^3s\beta + \beta^2a^4, -4as^3\beta^2, +8\beta asgas - 4\beta as\beta a^2, \sqcap 16as^3ah$, cuius aequationis ope quaeri potest valor ipsius s, per extractionem radicis cubicae. Penultima dabit sequentem valorem ipsius h, nempe $h \sqcap +4s^4g^3 + 12s^4\beta^2g, +4g^2a^2s^2\beta - 4ga^3s\beta^2 + \beta^3a^4 - 4s^4\beta^3, \smile\ 16ags^4$. Et denique ex ultimis fiet: $16a^2h^2 - 8ag^2h + 8a\beta^2h - 6\beta^2g^2 + g^4 - \beta^4 \sqcap 0$. Quarum trium aequationum ope inveniri poterit valor trium incognitarum, nempe, s, h, g.

---

11 *Über* gliscant: intret. *Am Rande*: Imo frustra efficiemus ut literae numeratoris intrent in nominatorem, nam si semel literarum quales sunt collatio impossibilis, erit etiam impossibilis valore quolibet substituto.

1 *(1)* Numerator *(2)* Summa *L* 4 $\dfrac{\mathrm{dsa - ns^2}}{\mathrm{a^2}}$, *(1)* et ex secundis $\dfrac{\mathrm{2ds\cancel{a}b - 2ns^2\cancel{a}b + \beta na^{\cancel{2}}}}{\mathrm{\cancel{2a^2}}} \sqcap \mathrm{2a^3e}$, sive $\mathrm{n} \sqcap \dfrac{\mathrm{2ae - 2db}}{}$ *(2)* et *L* 6 f. num. *(1)* XIV. *(2)* | XIII. *ändert Hrsg.* | sunt *L* 8 progressu. *(1)* Nam si ipsius nominatoris literae, in *(2)* Nam *L* 12 f. Nimirum *(1)* bs *(2)* ex *(a)* primis *(b)* secundis *L* 14 terminis *(1)* secundis *(2)* tertiis *L* 16 cubicae. *(1)* Et quoniam duae quae restant aequationes collatitiae, ex terminis penultimis et ultimis, ipsam s. non amplius continent. Missa ergo tantisper hac aequatione, reliquas duas excutiamus, et *(2)* Penultima | quidem *gestr.* | dabit *L*

Quod si nulla harum trium aequationum impossibilis, habebimus desideratum. Quod si aliter rem instituamus, et ope XIV quaeramus h. tunc omnes reliquae, $d.n.s.g.b.$ ingredientur in nominatorem, et cum aequationes collatitiae in nominatore futurae sint tantum quatuor; erunt indeterminatae quinque, ac proinde una supernumeraria, cuius ope poterit ultima aequatio reddi quam simplicissima, et si licet pura, quo facto et reliquae omnes literae pure habebuntur. Sed antequam absolvendi eius calculi sic satis prolixi laborem suam, operae pretium erat investigare in numeris veritatem formularum $\beth$ et XI. Et quidem quod ad formulam $\beth$, quae coincidit formulae IV. illud reperimus, si qua data sit series cuius formula reducta ad $\beth$, vel sumto numeratore ex IV, nominatore ex $\beth$, ad hanc, $\dagger \beta d \dagger gb\ , \smile y^2 + by + \dfrac{b^2 - \beta^2}{4}$, vel (: pro g substituendo eius valorem supra inventum, $\dfrac{fb - f\beta}{2a}$:) ad hanc:

$$\odot\ \boxed{\dagger \beta d\ \frac{\ddagger fb^2 \dagger f\beta b}{2a} \smile y^2 + by + \frac{b^2 - \beta^2}{4}},$$

tunc formulam s e r i e i s u m m a t r i c i s esse (I) nempe $y + d \smile y + g$, vel (: explicando g :) $☽\ \boxed{y + d \smile y\ \dfrac{+fb - f\beta}{2a}}$. Eodem modo reperimus si s e r i e i s u m m a n d a e formula sit reducibilis ad hanc

$$\text{XI}\quad \boxed{dy^2 + aey + \frac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8},\ \smile\ y^4 + gy^3 + ahy^2 + \frac{4ahg - g^3 - 3\beta^2 g}{8}y + \frac{16a^2h^2 - 8ag^2h + 8a\beta^2 h - 6\beta^2 g^2 + g^4 - \beta^4}{64}}\quad ☿$$

formulam s e r i e i s u m m a t r i c i s fore VII, $\boxed{y^2 + ny + ap \smile y^2 + ry + as}$. Est autem ex superioribus

1 trium *erg.* *L* 3 et *(1)* habebitur denique *(2)* cum *L*

---

10 $\dagger \beta d \dagger gb$: Der Zähler von IV lautet richtig $\dagger \beta d \dagger g\beta$. Der Fehler wirkt sich auf Z. 12 aus. Durch die Kontrollrechnung S. 619 Z. 4–9 erkennt Leibniz die Unstimmigkeit, vermutet aber eine andere Ursache. Zu Beginn von N. 43_2 führt er die Rechnung korrekt durch. 10 supra: S. 609 Z. 2.

♀ $\underline{n} \sqcap \ddagger 2ad + g\beta - 2\beta^2 \smile 2\beta$. Et $\underline{p} \sqcap \ddagger 4a^2e \ddagger 4ad\beta + 4\beta ah - \beta g^2 - 2\beta^2 g + 4\beta^3 \smile 8a\beta$. Et
$-\cancel{32} \quad +8 \quad + \cancel{164} - \cancel{100} - \cancel{20} \quad +\cancel{1}, \smile \quad \cancel{8}$
$\underline{r} \sqcap g - 2\beta, \smile 2$, et $\underline{s} \sqcap 4ah - g^2 - 2\beta g + \beta^2, \smile 8a$.

Primum ergo ut veritatem relationis inter duas formulas ☉ et ☽ in numeris exploremus, ponamus $b \sqcap 2$. $d \sqcap 3$. $f \sqcap 4$. $a \sqcap 1$. $\beta \sqcap 1$. et ex formula ☽ fiet in numeris, $y + 3 \smile ,, y, \boxed{+8-4} + 4 \smile 2 \sqcap y + 3 \smile y + 2$, et ponendo $y \sqcap 5$, fiet: $8 \smile +7 \sqcap \frac{8}{7}$, ponendo vero $y \sqcap 6$, fiet $\frac{9}{8}$, quarum differentia $\frac{1}{56} \sqcap$ ☉. Quod videamus an sit verum: $\ddagger 3,, \ddagger 16 \dagger 8, \smile 2 \sqcap \ddagger 3 + 4,,, \sqcap 1$. quia $\dagger \sqcap -$. ex formula (II). Numerator ergo 1. Nominator vero $25 + 10 \; \frac{+4-1}{4}$ in quo cum sit error necesse erit calculum hunc ☉ et ☽ concernentem resumere scheda sequente, adiectis statim numeris. Calculus verus fuit sed error in numeris. Posito b non 2 sed 5 res successit. Vide initium plagulae sequentis, ubi et calculum sequentem ☿ et ♀ non fere nisi uno in loco comperi corruptum, ac restitui.

1 *Faktor* 4 *vor* β^3 *erg. L* 10–12 Calculus ... initium *(1)* paginae *(2)* plagulae ... restitui *erg. L* 12 nisi | in *streicht Hrsg.* | uno *L*

1 f. Zur Kontrollrechnung $+\cancel{1}$ unter $4\beta^3$ s. Lesart zu Z. 1. 10 f. Calculus ... successit: s. o. Erl. zu S. 612 Z. 2 – Vide: s. o. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

43_2. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS SECUNDA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 2 1 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 2 r°. Bl. 2 v° leer.
Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675

Pars II. schediasmatis d e s e r i e b u s s u m m a b i l i b u s ,

et in specie hac: $\dfrac{1}{z^2+\dfrac{\beta}{2}z}$ *

$$\text{ǂ}\ \llcorner\begin{array}{l}5y+1\beta\\ \ \ \ +3d\end{array}\smile\begin{array}{l}5y+1\beta\\ \ \ \ +2g\end{array}\lrcorner\ \text{ǂ}\ \llcorner 5y+3d\smile 5y+2g\lrcorner\ \sqcap$$

$$\begin{array}{ccccccc}5+4 & \smile & 5+3 & - & 5+3 & \smile & 5+2\\ 9 & \smile & 8 & - & 8 & \smile & 7\end{array}\ \sqcap\ \frac{9}{8}-\frac{8}{7}\sqcap-\frac{1}{56}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ǂ}\left\{\begin{array}{l}25y^2+1\beta\,5y+2g1\beta\\ \qquad +3d\ ..\ \boxed{..3d}\\ \qquad +2g\ ..\end{array}\right.\\[2ex] \text{ǂ}\left\{\begin{array}{l}25y^2+1\beta\,5y+3d1\beta\\ \qquad +2g\ ..\ \boxed{..3d}\\ \qquad +3d\ ..\end{array}\right.\end{array}\right\}\smile\ \begin{array}{l}25y^2+2\,2g\,5y+4g^2\\[2ex] \qquad +\ 1\beta\ ..+1\beta2g,\end{array}\qquad\sqcap$$

$$\frac{\text{ǂ}3d1\beta\ \text{ǂ}\ 2g1\beta}{\begin{array}{l}25y^2+2\,2g5y+4g^2\\ \quad +\ 1\beta\,..+1\beta2g\end{array}}\ \sqcap\ [-]\frac{1}{56}$$

Quae formula ita producta conferatur quoad nominatorem cum hac generali: $25y^2+5b5y+6ca$. Termini primi iidem sunt, collatis secundis $2g\sqcap 5b-1\beta,\smile 2$. et $4g^2\sqcap 25b^2-2\,5b1\beta+1\beta^2,\smile 4$; unde $6ca\sqcap 25b^2-2\,5b1\beta+1\beta^2,+4\,1\beta\ \overbrace{\underbrace{2g},\smile 4}^{5b-1\beta,\smile 2}$. Et ex-

19 − *erg. Hrsg.* 23 $\underbrace{2g},\smile 4$. *(1)* Unde ex formula generali fiet haec: $25y^2+5b5y$ *(2)* Unde ex formula *(3)* Et *L*

plicando g, erit $6ca \sqcap 25b^2 \boxed{-2\,5b1\beta}\boxed{+1\beta^2}, \boxed{+2\,1\beta 5b} - 1 \boxed{2}\, 1\beta^2, \smile 4$. Unde ex formula generali fiet haec ad rem accommodata, nempe $25y^2 + 5b5y + \dfrac{25b^2 - 1\beta^2}{4}$. Adeoque si formula seriei cuiusdam datae reduci queat ad hanc

$$\boxed{\boxed{\dagger 3d1\beta,, \dagger\, 5b1\beta \dagger 1\beta^2, \smile 2,,, \smile ,,, 25y^2 + 5b5y,, + 25b - 1\beta^2, \smile 4}}\ \odot$$

erit formula seriei summatricis $\dagger 5y + 3d \smile 5y + 2g$, sive explicando g, fiet:
$$\qquad\qquad\qquad\qquad +1\beta \qquad +1\beta$$

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l} 5y \ + 3d \smile 5y + \dfrac{5b - 1\beta}{2} \\ \ \ +1\beta \qquad\quad +1\beta \end{array}}}\qquad ☽.$$

Procedamus nunc ad examen formularum ☿ et ♀.

Sit formula summatrix $\left(\frac{38}{51}\right)$ $25y^2 + 2n5y + 3pa \smile 25y^2 + 4r5y + 6sa$. et differentia eiusdem formulae ab alia in qua in locum $5y$ substituta sit quantitas $5y + 1\beta$ erit

$$\begin{array}{llllllll}
\dagger_\llcorner 25y^2 + 2\,1\beta\,5y + & 1\beta^2 & \smile & 25y^2 + 2\,1\beta\,5y + & 1\beta^2\ \lrcorner \\
\quad + \quad 2n \ ..+ & 2n1\beta & & \quad + \quad 4r \ ..+ & 4r1\beta \\
\qquad\qquad + & 3pa & & \qquad\qquad + & 6sa \\
 & (51 & \smile & 66) & \\
\dagger_\llcorner 25y^2 + \quad 2n\,5y + & 3pa & \smile & 25y^2 + \quad 4r\,5y + & 6sa\lrcorner \\
 & (38 & \smile & 51) &
\end{array}$$

$$\boxed{\frac{51}{66} - \frac{38}{51} \sqcap \frac{31}{1122}}$$

Multiplicando per crucem reducemus ad unam fractionem,

18 *Nebenrechnungen:* $\dfrac{38}{51} \times \dfrac{51}{66}$ $\dfrac{93}{3366}$ | $\dfrac{31}{1122}$

19–622,1 fractionem, *(1)* cuius numerator, *(2)* $\dagger 4r1\beta$ *L*

ǂ $4r1\beta$ 25 y^2 ǂ ⓶ $1a6s1\beta$ $5y$ ǂ $1a6s1\beta^2$ ⌣
ǂ $2n1\beta$ .. .. • $4r1\beta^2$ .. • $2n6s1a1\beta$
ǂ ⓶ $1a3p1\beta$ .. ǂ $1a3p1\beta^2$
• $2n1\beta^2$ .. • $4r3p1a1\beta$

$\left(\underbrace{+4-2}_{+2} \frown 25 \sqcap 50\right)$ $\left(\underbrace{+12+4-6-2}_{+8} \frown 5 \sqcap +40\right)$ $\left(\underbrace{+6+12-3-12}_{+3}\right)$

(50 + 40 + 3 ⊓ 93)

$625y^4$ + ⓶ $4r$ $125y^3$ + ⓶ $a6s$ $25y^2$ + ⓶ $4r6sa$ $5y$ + $36s^2a^2$
+ $16r^2$ ....

$\boxed{(625) \quad (1000) \quad (700) \quad (240) \quad (36) \quad \sqcap 2601 \sqcap 51 \frown 51}$

+ ⓶ β ...... + ⓷ $4r\beta$ .... + $16r^2\beta$ .. + $a6s4r\beta$
+ β^2 .... + ⓶ $\beta a6s$ .. + $6sa\beta^2$
+ $4r\beta^2$ ..

$\boxed{(2601) \quad (250) \quad (325) \quad (160) \quad (30) \quad \sqcap 3366}$

$\boxed{\begin{array}{l}(93 \smile 3366)\\(31 \smile 1122)\end{array}}$

Haec fractio producta, ut quam licet simplicissime enuntietur, conferatur cum alia g e n e r a l i sibi simili, $\dfrac{2d25y^2+8ea5y+a^2 3f}{625y^4+10g125y^3+a41h25y^2+a^2 80l5y+a^3 66m}$, numerator

---

51	38	51
66	66	51
306	228	51
306	228	255
3366	2508	2601
		2508
		93

Gestrichene Nebenrechnung:

2
~~3~~ ~~3~~ 6 6 ~~f~~ 10
~~3~~ ~~1~~ ~~1~~ 1
~~3~~ 3

scilicet numeratori et nominator nominatori; sed antequam calculum superioris plagulae sine necessitate repetamus, poterimus eius conclusionem nempe formulas ☿ et ♀ iam tum per numeros examinare; nam si consentient, non erit cur calculum repetamus. Formula ☿ erat:

$$2d25y^2 \;+8ea5y + \frac{2\,a8e10g - 4\,a2d41h + 2d100g^2 - \beta^2 2d}{8}, \smile\, 625y^4 + 10g125y^3 + a41h25y^2 + \frac{4\,a41h10g - 1000g^3 - 3\,\beta^2 10g}{8}5y +$$

$$\frac{\overset{\cancel{4}}{16\,a^2 1681h^2} - \overset{\cancel{5}}{8\,a100g^2 41h} + \overset{4}{8\,a\beta^2 41h} - \overset{3}{6\,\beta^2 100g^2} + \overset{\cancel{1}}{10000g^4} - \overset{\cancel{8}}{1\beta^4}}{64}$$

Ut ergo consentiat calculus, necesse est ut terminus numeratoris tertius faciat 3. quod est falsum facit enim $\frac{30}{8}$. Ergo in calculo erratum est. Eodem modo terminus nominatoris penultimus facere debet 80, quod non facit, quemadmodum sine ullo calculo ex sola novenarii proba colligo. Ultimus facere debet 66, quod itidem non facturum statim novenarius indicat. Unde intelligitur quanta sit necessitas methodi cuius ope omnes calculi errores evitari possint.

Repetendus ergo calculus superior adhibitis numeris, et invenimus $2n \sqcap \dagger 2\,a2d + 10g\beta - 2\,\beta^2 \smile 2\,\beta$. Recte. $4r \sqcap 10g - 2\,\beta, \smile 2$. Recte. At s. supra male, itaque resumatur ex terminis tertiis nominatorum, $6s \sqcap a41h - 16r^2 - 3\,4r\beta - \beta^2, \smile 2\,a$, et explicando r, fiet:

5–8 *Nebenrechnungen:*

25	41	41	82	160
16	25	41	4	200
41	205	41	328	360
	82	164	2	−330
	1025	1681	330	30

1 scilicet *(1)* primum *(2)* numeratori *L*

---

2 formulas ☿ et ♀: N. 43_1 S. 618 Z. 15 – S. 619 Z. 3. 16 supra: N. 43_1 S. 619 Z. 3; vgl. Erl. N. 43_1 S. 613 Z. 6+7

$6s \sqcap a41h \dfrac{-100g^2 + 4\,10g\beta - 4\,\beta^2}{4}\ \dfrac{-3\,10g\beta + 6\,1\beta^2}{2} - \beta^2,, \smile 2\,a \sqcap 4\,a41h -$ $100g^2 \boxed{+4\,10g\beta}\boxed{-4\,\beta^2} - 2\,\boxed{6}\,10g\beta + 4\,\boxed{12}\,\beta^2\ \boxed{-4\,\beta^2},, \smile 8\,a \sqcap 4\,a41h -$ $100g^2 - 2\,10g\beta + 4\,\beta^2,, \smile 8\,a$. Error autem in superioribus fuerat quod pro $4\,\beta^2$, scripseram β^2. Iam ergo $3p \sqcap \mp 4\,a^2 8e \mp 4\,a2d\beta + 4\,\beta a41h - \beta 100g^2 - 2\,10g\beta^2 + 4\,\beta^3,,$

$\cancel{4}\quad \cancel{8}\quad \cancel{2}\quad \cancel{8}\quad \cancel{7}\quad \cancel{4}$

$\smile 8\,a\beta$. ubi rursus idem error, nempe β^3 pro $4\,\beta^3$ et

$3f \sqcap 4\,\cancel{d}\beta a8e \boxed{-4\,\cancel{d}\beta 2d\beta} - 2d\,4\,\cancel{d}41h + \cancel{d}2d100g^2 + \cancel{d}2d\,2\,10g\beta - \cancel{d}2d\,8\,\boxed{4}\beta^2,, \smile 8a^2$

$..\ 4r\cancel{d}\ldots\ -\ ..\ 4r\cancel{d}\ldots$

$3 \quad \sqcap \quad \cancel{7} \quad \cancel{4} \quad \cancel{5} \quad \cancel{2} \quad 4 \quad 2 \quad \smile 8$

sive $3f \sqcap 4\,\beta a8e + 4\,4ra8e - 4\,4r2d\beta - 4\,2da41h + 2d100g^2 + 2\,2d10g\beta - 8\,2d\beta^2,, \smile 8\,a^2$. Et explicando r, fiet:

$3f \sqcap \boxed{4\,\beta a8e} + 2\,a8e10g \boxed{-4\,a8e\beta}\boxed{-2\,2d\beta 10g} - \boxed{+}\,4\,2d\beta^2 - 4\,2da41h + 2d100g^2$

$3 \quad \sqcap \quad \cancel{7} \quad 1 \quad 5 \quad \cancel{2}$

$\boxed{+2\,2d10g\beta}\boxed{-8\,2d\beta^2},, \smile 8\,a^2$

$\smile 8$

ac proinde denique $3f \sqcap 2\,a8e10g - 4\,2d\beta^2 - 4\,2da41h + 2d100g^2 \smile 8a^2$. Qui valor rursus per omnia consentit cum priore, excepto quod pro $4\,2d\beta^2$ supra erat $2d\beta^2$.

Supersunt duae investigandae literae l, et m; et reperi quidem

$80\,l \sqcap 4\,a41h10g - 1000g^3, \smile 8a^2$ ac denique $66m \sqcap 16\,a^2 41 \frown 41h^2 - 8\,a41h100g^2 +$

$(8 \frown 80 \sqcap 1640 - 1000 \sqcap 640) \quad \cancel{6} \quad \cancel{4} \quad \cancel{5}$

$32\,a41h\beta^2 + 10000g^4 + 16\,\beta^4 - 12\,\beta^2 100g^2,, \smile +64\,a^3.$

$\cancel{7} \quad \cancel{1} \quad \cancel{7} \quad \cancel{6}$

Itaque si qua data sit *s e r i e i s u m m a n d a e* formula, reducibilis ad hanc ☿:

9–15 *Nebenrechnungen zur Neunerprobe:*

9 $\quad 6 \sqcap \cancel{8} \frown \cancel{3} \sqcap \cancel{24} \sqcap 6$

13+15 $\quad \boxed{5 + 1 \sqcap 8 \frown 3 \sqcap 24 \sqcap 6}$

3 Error: s. o. N. 43₁, Erl. zu S. 613 Z. 6+7. 17 supra: N. 43₁ S. 615 Z. 8. 20+22 Bei der Neunerprobe setzt Leibniz $66 \equiv 3 \pmod 9$ mit $-66 \equiv 6 \pmod 9$ auf die rechte Seite der Gleichung.

$$☿ \quad \left.\frac{2d25y^2 + a8e5y + \dfrac{2\,a8e10g - 4\,2d\beta^2 - 4\,2da41h + 2d100g^2}{8}}{625y^4 + 10g125y^3 + a41h25y^2 + \dfrac{4\,a41h10g - 1000g^3}{8}5y \ + \dfrac{16\,a^2 41h41h - 8\,a41h100g^2 + 32\,a41h\beta^2 + 10000g^4 + 16\,\beta^4 - 12\,\beta^2 100g^2}{64}}\right\}$$

loco $\left\{ \dfrac{2d25y^2 + a8e5y + a^2 3f}{625y^4 + 10g125y^3 + a41h25y^2 + a^2 80l5y + a^3 66m} \right.$ tunc formula seriei summatricis erit:

624,19–21 *Nebenrechnungen auf Bl. 1 r°:*

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 410 & 41 & 41 & \qquad 66 \\
 & \underline{\ \ 4} & \underline{\ 41} & \underline{\qquad 8} & \qquad \underline{64} \\
 & 1640 & 41 & -328 + 328 & \qquad 254[!] \\
 & \underline{1000} & \underline{164\ } & \underline{\qquad\qquad 4} & \qquad [\textit{bricht ab}] \\
8 \frown 80 \sqcap & 640 & 1681 & +\,328 & \\
 & & \underline{\ \ 16} & 3 & \\
 & & 10086 & \underline{984} & \\
 & & 1681 & & \\
 & & [\cancel{2}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{6}] & 16a^2h^2 & \\
 & & \cancel{9}\cancel{8}\cancel{4} & -8hg^2 + 32ah\beta^2 & \\
 & & \underline{\ \ \cancel{1}} & +g^4 & \\
 & & \cancel{4}\ \ \ \ & +16\beta^4 - 12\beta^2g^2 & \\
 & & [\cancel{2}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{5}] & &
\end{array}$$

624,19 $\smile$ 8a^2 *(1)* et 66m $\sqcap$ 16a^{2}h^2 − 8ahg^2 + 32ahβ^2 + g^4 + 16β^4 − 12β^2g^2, $\smile$ 64a^3 *(2)* ac *L*
8–12 *vorletzte Spalte* -328 *(1)* | $\begin{array}{r} +\,328 \\ \underline{\ \ 4} \\ 656 \end{array}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\begin{array}{r} +328 \\ \underline{\ \ 3} \\ 984 \end{array}$ *L* 14 $\cancel{2}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{6}$ *L ändert Hrsg.*
18 $\cancel{2}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{6}\cancel{5}$ *L ändert Hrsg.*

$$♀\ \frac{25y^2+\dfrac{\pm 2\,a2d+10g\beta 2\,\beta^2}{2\,\beta}5y+\dfrac{\pm 4\,a^28e\pm 4\,a2d\beta+4\,\beta a41h-\beta 100g^2-2\,10g\beta^2+4\,\beta^3}{8}}{25y^2+\dfrac{10g-2\,\beta}{2}5y+\dfrac{4\,a41h-100g^2-2\,10g\beta+4\,\beta^2}{8\,a}}\ \Bigg\}$$

loco $\left\{\dfrac{25y^2+2n5y+3pa}{25y^2+4r5y+a6s}\right.$.

Quod si iam series aliqua proposita sit cuius formula velut $\dfrac{3m}{\dfrac{5s}{a}25y^2+\dfrac{4\beta}{2}5y*}$ et $\boxed{\dfrac{3}{125+2\frown 5}\sqcap\dfrac{3}{135}}$ quaeratur formula seriei summatricis (: nota: literae $\underline{m}$. $\underline{s}$. $\underline{n}$. $\underline{b}$. hic novam [recipiunt] significationem, ut et aliae si quae repetantur :) hoc per ea quae superiore plagula dixi non potest fieri commodius, quam si addatur ei alia formula, ut $\dfrac{7n}{\dfrac{a}{5s}25y^2+6b5y+\dfrac{36b^2-16\beta^2}{4}}$ $\boxed{\dfrac{7}{40}}$. Literae β. demus imposterum numerum 4, ut eius significationem distinguamus a litera a. quod imposterum semper inter calculandum servabimus. Ita enim minus facilis lapsus, si nulla aequivocatio. Explicui tamen tam y. quam s. per 5, quia y. caeteris minus miscet nec facile in illo lapsus.

5+8 *Nebenrechnung:* $\dfrac{3}{135}+\dfrac{7}{40}\sqcap\dfrac{120+945\sqcap 1065}{5400}$

4 iam *(1)* formula *(2)* series aliqua proposita *(a)* sit velut $\dfrac{3\mathrm{m}}{\dfrac{4\mathrm{s}}{\mathrm{a}}25\mathrm{y}^2+\dfrac{4\beta}{2}\mathrm{y}\ *}$ cuius quaeritur formula summatrix *(b)* sit *L* 6 f. (nota: *(1)* litera $\underline{\mathrm{m}}$ hic novam recipit *(2)* literae ... novam | recipit *ändert Hrsg.* | significationem *L* 13 $\dfrac{3}{135}+$ *(1)* $\dfrac{5}{40}\sqcap$ *(a)* $\dfrac{3}{17+8}\smile 5$ *(b)* $\dfrac{3}{27}$ *(c)* $\dfrac{3}{17}+\dfrac{5}{8},\smile 5\sqcap$ *(aa)* $\dfrac{3}{15}$ *(bb)* $\dfrac{24+85}{17\frown 8}\sqcap\dfrac{109}{136\frown 5}$ sive $\dfrac{109}{8800}$ *(d)* $\dfrac{120+675}{5400}\sqcap\dfrac{795}{5400}$ *(2)* $\dfrac{7}{40}$ *L*

---

7 superiore plagula dixi: N. 43₁ S. 616 Z. 18 f.

Addendo has duas formulas producetur haec:

$$\begin{array}{llll}
\frac{3ma}{5s}\,25y^2 & +3m6b5y & +\frac{3m36b^2-3m16\beta^2}{(4} & \smile \\
+\frac{7n5b}{a}\ldots\ldots & +\frac{4\beta7n}{(2}\ldots & & \\
\cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{6} & \smile \\
35+\frac{3}{5}\frown 25 & 32\frown 5 & 15 & \smile
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\smile\ 625y^4 & +\frac{6b5s}{a}125y^3 & +\frac{5s}{(4\,a},36b^2-16\beta^2,25y^2 & +\frac{4\beta36b^2-64\beta^3}{8}5y & * \\
 & +\frac{4\beta a}{(2\,5s}\ldots\ldots & +\frac{4\beta6b}{(2} \qquad \ldots\ldots & & \\
\smile\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{5} & \\
\smile\ 625 & 30\frac{2}{5}\frown 125 & 37\frown 25 & 10\frown 5 & \\
 & -\frac{102}{5}\delta & +4\theta & &
\end{array}$$

Quae formula producta conferetur cum formula ☿ modo in dicta formula ☿ explicetur ipsa β. numero adscripto 4.

Sed ut probatio per numeros institui possit adiciendae sunt literae quaedam probatoriae, quo utrobique numeri cognitae termini cuiuslibet numeris cognitae termini respondentis aequivalent. Id vero ante omnia in nominatore faciemus, nam in solo nominatore

---

2–5 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrr}
35 & 35 & 18 \\
\underline{\ \ 5} & \underline{\ 25} & \underline{14} \\
175 & 175 & 32 \\
 & \underline{70\ \ } & \\
 & 875 & \\
 & \underline{\ 15} & \\
 & 890 &
\end{array}$$

6–9 *Divisionszeichen wiederholt Hrsg.* 14 cognitae *erg. L zweimal* difficultatem habet collatio, quia tot in eo aequationes collatitiae, quatuor scilicet terminorum, quot incognitae, nempe $s.b.g.h.$

Sed video mutandum esse aliquid, antequam veniatur ad collationem, nam in una dedi ipsi β. valorem 1, in altera valorem 4. Itaque alterutrubi corrigendum, et facilius est in novissima formula efficere ut β. valeat tantum 1, et ita stabit:

$$\frac{3ma}{5s}\ 25\,y^2 \quad +3m6b5y \quad +\frac{3m36b^2-3m\beta}{(4)} \quad \smile$$
$$+\frac{7n5s}{a}\ \ldots\ldots \qquad +\frac{\beta 7n}{(2)}\ \ldots$$

$$625y^4+\frac{6b5s}{a}\ 125y^3+\frac{5s}{a}\frown 36b^2-\beta^2\frown 25y^2+\frac{\beta 36b^2-3\delta a^2-\beta^3}{(8)}5y \qquad *$$
$$\frac{10\gamma\beta}{(2)\,5s}\ \ldots\ldots \quad +\frac{\beta 6b}{(2)} \qquad \ldots\ldots$$
$$31 \qquad 178 \qquad 4 \qquad 0$$
$$-21\lambda \qquad -137\mu a \qquad +76a^2\xi \qquad +66m$$

ubi $\frac{10\gamma\beta}{(2)\,5s}$ loco $\frac{\beta a}{(2)\,5s}$, ut fractionem auferam, inter calculandum utique examen novenarium facilius reddatur. Eodem modo ascripsi $-3\delta a^2$. Etsi sub finem calculi poni debent $\gamma \sqcap a$, et $\delta \sqcap 0$. Eodem modo et literae $\lambda.\mu.\xi.m.$ sub finem calculi habebuntur pro nullis, adiectae interim, ut numeri cognitarum formulae ☿ et huius, sint iidem. His iam quatuor collationibus totidem quaerendae sunt incognitae ut dixi, $b.h.g.s.$ ac primum

11 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{r} 178 \\ \underline{41} \\ 137 \end{array}$

2 f. s.b.g.h. *(1)* Ut er *(2)* Ut ergo ad collationem veniamus, *(a)* termini *(b)* nominatoris formulae ☿ cum nominatore formulae novissimae, utique primi termini iidem sunt itaque non est opus *(aa)* adiecto termino *(bb)* adiecta litera probatoria, in 2^{dis} vero differentia. Nam terminus secundus *(aaa)* form *(bbb)* nominatoris formulae ☿ habet 10g. cum in formula novissima sit $30+\frac{2}{5}$, *(aaaa)* vel *(bbbb)* itaque ipsi 10g addatur $20+\frac{2}{5}\delta$, vel $\frac{102}{5}\delta$. | Eodem modo in termino tertio formulae ☿ habetur 41h. et in respondente novissimae, 31. Huic ergo addatur 4θ. in termino tertio *gestr.* | *(3)* Sed *L*

valores ipsarum g. et h, statim habentur sine ullo calculo, nempe $10g \sqcap (2)\, \underset{\cancel{8}}{6b}\underset{\cancel{3}}{25s^2} +$ $\underset{\cancel{1}}{10\gamma\beta a} - (2)\, \underset{\cancel{6}}{21\lambda a5s}, \smile (2)\, a5s$ et $\underset{\cancel{8}}{41h} \sqcap (2)\, \underset{0}{5s36b^2} - (2)\, \underset{\cancel{8}}{5s\beta^2} + \underset{\cancel{6}}{\beta a6b} - (2)\, \underset{\cancel{5}}{137\mu a^2}, \smile (2)\, a^2$.

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{8}{1000g^3} \sqcap (8)\, \underset{0}{\llcorner 6b \lrcorner^3 25^3 s^6}, + (12)\, \underset{0}{36b^2 25^2 s^4 10\gamma\beta a} - (24)\, \underset{0}{36b^2 25^2 s^4 21\lambda a5s}, \\
\qquad + (6)\, \underset{0}{6b25s^2 100\gamma^2\beta^2 a^2} + (24)\, \underset{0}{6b25s^2 21^2\lambda^2 a^2 25s^2},, \\
\qquad - (24)\, 6b25s^2 10\gamma\beta a 21\lambda a5s,,, + \underset{1}{1000\gamma^3\beta^3 a^3} \\
\qquad - (6)\, \underset{0}{100\gamma^2\beta^2 a^2 21\lambda a5s} - (12)\, \underset{0}{10\gamma\beta a 21^2\lambda^2 a^2 25s^2}, \\
\qquad - (8)\, \underset{0}{21^3\lambda^3 a^3 125s^3}
\end{array}\right\} \smile (8)\, a^3 125s^3$$

Sed hinc disco observationem perutilem, non esse dandum literis valorem numerorum quos, aut quorum abiecto novenario residuis metitur ternarius, ut 3.6. nam hae vel in se ductae, vel in alios plerumque faciunt quantitatem quae abiecto novenario nihil relinquit, ut $6 \frown 6 \sqcap 36$. $3 \frown 6 \sqcap 18$. $3 \frown 3 \sqcap 9$. $3 \frown 4 \sqcap 12$, seu 3. $3 \frown 5 \sqcap 15$ seu 6. $3 \frown 7 \sqcap 21$, seu 3. $3 \frown 8 \sqcap 24$ seu 6. $3 \frown 9 \sqcap 27$ seu 0. Itaque literae $\underline{b}$. pro 6 dabimus 8. et literae $\underline{m}$. pro 3 dabimus 4. Unde denique scribendo:

$$\left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{4ma}{5s}\; 25y^2 & + 4m8b5y & + \dfrac{4m64b^2 - 4m\beta^2}{(4)}, & \smile \\
+\dfrac{7n5s}{a}\; .\; . & + \dfrac{\beta 7n}{(2)}\; .. & &
\end{array}\right.$$

17 alios *(1)* rursus *(2)* plerumque *L*

$$625y^4 + \frac{8b5s}{a}125y^3 \quad + 64b^2 - \beta^2 \frown \frac{5s}{a}25y^2 + \frac{64b^2\beta - \beta^3[-]\delta a^2}{(8}5y \qquad *$$

$$+\frac{10\gamma\beta}{(2\;5s}\;..\;\;..\;+\qquad \beta 8b \smile (2 \qquad .\;\;.$$

$$41 \qquad\qquad 319 \qquad\qquad 8$$

$$-31\lambda \qquad\qquad -278\mu a \qquad\qquad +72a^2\xi \qquad\qquad +66ma^3$$

Unde $10g \sqcap (2\;8b25s^2 + 10\gamma\beta a - (2\;31\lambda a5s, \smile (2\;a5s$, et $41h \sqcap (2\;5s64b^2 - (2\;5s\beta^2 +$
$\cancel{8} \quad \cancel{4} \quad \cancel{1} \quad \cancel{5} \qquad \cancel{5} \quad \cancel{1} \quad \cancel{8}$
$\beta a8b - (2\;278\mu a^2, \smile (2\;a^2.$
$\cancel{8} \quad \cancel{2}$

$$(8\;a^3 125s^3 \frown 1000g^3 \;\sqcap\; (8\;\llcorner 8b\lrcorner^3 25^3 s^6 + (12\;64b^2 25^2 s^4 10\gamma\beta a - (24\;64b^2 25^2 s^4 31\lambda a5s,$$
$$\cancel{8} \qquad \cancel{1} \qquad \cancel{3} \qquad \cancel{6}$$
$$+(6\;8b25s^2 100\gamma^2\beta^2 a^2 + (24\;8b25s^2 31^2\lambda^2 a^2 25s^2$$
$$\cancel{3} \qquad \cancel{3}$$
$$-(24\;8b25s^2 10\gamma\beta a31\lambda a5s,,, + 1000\gamma^3\beta^3 a^3,$$
$$\cancel{3} \qquad \cancel{1}$$
$$-(16\;100\gamma^2\beta^2 a^2 31\lambda a5s + (12\;10\gamma\beta a31^2\lambda^2 a^2 25s^2,$$
$$\cancel{1} \qquad \cancel{3}$$
$$-(8\;31^3\lambda^3 a^3 125s^3$$
$$\cancel{8}$$

1–4 *Nebenrechnungen:*

319	63
41	5
	325 [!]
	4
	329
	41
	278 [!]

1 + *L ändert Hrsg.*

qui ipsius $1000g^3 \frown 8\, a^3 125s^3$ valor auferatur a sequenti formula, quae est

$$4\, a^3 s^3 41h10g \sqcap 2\; 25s^2 \cancel{4}\, a\, 2\; 8b25s^2 \quad \begin{array}{l} 2\; 5s64b^2 \\ -2\; 5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -2\; 278\mu a^2 \end{array}$$

$$+2\; 25s^2\, \cancel{4}\, a\; 12\; 64b^2 25^2 s^4 10\gamma\beta a \quad \begin{array}{l} 2\; 5s64b^2 \\ -2\; 5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -2\; 278\mu a^2 \end{array}$$

$$-2\; 25s^2\, \cancel{4}\, a\, 2\; 31\lambda a5s \quad \begin{array}{l} 2\; 5s64b^2 \\ -2\; 5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -2\; 278\mu a^2 \end{array} .$$

Residuum a e q u a b i t u r huic:

$$a^3 125s^3 64b^2\beta - a^3 125s^3\beta^3 [-] a^3 125s^3 \delta a^2 + 8\, a^3 125s^3 72a^2\xi$$

Quae aequatio collatitia orta est ex collatione terminorum penultimorum; ultimi termini dant aequationem hanc: $16\, a^2 41^2 h^2 - 8\, a41h100g^2 + 32\, a41h\beta$ [*bricht ab*]

15 + *L ändert Hrsg.*

43_3. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS TERTIA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 3. 1/6 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 3 r°. Bl. 3 v° leer. Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675.

Pars III. schediasmatis d e s e r i e b u s s u m m a b i l i b u s
et in specie hac: $\dfrac{1}{z^2 + \dfrac{\beta}{2}z} \;\; *$

Edoctus experientia calculorum superiorum, videbo an errores quos illic commisi, possim praevenire. Ac primum exponam de quo agatur. Repertum est a me, si series fractionum numeratore unitate, nominatoribus numeris quadratis unitate minutis exponatur, tunc prout nunc continue nunc per saltus sumantur, aut absolute aut non nisi ex supposita circuli et hyperbolae quadratura, haberi seriei summam,

$$\begin{array}{llllllllllll}
\text{I)} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} & \frac{1}{48} & \frac{1}{63} & \frac{1}{80} & \frac{1}{99} & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap \frac{3}{4} \\
\text{II)} & \cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \frac{1}{24} & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \frac{1}{80} & \cdot & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap \frac{1}{4} \\
\text{III)} & \frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{15} & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \frac{1}{63} & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \text{etc.} \sqcap \frac{1}{2} \\
\text{IV)} & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \text{etc.} \sqcap \\
\text{V)} & \cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap
\end{array}
\left.\begin{array}{l}\text{numero qui} \\ \\ \text{pendet ex}\end{array}\right\}
\;\text{quadratura}\left\{\begin{array}{l}\text{circuli} \\ \\ \text{hyperbolae}\end{array}\right\}$$

Haec alibi a me geometrice demonstrata sunt. Nunc series istas duas quae ex circuli et hyperbolae quadratura pendent analytice exprimamus, ut in earum summam inquiri

13 $\frac{1}{120}$ | $\frac{1}{143}$ $\frac{1}{168}$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L* 14 $\frac{1}{120}$ | $\cdot$ $\frac{1}{168}$ $\cdot$ *gestr.* | etc. *L* 15 $\frac{1}{99}$ $\cdot$ | $\frac{1}{143}$ $\cdot$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L* 16 $\frac{1}{99}$ $\cdot$ | $\cdot$ $\cdot$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L*

19 alibi: vgl. N. 15, N. 38_2, N. 38_{10} sowie die *Arithmetische Kreisquadratur*, *LSB* III, 1 N. 39 S. 165 f. u. *LQK* prop. XLII S. 88 f.

possit. Si nimirum quadratis restituantur unitates ademtae, habebuntur in quarta serie, 4.36.100 et radices 2.6.10, quorum intervallum 4. Eodem modo ex quinta serie, 9.49.121. et radices, 3.7.11. quorum intervallum etiam 4. Itaque ponendo intervallum 4 esse β. et unitatem $\sqcap$ a. poterit utraque series sic enuntiari: $\dfrac{1}{y^2 - \dfrac{a\beta}{4}}$. Ponendo scilicet y. repraesentare numeros progressionis arithmeticae, quorum intervallum β sit $\sqcap$ 4, item sic: $\dfrac{1}{y^2 - a^2}$. Sed et adhuc aliter, nam $y^2 - a^2 \sqcap y + a \frown y - a$. Considerandum est itaque, 3.35.99. aequari $1 \frown 3$, $5 \frown 7$, $9 \frown 11$, item 8.48.120. aequari $2 \frown 4$. $6 \frown 8$. $10 \frown 12$. Itaque numeri progressionis arithmeticae, quorum intervallum β, sit 4, undecunque oriantur, appellentur y. ut 1.5.9. vel 2.6.10. Itaque ratione ipsorum $\begin{cases} 1.\ 5.\ \ 9. \\ 2.\ 6.\ 10. \end{cases}$ ipsi $\begin{cases} 3.\ 7.\ 11. \\ 4.\ 8.\ 12. \end{cases}$ erunt $y + \dfrac{\beta}{2}$, nam $\dfrac{\beta}{2}$ est 2, vel $y + 2a$. Unde $\begin{Bmatrix} 1 \frown 3. & 5 \frown 7. & 9 \frown 11. \\ 2 \frown 4. & 6 \frown 8. & 10 \frown 12. \end{Bmatrix} \sqcap y^2 + \dfrac{\beta}{2} y \ *$ vel si mavis $y^2 + 2ay$. adeoque tam circuli quam hyperbolae series quadratrix ita exprimi poterit[:] $\dfrac{1}{y^2 + \dfrac{\beta}{2} y \ *}$ vel $\dfrac{1}{y^2 + 2ay}$. Habemus ergo repertas iam serierum formulas quatuor, $\dfrac{1}{y^2 - \dfrac{a\beta}{4}}$ vel $\dfrac{1}{y^2 - a^2}$, vel $\dfrac{1}{y^2 + \dfrac{\beta}{2} y \ *}$ vel $\dfrac{1}{y^2 + 2ay}$, et si vel unius ex eius reperiri possit summa, habebimus circuli simul et hyperbolae quadraturam.

Porro methodum inquirendi in serierum summas, ego primus omnium reperisse credo universalem; ita ut datae cuiusque seriei, quae modo formula analytica certae dimensionis explicari possit[,] haberi summa, aut inveniri possit in-summabilitas ope conditarum quarundam tabularum, si quis modo calculi laborem subire velit. Res eo redit, quaeruntur s e r i e r u m propositarum seu s u m m a n d a r u m , s e r i e s s u m m a t r i c e s. Iam ex serie summatrice data haberi potest series eius summanda; contra vero nemo

1 in *(1)* prima *(2)* quarta *L* 4 f. enuntiari: *(1)* $\mathrm{y}^2 - \dfrac{\beta}{4}$ *(2)* $\dfrac{1}{\mathrm{y}^2 - \dfrac{\mathrm{a}\beta}{4}}$ ... scilicet y *(a)* esse *(b)* repraesentare *L* 7 3.35.99. *(1)* fieri ex *(2)* aequari *L* 8 β, sit *erg. L* 9 appellentur y. *(1)* et proxime sequens erit $\mathrm{y} + 2\mathrm{a}$ *(2)* ut *L*

methodum explicuit ex data serie summanda inveniendi summatricem; utendum ergo arte analytica generali, a qua et nomen habet; et sumtis seriebus summatricibus indeterminatis generalibus, inde derivandae earum series summandae, quas conferendo datis seu propositis; resolventur propositae series in partes quales res postulat. Series autem summatrices quantum licet generales assumendae sunt, quo minoribus tentaminibus quaesitum obtineamus. Et vero nondum mecum statui, an possint novis adhibitis characteribus excogitari [formulae], quae plurium imo omnium dimensionum formulas in se comprehendant unae.

7 formulas *L ändert Hrsg.*

44. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE

44$_1$. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS PRIMA
3. März 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 915 A tlw.

3 Martii 1675

De summa seriei fractionum datae cum formulae differentiarum comparatur

$$\text{ǂ}\ \frac{cy+ad}{fy+ag}\ \ddagger\ \frac{\begin{array}{r} cy+c\beta \\ +ad \end{array}}{\begin{array}{r} fy+f\beta \\ +ag \end{array}}\ \sqcap\ \frac{\begin{array}{l} \text{ǂ}\left\{\begin{array}{llll} cfy^2 & + & adf\,y & +adf\beta \\ & + & cf\beta\,.. & +a^2dg \\ & + & acg\,.. & \end{array}\right. \\ \ddagger\left\{\begin{array}{llll} cf\,.. & + & cf\beta\,.. & +acg\beta \\ & + & adf\,.. & +a^2dg \\ & + & acg\,.. & \end{array}\right. \end{array}}{\begin{array}{llll} f^2y^2\odot_I & + & 2afg\,.. & +afg\beta \\ & + & f^2\beta\,.. & +a^2g^2 \\ & \multicolumn{2}{l}{\underset{I}{\boxed{+\ afg\,..}}} & \end{array}}$$

sive $\sqcap\ \dfrac{\text{ǂ}adf\beta\ \ddagger\ acg\beta}{\begin{array}{l} f^2y^2+2afgy+afg\beta \\ \quad +\ f^2\beta\ ..+a^2g^2 \end{array}}$.

7 f. De *(1)* summis serierum *(2)* summa seriei | fractionum *erg. u. gestr.* | fractionum *erg.* | datae ... differentiarum | generali *gestr.* | comparatur *L*

Esto iam data formula $\dfrac{\mp adf\beta \pm acg\beta}{f^2z^2 + \dfrac{f^2}{2}\beta z \quad *}$. Cumque numeratores sint iidem, aut si non essent[,] cum constantes sint, multiplicando dividendoque facile reddi possent iidem, restat ut nominatores conferamus, quod ut succedere possit, faciamus $z \sqcap y + d$, erit $f^2z^2 \sqcap f^2y^2 + 2f^2dy + f^2d^2$, et $\dfrac{f^2\beta z}{2} \sqcap \dfrac{f^2\beta y}{2} + \dfrac{f^2\beta d}{2}$, et fiet nominator correctus:

$$\begin{array}{lllllll} f^2y^2 & + & 2f^2d & y & + & f^2d^2 & \text{conferendus nominatori superiori:} \\ & + & \dfrac{f^2\beta}{2} & .. & + & \dfrac{f^2\beta d}{2} & \\ f^2y^2 & + & 2afg & y & + & afg\beta & \\ & + & f^2\beta & .. & + & a^2g^2 & \end{array}$$

Primi terminii iidem sunt, collatis ergo secundis, fiet haec aequatio:

$$4fd\boxed{+f\beta} \sqcap 4ag + 2f\beta \text{ sive } f \sqcap \frac{4ag}{4d-\beta}, \text{ et } f^2 \sqcap \frac{16a^2g^2}{16d^2 - 8d\beta + \beta^2}.$$

Collatis ultimis terminis aequatio haec habebitur: $2f^2d^2 + f^2\beta d \sqcap 2afg\beta + 2a^2g^2$.

$$\frac{16a^2g^2}{16d^2 - 8d\beta + \beta^2} \qquad\qquad \frac{4ag}{4d-\beta}$$

Substitutis ipsius f explicationibus, sublatisque fractionibus, fiet:

$$\boxed{32a^2g^2d^2}\ \boxed{+16a^2g^2\beta d} \sqcap \boxed{\underbrace{2ag\beta 4ag4d}_{16\,(32)\,a^2g^2\beta d}}\ \underbrace{-2ag\beta 4ag\beta}_{-8a^2g^2\beta^2},\ \underbrace{+2a^2g^216d^2}_{\boxed{+32a^2g^2d^2}}\ \underbrace{-2a^2g^28d\beta}_{\boxed{-16a^2g^2d\beta}}\ \underbrace{+2a^2g^2\beta^2}_{+2a^2g^2\beta^2}$$

Unde fit denique aequatio impossibilis: inter 8 et 2.

Sic ergo exitus non datur, et remedium aliquod, si licet quaerendum est.

Ad originem ergo huius seriei ad summandum propositae redeamus. Ordinata cyclocissoeidis erat $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$, multiplicetur quantitate assumta $\dfrac{e}{a}$, fiet: $\dfrac{ex}{\sqrt{2ax \mp x^2}} \sqcap y$.

14 $\boxed{+16\mathrm{a}^2\mathrm{g}^2\beta\mathrm{d}}$ $\sqcap$ *(1)* $2\mathrm{ag}\beta 4\mathrm{ag}16\mathrm{d}^2 - 2\mathrm{ag}\beta 4\mathrm{ag}8\mathrm{d}\beta + 2\mathrm{ag}\beta 4\mathrm{ag} \sqcap 2\mathrm{ag}\beta\mathrm{ad} - 2\mathrm{ag}\beta\mathrm{d}$ *(2)* $\boxed{\underbrace{2\mathrm{ag}\beta 4\mathrm{ag}4\mathrm{d}}_{16\,(32)\,\mathrm{a}^2\mathrm{g}^2\beta\mathrm{d}}}$ *L* 18 redeamus. *(1)* Aequatio *(2)* Ordinata *L*

Unde $\dfrac{e^2x^2}{2ax \mp x^2} \sqcap y^2 \sqcap \dfrac{e^2x}{2a \mp x}$. Unde $2ay^2 \mp xy^2 \sqcap e^2x$, vel $2ay^2 \sqcap e^2x \pm xy^2$, vel $\dfrac{2ay^2}{e^2 \pm y^2}[\sqcap x]$. Sed hinc video nil novi; rectius ita: $\dfrac{ax}{\sqrt{2ex \mp \dfrac{e}{a}x^2}} \sqcap y$. Unde $\dfrac{a^2x}{2e \mp \dfrac{e}{a}x} \sqcap y^2$.

Unde $a^2x \pm \dfrac{e}{a}y^2x \sqcap 2ey^2$ sive $\dfrac{2ey^2}{a^2 \pm \dfrac{e}{a}y^2} \sqcap x$. Unde et haec: $\dfrac{a^2}{a^2 \pm \dfrac{e}{a}y^2}$ vel $\dfrac{1}{1+ey^2}$. ponendo $a \sqcap 1$, et e in circulo signum $-$, in hyp. $+$ continere. Unde $1 - ey^2 + e^2y^4 - e^3y^6$ etc. Summae $b - \dfrac{eb^3}{3} + \dfrac{e^2b^5}{5} - \dfrac{e^3b^7}{7}$ etc. Ponatur $eb^2 \sqcap 1$. seu $b \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Sin malis relinqui a^2, fiet: $1 - \dfrac{ey^2}{a^3} + \dfrac{e^2y^4}{a^5} - \dfrac{e^3y^6}{a^7}$ etc. Unde: $\dfrac{b}{a} - \dfrac{eb^3}{3a^4} + \dfrac{e^2b^5}{5a^7} - \dfrac{e^3b^7}{7a^{10}}$.

Sed video nihil his obtineri; nam aut $\dfrac{eb^2}{a^3}$ ponendo $\sqcap 1$. aut series in aequationem cogibilis inde fieri non potest.

Ad aliud ergo remedium confugiendum tentandumque est, an aliqua series summabilis addi possit datae, ita ut summa inde facta comparabilis summabili reddatur.

E. g. ad ♃ $\dfrac{h}{a^2y^2 + 2da^2y + d^2a^2}$ quaesitam, addatur ♄ $\dfrac{m}{f^2y^2 + 2afgy + a^2g^2}$ inventa.

$$\frac{a^2\beta}{2} \;..+ \frac{\beta da^2}{2} \qquad\qquad\qquad + f^2\beta \;.. +afg\beta$$

Summa ex ipsis formulae summabilium quadratoquadraticae in nominatore, quadraticae in numeratore comparetur; quo facto si in tanta arbitrariarum, d, f, g, h, m, et earum praeterea, quae ex formula $\dfrac{ly^2 + ny + pa}{\dfrac{q}{a}y^2 + ry + s}$, peti possunt numero sex, vel saltem neglecto l, numero 5, fient decem minimum arbitrariae, collationes autem sunt numero novem.

2 $\dfrac{2ay^2}{e^2 \pm y^2}$ | $\sqcap$ x *erg. Hrsg.* | . *(1)* Sub *(2)* Sumatur iam: $\dfrac{y^2}{e^2 -}$ *(3)* Sed *L* 11 ad *(1)* $\dfrac{ca}{y^2 + \frac{1}{2}\beta y}$ addatur $\dfrac{d}{\quad}$ *(2)* ♃ *L* 12 *(1)* $+a^2\beta$ .. *(2)* $+f^2\beta$ .. *L*

12 $f^2\beta$ ..: Leibniz ändert hier und in der Formel für b auf S. 641 Z. 24 punktuell den Faktor a^2 in f^2.

Sed et unam adhuc arbitrariam forte facere licebit, forte; explicando y, in posteriore formula $\dfrac{m}{f^2y^2\,\text{etc.}}$. Imo si alias adhuc adicere velis formulas summabiles augebis numerum arbitrariarum, modo non augeatur et numerus dimensionum seu collatitiarum, quod difficile erit evitatu.

$$\begin{array}{ccccl|l}
 & \odot & & ☽ & & \\
 & & & \frac{l}{a}y^2 + 2ly\beta \;+\beta^2 & & \\
\text{ǂ} & \dfrac{\frac{l}{a}y^2+ny}{\frac{q}{a}y^2+ry} & \text{‡} & \dfrac{+\,ny \quad +\,n\beta}{\frac{q}{a}y^2+\frac{2q}{a}\beta y+\frac{q}{a}\beta^2} & .\ \text{Unde}\ \dfrac{lq}{a^2}y^4+\dfrac{nq}{a}\;y^3 & -\dfrac{ql}{a^2}y^4-\dfrac{2lq\beta}{a^2}\;y^3 \\
 & & & +\,r \quad ..\;+r\beta & \qquad\qquad +\dfrac{2q\beta l}{a^2}\;.. & \qquad\quad -\dfrac{nq}{a}\;.. \\
 & ♀ & & ☿ & \qquad\qquad +\dfrac{rl}{a}\;.. & \qquad\quad -\dfrac{rl}{a}\;..
\end{array}$$

Patet ergo terminos duos altissimos destructum iri, et fore arbitrariarum undecim, $d.f.g; h.m.l; n.p.q; r.s$; collationum autem ($y^2.y.a$ in numeratore, $y^4+y^3+y^2+y+a.$ in nominatore) in universum 8, et arbitrariae supernumerariae erunt tres, quarum ope si exitus reperiri non potest; has methodum in hunc quidem usum non ultra sollicitandas arbitror.

$\text{ǂ}\dfrac{\odot}{♀}\ \text{‡}\ \dfrac{☽}{☿} \sqcap \dfrac{\text{ǂ}\odot☿\ \text{‡}\ ♀☽}{♀☿}$. Iam ex iis quae schediasmatis *De seriebus et quadraturis* plag. 13. fine, et plag. XV. initio calculata sunt, et inter se consentiunt, erit ponendo pro $e \sqcap q.\quad f \sqcap r.\quad g \sqcap s.\quad b \sqcap l.\quad c \sqcap n.\quad d \sqcap p.$

3 modo *(1)* earum nominator *(2)* non *L* 13 usum *(1)* mittendas arbitror *(2)* non *L* 15 f. *quadraturis (1)* parte *(2)* plag. 13. *L*

5–9 Leibniz vergißt in den Formeln $\odot$ u. ☽ den Term $+pa$, in ♀ u. ☿ den Term $+sa$; er bemerkt den Fehler auf S. 642 Z. 7 und schreibt anschließend die vollständige Formel neu an. 15 *De seriebus et quadraturis*: N. 38_{15} S. 525 Z. 1 – S. 526 Z. 9 u. N. 38_{17} S. 539 Z. 11 – S. 541 Z. 8.

	1		2		3
ǂ☉☿ ‡♀☽ ⊓	ǂ $\frac{qn\beta}{a}$	y^2	ǂ $2qp\beta$	y	ǂ $qp\beta^2$
	‡ $\frac{lr\beta}{a}$	..	ǂ $\frac{qn\beta^2}{a}$	..	ǂ $rpa\beta$
			‡ $2ls\beta$	..	‡ $ls\beta^2$
			‡ $\frac{lr\beta^2}{a}$	..	‡ $nsa\beta$
	$\boxed{q.n.r.}$		$\boxed{q.n.r.p.s.}$		$\boxed{q.n.r.p.s.}$

	4		5		6		7		8
♀☿ ⊓	$\frac{q^2}{a^2}$	y^4	$+\frac{2q^2\beta}{a^2}$	y^3	$+\frac{q^2\beta^2}{a^2}$	y^2	$+\frac{qr\beta^2}{a}$	y	$+qs\beta^2$
			$+\frac{2qr}{a}$	..	$+\frac{3qr\beta}{a}$	..	$+r^2\beta$	..	$+rsa\beta$
			$\boxed{q.r.}$		$+2qs$	..	$+2rsa$	..	$+s^2a^2$
					$+r^2$	..	$+2qs\beta$	..	$\boxed{q.r.s.}$
					$\boxed{q.r.s.}$		$\boxed{q.r.s.}$		

$$\text{Iam ♃} + \text{♄} \sqcap \frac{\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ hf^2 & y^2 & +2afgh & y & +a^2g^2h \\ & & +a^2\beta h & .. & +afg\beta h \\ +ma^2 & .. & +2da^2m & .. & +d^2a^2m \\ & & +\dfrac{a^2\beta m}{2} & .. & +\dfrac{\beta da^2m}{2} \end{array}}{\begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a^2f^2y^4 & +2afga^2\ y^3 & +a^2g^2a^2\quad y^2 & +a^2g^22da^2\ \ y & +a^2g^2d^2a^2 \\ & +a^2\beta a^2\ \ .. & +afg\beta a^2\quad .. & +afg\beta 2da^2\ .. & +afg\beta d^2a^2 \\ & +f^22da^2\ .. & +2afg2da^2\ .. & +\dfrac{a^2g^2a^2\beta}{2}\ \ .. & +a^2g^2\dfrac{\beta da^2}{2} \\ & +\dfrac{f^2a^2\beta}{2}\ .. & +a^2\beta 2da^2\quad .. & +\dfrac{afg\beta a^2\beta}{2}\ \ .. & +\dfrac{afg\beta\beta da^2}{2} \\ & & +\dfrac{2afga^2\beta}{2}\ .. & +2afgd^2a^2\ \ .. & \\ & & +\dfrac{a^2\beta a^2\beta}{2}\quad .. & +a^2\beta d^2a^2\quad .. & \\ & & +d^2a^2f^2\quad .. & +\dfrac{2afg\beta da^2}{2}\ .. & \\ & & +\dfrac{\beta da^2}{2}f^2\quad .. & +\dfrac{a^2\beta\beta da^2}{2}\quad .. & \end{array}}$$

In his duabus formulis inter se conferendis, sunt cognitae, a, β; quaesitae: $q, n, l, r, p, s, h, m, f, d, g$.

Ante omnia per 4, erit $f \sqcap q$. Literae quae saepissime occurrunt rectius in postremum differuntur.

$\underline{h}$ occurrit vicibus 5 semper simpliciter cum $f^2.fg.g^2$

$\underline{m}$ . . . . cum $d.d^2$

14 cognitae, a, β; *(1)* arb *(2)* indetermi *(3)* quaesitae *L* 16 f $\sqcap$ q. *(1)* m per 1 *(2)* $\underline{\text{m}}$ per (1), et h.s.q.n.l.r. $\underline{\text{d.}}$ per (2) in *(3)* Literae *L* 17 f. differuntur. *(1)* Saepissime autem occurrunt h, et m, proxime q, inde r. h occurrit vicibus 5, semper pure *(2)* $\underline{\text{h}}$ . . . semper *(a)* pure *(b)* simpliciter *L*

$\underline{f}\ f^2\,h.$	$fg\,h.$	$f^2\,d\,.$	$f^2\,d^2$	$\underline{l}\ l\ q$	$\underline{r}\,r\,l.\,r^2$
		$fg\,..$	$fg\,..$	$..\,r$	$..\,n$
				$\underline{n}\,n\,q$	$..\,q$
$\underline{g}\ g^2\ h.$	$g\,f\,h$			$..\,r$	
$..\ \ d$	$....\,d$				
$..\ \ d^2$	$....\,d^2$			$\underline{q}\,q\ l.\,q^2$	
				$..\,n$	
$\underline{d}\,d\ \ m.$	$d^2\ m$			$..\,r$	
$..\ \ f^2$	$..\ \ f^2$				
$..\ \ fg$	$..\ \ fg$				
$..\ \ g^2$	$..\ \ g^2$				

Repetam:	$\underline{h}$	$h\,fg$	2.3	$\underline{m}$	$m\,d$	3.	$\underline{d}$	$d\,m$	2.3		$d^2\,m$	3.
		$..\,f^2$	1.		$..\ d^2$	3.		$..\,f^2$	5.6		$..\ f^2$	6.
		$..\,g^2$	3.		$\bullet$	1.2		$..\,fg$	6.7.8.		$..\ fg$	7.8
								$..\,g^2$	7.8		$..\ g^2$	8.
								$\bullet$	6.7		$\bullet$	7.

$\underline{l}\ \ l\ q$	$\underline{n}\ \ n\,q$	$\underline{q}\,q\,l$	q^2	$\underline{r}\ \ r\,l$	r^2	$\underline{f}$	$\underline{g}$
$..\,r$	$..\,r$	$..\,n$		$..\,n$			
		$..\,r$		$..\,q$			

Sed cum nullum magnopere ex allegatione coepta usum videam, eam non perfeci.

Quoniam tamen in calculo tam prolixo opus est compendio, ideo seriem ♄, ita exhibebimus: $\dfrac{m}{y^2+by+ca}$ ponendo scilicet multiplicatam per f^2 fractionem ♄. Fractionem ♃ ita exprimemus: $\dfrac{h}{y^2+ey+a\varepsilon}$ ponendo $b \sqcap \dfrac{2afg+f^2\beta}{f^2}$, et $c \sqcap \dfrac{a^2g^2+afg\beta}{f^2}$, et $e \sqcap 2d+\dfrac{a^2}{2}$, et $\varepsilon \sqcap d^2+\dfrac{\beta d}{2}$ unde $d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$.

1 *(1)* f vicibus 3 semper cum h; bis cum g, semel secum ipso *(2)* $\underline{\mathrm{f}}$ *L* 24 b $\sqcap$ *(1)* $\dfrac{2\mathrm{afg}+\mathrm{a}^2\beta}{\mathrm{f}^2}$ *(2)* $\dfrac{2\mathrm{afg}+\mathrm{f}^2\beta}{\mathrm{f}^2}$ *L* 25 unde d $\sqcap$ $\dfrac{2\mathrm{e}-\mathrm{a}}{4}$ *erg. L*

Addendo iam ♃ et ♄ reformata, fiet:
$$\frac{\begin{array}{l} +my^2 + emy + a\varepsilon m \\ +h\,.. \; + bh\,.. + eah \end{array}}{\begin{array}{l} y^4 + by^3 + cay^2 + caey + ca^2\varepsilon \\ \quad + e\,.. \; + eb\,.. \; + a\varepsilon b.. \\ \qquad\quad + a\varepsilon\,.. \end{array}}$$

Unde patet in fractione ex ☉ et ☽ facta, nempe $\frac{\text{ǂ☉☿ ‡♀☽}}{\text{♀☿}}$ posse audacter poni $q \sqcap a$ cognitae seu unitati. Videamus tamen an non et hanc brevius exprimere liceat, nempe: Nota ☉ et [♀] non bene supra expressae quia in ipsis omissae p et s. Sic ergo:

$$\begin{array}{ccc} \odot & & \text{☽} \\ & & \begin{array}{r} \frac{l}{a}y^2 + \frac{2l\beta}{a}y + \frac{l\beta^2}{a} \\ + \quad n\,.. + n\beta \end{array} \\ \text{ǂ}\,\dfrac{\frac{l}{a}y^2 + ny + pa}{y^2 + ry + sa} & \text{‡} & \dfrac{+pa}{\begin{array}{r} y^2 \;+\; 2\beta y \;+ \beta^2 \\ + \quad r\,.. \;+ r\beta \\ + sa \end{array}} \\ \text{♀} & & \text{☿} \end{array}$$

641,24 *Zu* $b \sqcap \frac{2afg + f^2\beta}{f^2}$, et $c \sqcap \frac{a^2g^2 + afg\beta}{f^2}$: Ergo $g \sqcap \frac{fb - f\beta}{2a}$ et $c \sqcap a^2, \frown \frac{b-\beta}{2a}\square, +a\beta, \frown \frac{b-\beta}{2a}$. Ergo c. non est quantitas separata, sed pendens a b.

6 f. nempe *(1)* ☉ manebit ǂ $\frac{\frac{l}{a}y^2 + ny}{}$ *(2)* Nota ☉ et | ☽ *ändert Hrsg.* | non *L*

641,24 f. $e \sqcap 2d + \frac{a^2}{2} \ldots d \sqcap \frac{2e-a}{4}$: Richtig wäre $e = 2d + \frac{\beta}{2}$ bzw. $d = \frac{2e-\beta}{4}$. Die fehlerhaften Werte für d bzw. e gehen in , S. 647 Z. 16 f. und in N. 44_2 S. 653 Z. 3–6 in die weitere Rechnung ein.
7 Nota: s. Erl. zu S. 638 Z. 5–9.

Et ut compendio consulamus licebit ☽ ita enuntiare: $\dfrac{\frac{l}{a}y^2 + \lambda y + \pi a}{y^2 + \varrho y + \omega a}\ \dfrac{☽}{☿}$. Tantum ergo notemus; $\underline{\varepsilon}$ pendere ex e. $\underline{\varrho}$ ex r. $\underline{\omega}$ ex r et s. $\underline{\lambda}$ ex l et n. et $\underline{\pi}$ ex $l.n.p$. Igitur $\dfrac{☉☿ + ☽♀}{♀☿}$ faciet:

$$\dfrac{\dagger \left\{ \begin{array}{lll} & & pay^2 \\ + \varrho n & .. + & \varrho pay \\ + \omega l & .. + \omega an & .. + \omega a^2 p \end{array} \right\} \sqcap ☉☿ \qquad \ddagger \left\{ \begin{array}{lll} + \pi a & .. & \\ + r\lambda & .. + & r\pi a .. \\ + sl & .. + & sa\lambda .. + sa^2\pi \end{array} \right\} \sqcap ☽♀}{\quad}$$

Sed iam ex numeratore ☉☿ + ☽♀ intelligo conferendo cum calculo superiore, nullum hic a compendio seu brachylogia haberi lucrum, nisi forte in nominatore, cum hic per brachylogiam tantum novem habeantur quantitates, partes formulae, supra vero 14. Itaque retento superiore numeratore, quia nullum a comprehensione seu brachylogia lucrum, nominatorem novum adhibeamus, multiplicando: $y^2 + ry + sa$, per $y^2 \varrho y + \omega a$. Sed ne in lapsum proclives simus describendo ob affinitatem r et ϱ, et s et ω, satius ergo pro ϱ adhibere φ et pro ω adhibere, γ. et $y^2 + ry + sa$, multiplicata per $y^2 + \varphi y + \gamma a$, dabit:

12 f. habeantur *(1)* termini, supra autem *(2)* qua *(3)* quantitates, *(a)* hic vero *(b)* partes formulae, *(aa)* hic vero *(bb)* supra vero 14. *(aaa)* Commodius ergo sic exprimemus $\dagger \dfrac{☉}{♀}\ \dfrac{\frac{l}{a}y^2 + ny + pa}{y^2 + ry + sa}$ $\ddagger \dfrac{\begin{array}{r} \frac{l}{a}y^2 + \lambda y + \lambda\beta \\ + pa \end{array}}{\begin{array}{r} y^2 + \varrho y + \varrho\beta \\ + sa \end{array}}\ \dfrac{☽}{☿}$ ponendo $\lambda \sqcap \dfrac{2l\beta}{a} + n$ et $\varrho \sqcap 2\beta + r$. Unde fiet multiplicando per crucem, $\frac{l}{a}y^4$ *(bbb)* Posses et $\dfrac{☽}{☿}$ sic exprimere: $\dfrac{\begin{array}{lll} \frac{l}{a}y^2 + \frac{l}{a}\beta & y & + \lambda\beta \\ + \lambda & .. & + pa \end{array}}{\begin{array}{lll} y^2 + \beta & y & + \beta\varrho \\ + \varrho & .. & + \varrho a \end{array}}$. Sed nec hinc compendium valde notabile; *(ccc)* Commodissimum *(ddd)* Itaque L 14 $+\omega a$ *(1)*, unde fiet: *(2)* Sed L

$$\left.\begin{array}{lllll} & \text{nominator} & & & \\ y^4 + r & y^3 + sa & y^2 + \varphi sa & y + \gamma sa^2 & \\ \quad + \varphi & .. + \varphi r & .. + \gamma ar & .. & \\ & \quad + \gamma a & .. & & \end{array}\right\}\text{qui est denominator fractionis cuius numerator est,}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{numerator} & \\ \mp n\beta \quad y^2 & \mp 2ap\beta \, y & \mp ap\beta^2 \\ \pm \dfrac{lr\beta}{a} \;.. & \mp n\beta^2 \;.. & \mp rpa\beta \\ & \pm 2ls\beta \;.. & \pm ls\beta^2 \\ & \pm \dfrac{lr\beta^2}{a} \;.. & \pm nsa\beta \end{array}$$

Quae fractio conferenda est cum superiore cuius

$$\begin{array}{lllll} & \text{nominator} & & & \\ \cancel{4} \quad \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & 8 & \\ y^4 + b \quad y^3 & + ca \; y^2 & + cae \; y & + ca^2\varepsilon & \\ \quad + e \;\; .. & + e\beta \;.. & + a\varepsilon\beta \;.. & & \\ & + a\varepsilon \;.. & & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & \text{numerator} & \\ \cancel{1} & \cancel{2} & 3 \\ + ma \; y^2 & + ema \; y & + a^2\varepsilon m \\ + ha \;\; .. & + bha \;\; .. & + ca^2 h \end{array}$$

Quaerendae sunt: $b.c.e.(\varepsilon).h.m., l.n.p.\underbrace{r.(\varphi)s.}_{(\gamma)}$

Ex coll. $\underline{\underline{5}}$, erit $\underline{b} \sqcap \boxed{r+\varphi}\, 2r + 2\beta - e$. ex $\underline{\underline{6}}$, erit $\underline{c} \sqcap \dfrac{sa + \varphi r + \gamma a - e\beta - a\varepsilon}{a}$. Ex $\underline{\underline{1}}$, erit

---

18 *Nebenbetrachtung:* $\varepsilon \sqcap \dfrac{d^2 + \beta d}{2}$. Est autem $d \sqcap \dfrac{2e - a}{4}$. $\varphi \sqcap 2\beta + r$. $\gamma \sqcap \dfrac{\beta^2 + r\beta + sa}{a}$.

Inveni errorem in eo commissum, quod c velut literam separatam, a b independentem supponi, quod non est.

---

10 superiore: S. 642 Z. 1–4. 19 $\varepsilon = \dfrac{d^2 + \beta d}{2}$: Leibniz übernimmt die Werte für ε und d von S. 641 Z. 25 (vgl. Erl.), für φ und γ aus der Formel ☿ S. 642 Z. 11–13. Beim Übertragen der Gleichung für ε unterläuft ihm ein Schreibfehler; der fehlerhafte Wert geht in die Berechnung von ε in S. 646 Z. 1 f. ein, wobei weitere Unstimmigkeiten auftreten. Das Ergebnis beeinträchtigt die Rechnung in N. 44_2 ab S. 658 Z. 1.

$\underline{m} \sqcap \dfrac{\mp n\beta a \pm lr\beta - ha^2}{a^2}$, ex $\underline{\underline{2}}$, erit

$\underline{p} \sqcap \dfrac{\mp n\beta a^2 e \pm lr\beta ea - ha^3 e + 2rha^3 + 2\beta ha^3 \pm n\beta^2 a^e \mp 2ls\beta a^2 \mp lr\beta^2 a}{\mp 2a^3\beta}$. Ex $\underline{\underline{7}}$, fiet:

$2\beta sa + rsa + r\beta^2 + r^2\beta + rsa \sqcap esa \boxed{+e\varphi r} + 2\beta er + 2r^2 e + e\beta^2 + er\beta + esa + 2ra\varepsilon + 2\beta a\varepsilon - ea\varepsilon$ adeoque $\underline{s} \sqcap \dfrac{+3\beta er + 2r^2 e + e\beta^2 + 2ra\varepsilon + 2\beta a\varepsilon - ea\varepsilon - r\beta^2 - r^2\beta}{2\beta a + 2ra - 2ea}$. Ex aequatione autem $\underline{\underline{8}}$, fiet:

$$\left.\begin{array}{l} 3\beta er\,\beta^2 + 2r^2e\,\beta^2 + e\beta^2\,\beta^2 + 2ra\varepsilon\,\beta^2 + 2\beta a\varepsilon\,\beta^2 - ea\varepsilon\,\beta^2 - r\beta^2\,\beta^2 - r^2\beta\,\beta^2 \\ \ldots.\ r\beta + \ldots.\ r\beta + \ldots\ r\beta + \ldots.\ r\beta + \ldots.\ r\beta - \ldots\ r\beta - \ldots\ r\beta - \ldots\ r\beta \\ \ldots.\ sa + \ldots.\ sa + \ldots\ sa + \ldots.\ sa + \ldots.\ sa - \ldots\ sa - \ldots\ sa - \ldots\ sa \end{array}\right\} \sqcap$$

$$\begin{array}{lllll} sa^2e\,2\beta\cancel{a} & +\varphi rae\;2\beta\cancel{a} & +\gamma a^2e\quad 2\beta\cancel{a} & -e^2a\beta\,2\beta\cancel{a} & -a^2e\varepsilon\,2\beta\cancel{a} \\ \quad 2r\cancel{a} & \overbrace{2\beta+r}\quad 2r\cancel{a} & \overbrace{\dfrac{\beta^2+r\beta+sa}{a}}\quad 2r\cancel{a} & \quad 2r\cancel{a} & \quad 2r\cancel{a} \\ -2e\cancel{a} & \quad -2e\cancel{a} & \quad -2e\cancel{a} & -2e\cancel{a} & -2e\cancel{a} \end{array}$$

Sed cum duae literae sint in mea potestate, utile videtur, ponere, $s \sqcap 0$. et fiet ex coll. 7:

$$\oplus\, r^2 \left.\begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} +3\beta er \\ \boxed{+2a\varepsilon..} \\ -\beta^2.. \\ \hline 2e-\beta \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{c} +e\beta^2 \\ \boxed{\begin{array}{r} +2\beta a\varepsilon \\ -ea\varepsilon \end{array}} \\ \hline 2e-\beta \end{array}\right. \end{array}\right\} \sqcap 0 \quad \text{et ex coll. 6[:]}$$

---

13 *Kontrollbetrachtung mit Nebenrechnungen:* $(e \sqcap -\dfrac{15}{2})$ $3\beta e \sqcap \dfrac{-45 \boxed{\cancel{\frown 4}} \frown 2}{\boxed{\cancel{2}}} \sqcap -90$, $-16 \sqcap -106$. $-19 \sqcap 2e - \beta$. $\begin{array}{r} 15 \\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$ $\begin{array}{c} \cancel{6} \\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} \\ \cancel{1}\cancel{9} \end{array} \sqcap 6$ $\dfrac{4[!]}{19}$ $\dfrac{e\beta^2 \sqcap -15 \frown 8}{-19 \sqcap 2e - \beta} \sqcap 6\dfrac{4[!]}{19}$. Ex quo calculo apparet r esse quantitatem realem, quod desiderabatur.

644,18 $\underline{\mathrm{c}} \sqcap \dfrac{\mathrm{sa} + \varphi\mathrm{r} + \gamma\mathrm{a} - \mathrm{e}\beta - \mathrm{a}\varepsilon}{\mathrm{a}}$. *(1)* Ex 7. explicando $\varphi \sqcap 2\beta + \mathrm{r}$, ex coll. 7. fiet: *(2)* $2\beta 3\mathrm{sa}$ *(3)* γ *(4)* Ex 8, $\gamma \sqcap \dfrac{\mathrm{sa}\cancel{2}\varepsilon + \varphi\mathrm{r}\cancel{a}\varepsilon + \gamma\mathrm{a}\cancel{2}\varepsilon - \mathrm{e}\varepsilon\beta - \cancel{a}\varepsilon^2}{\mathrm{sa}}$ *(4)* Ex $\underline{\underline{1}}$ *L* 644,19 d $\sqcap \dfrac{2\mathrm{e} - \mathrm{a}}{4}$. *(1)* ergo $\varepsilon \sqcap \dfrac{4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{ea} + \mathrm{a}^2}{32} +$ *(2)* $\varphi \sqcap 2\beta + \mathrm{r}$ *L*

$+3\,2\,\beta r + r^2 + \beta^2 \boxed{+r\beta} - e\beta - a\varepsilon \sqcap 0$. Est autem $\varepsilon \sqcap \dfrac{4e^2-4ea+a^2}{32} + \dfrac{2\beta e - \beta a}{2a}$ vel $\varepsilon \sqcap \dfrac{4e^2-4ea+a^2+32\beta e-16\beta a}{32a}$. Unde ex coll. 6 fiet: $96\beta r + 32r^2 + 32\beta^2 - e\beta - 4e^2 + 4ea - a^2 - 32\beta e + 16\beta a \sqcap 0$ sive

$$\left.\begin{array}{rrr} e^2 & +\ \ \beta e & -\ 96\beta r \\ & -\ \ 4a.. & -\ 32r^2 \\ & +32\beta.. & -\ 32\beta^2 \\ & & +\ \ \ a^2 \\ & & -\ 16\beta a \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{4} \end{array}\right\} \sqcap\ 0.$$

Ex priore aequatione, coll. 7. substituendo pro ε eius valorem, fiet:

$$\begin{array}{llll} r^2 & +\,96\beta e\, r & +\,32e\beta^2 & \sqcap\ 0. \\ & +\ \ 8e^2 & +\ \ 8\beta e^2 & \\ & -\ \ 8ea & -\ \ 8ea\beta & \\ & +\ \ 2a^2 & +\ \ 2\beta a^2 & \\ & +\,64\beta e & +\,64\beta^2 e & \\ & \underline{-\,32\beta a} & \underline{-\,32\beta^2 a} & \\ & -\,32\beta^2 & -\ \ \ 4e^3 & \\ & & +\ \ 4e^2 a & \\ & & -\ \ \ ea^2 & \\ & & -\,32\beta e^2 & \\ & & +\,16e\beta a & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{64e-32\beta} & \end{array}$$

Sed aliter quoque et credo brevius: Ponendo, ut dixi $s \sqcap 0$. fiet et $ca^2\varepsilon \sqcap 0$. Ergo vel $c \sqcap 0$. ut paulo ante, vel potius divisa aequatione per c. fiet $\varepsilon \sqcap 0$. Quo facto exitus habetur planus, quia fiet: ♂ $\begin{array}{l} \underline{\underline{e^2}} - \ \ ae + \dfrac{a^2}{4} \\ +8\beta \ \ -4\beta a \end{array} \sqcap 0$. Habetur ergo e pure, sine r, et proinde $\underline{r}$ quoque.

6+9 $\sqcap$ 0. *(1)* Eodem modo in priore aequatione *(a)* subst *(b)* Ex coll. 7 *(aa)* fiet *(bb)* fiet *(3)* Ex *L* 23 facto *(1)* ad utrius *(2)* exitus *L*

645,16 ($e \sqcap -\dfrac{15}{2}$): Leibniz verwendet die Gleichung von S. 647 Z. 17 mit den Werten $\beta = 4$ und $a = 1$. 1 f. Est autem ε: S. Erl. zu S. 644 Z. 19.

Aequationibus $\oplus$ ex coll. 7, et ♂ ex coll. 8 inventis restat aequatio invenienda ex coll. 3. ubi quia s et ε sunt $\sqcap 0$. ponendo etiam $p \sqcap 0$. restabit ex coll. 3. $ca^2h \sqcap 0$. id est vel $c \sqcap 0$. vel $h \sqcap 0$. Sed non licet ponere $c \sqcap 0$. quia in valore ipsius c. ex coll. 6. non continentur aliae incognitae quam r. et e. quae iam sunt inventae, erit ergo ex coll. 3. $\underline{h} \sqcap 0$. Sed iam video id non licere, neque h neque m facere $\sqcap 0$. Quare nec p licebit ponere $\sqcap 0$. fiet ergo: ex coll. 3. $\text{ǂ}ap\beta^2 \ \text{ǂ}\ rpa\beta \sqcap ca^2h$. vel

$$\begin{array}{cccccccc} \text{ǂ}\, n\beta ae\beta & \ddagger\, n\beta^2 a\beta & \ddagger\, lr\beta e\beta & \boxed{\begin{array}{c}\text{ǂ}2ls\beta a\beta \\ \ldots.\, ra\end{array}} & -hae\,a\beta & \text{ǂ}\, lr\beta^2 a & +2rha\,a\beta & +2\beta ha\,a\beta \\ \ldots\ ar & \ldots\ ar & \ldots.\, r & & \ldots\ ra & \ldots.\, r & \ldots.\ ra & \ldots.\ ra \end{array}$$
$$\sqcap 2ca^2h,$$

sive $\sqcap \boxed{2sa^3h} + 2\varphi ra^2h + 2\gamma aa^2h - 2e\beta a^2h \boxed{-2a\varepsilon a^2h}$. Ac primum parenthesi inclusa evanescunt, quia s et $\varepsilon \sqcap 0$. per superiora. Supersunt incognitae, h, n, l ex quibus duae sunt supernumerariae, non tamen licet ponere $h \sqcap 0$. neque n simul cum l. Optimum ergo erit ponere vel l vel n aequale $\sqcap 0$. et h. arbitrariae valorem quendam ascribere, per quem aequatio reddatur simplicior. Hac ergo in parte manifeste habetur exitus, tantum unum excutiendum superest, an e et r sint quantitates verae, an imaginariae. Imo de e non metuendum, nam si $\varepsilon \sqcap 0$ fiet per superiora $d \sqcap -\beta$. ut idem $d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$. Ergo $e \sqcap \dfrac{a-4\beta}{2}$. nam divisibilis est aequatio ♂ per d, aut per $\dfrac{2e-a}{4}$.

16 per superiora: Leibniz verwendet die fehlerhafte Gleichung für ε von S. 644 Z. 19.

44_2. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS SECUNDA
3. März 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 7 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt. — Auf Bl. 7 r° außerhalb des Textes 3 Skizzen in Blindtechnik, möglicherweise zur Rechenmaschine (hier nicht wiedergegeben).
Cc 2, Nr. 915 A tlw.

3 Martii 1675

Pars 2^{da} De seriei fractionum summa cum formulae differentiarum comparatur

His ita pulchre in speciem procedentibus, denique errorem aliquem subesse deprehendi, non quidem calculi, sed quod peius ratiocinationis, nam praecipitato nonnihil iudicio sumi b. et c. velut a se invicem independentes, cum tamen sit $b \sqcap \dfrac{2ag+f\beta}{f}$. Unde $g \sqcap f, \frown \dfrac{b-\beta}{a}$. Iam $c \sqcap \dfrac{a^2g^2+afg\beta}{f^2}$, ergo $c \sqcap \dfrac{a^2, \frown f^2, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}\square,, + a\beta, \frown f^2, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}}{f^2}$, sive $c \sqcap \dfrac{b^2-2\beta b+\beta^2}{4} + \dfrac{b\beta-\beta^2}{2}$ sive $c \sqcap \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2, +2b\beta-2\beta^2}{4}$ sive $c \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4}$. Ergo omnium serierum, quarum numerator constans, nominator vero: $y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}$, ut $\dfrac{1}{y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$ iniri potest summa. Unde si sit series $\dfrac{1}{y^2+2\mu y+\mu^2}$. conferendo erit: $\mu \sqcap \dfrac{b}{2}$. et $\mu^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}$. Ergo $\dfrac{b^2}{4} \sqcap \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{\beta^2}{4}$. Ergo $\beta \sqcap 0$. quod est absurdum.

8 Pars 2^{da} *(1)* De *(a)* serierum *(b)* seriei summa *(2)* De *L*

Videamus an habeatur series: $\dfrac{1}{y^2+2\mu y+\mu^2 \atop +\xi^2}$. Unde conferendo: $\mu \sqcap \dfrac{b}{2}$ et $\mu^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}$. Iam $\dfrac{b^2}{4}+\xi^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}-\dfrac{\beta^2}{4}$. Erit $\xi^2 \sqcap -\dfrac{\beta^2}{4}$. quod est absurdum.

$y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}$ conferenda cum: $y^2 + {2dy \atop +\frac{\beta}{2}} + {d^2 \atop +\frac{\beta d}{2}}$ fiet $d \sqcap \dfrac{2b-\beta}{4}$, et $d^2 \sqcap \dfrac{4b^2-4b\beta+\beta^2}{16}$. Unde $\boxed{4b^2}\,\underset{/\!/}{\boxed{-4b\beta}}+\beta^2\,\underset{/\!/}{\boxed{+4b\beta}}-2\beta^2 \sqcap \boxed{4b^2}-4\beta^2$ aequatio absurda. Ergo ne ista quidem series.

Sumamus seriem polygonorum, et videamus quarumnam ex illis fractionum haberi possit summa. Porro ut alibi ex Gosselino calculavi, si numerus angulorum sit B, latus z, numerus polygonus erit: $\dfrac{2a+B}{2}\,z^2\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\\ -Ba\end{array}\right.}{2}\,z$. Explicetur z per $y+\mu$, fiet:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\left\{\begin{array}{l}2a\quad y^2\\ +B\ ..\end{array}\right.}{2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2a \frown 2\mu\, y\\ +B\end{array}\right.}{2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2a\quad \mu^2\\ +B\ ..\end{array}\right.}{2}, \\ & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\quad ..\\ -Ba\quad ..\end{array}\right.}{2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\mu\\ -Ba\,\mu\end{array}\right.}{2} \end{array}$$

divisisque omnibus per $\dfrac{2a+B}{2}$, fiet:

$$\begin{array}{lll} y^2 & +\ \mu\, y & \mu^2. \\ & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\,..\\ -Ba\,..\end{array}\right.}{+2a \atop +B} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\mu\\ -Ba\,..\end{array}\right.}{+2a \atop +B} \end{array}$$

Erit $\mu \sqcap \dfrac{2ab+Bb-4a^2+Ba}{2a+B}$. et

4–651,3 y^2+by ... [irrationalem]: Leibniz versucht nacheinander drei Zahlenfolgen durch Koeffizientenvergleich auf die Ausgangsformel zurückzuführen. Ab Z. 16 unterlaufen ihm einige Fehler, welche die Überlegungen beeinträchtigen. 9 alibi ex Gosselino: Leibniz exzerpiert den Satz über die Polygonalzahlen aus *De arte magna*, 1577; Bl. 11 r° [Marg.] und übersetzt ihn in eine analytische Formel in N. 41₂ S. 601 Z. 8–18. 16–650,15 $+\mu y$: Leibniz vergißt den Faktor 2. Der Fehler geht in die weitere Rechnung ein und beeinträchtigt zusammen mit weiteren Unstimmigkeiten in der Gleichung S. 650 Z. 10 f. die Berechnung von b in S. 650 Z. 14 f.

$$\mu^2 \sqcap \frac{4a^2b^2+4abBb-16aba^2+4abBa,+B^2b^2-8Bba^2+2B^2ba,+16a^4-8a^2Ba+B^2a^2}{4a^2+4aB+B^2}.$$

Unde fiet: $4a^2b^2+4abBb$ etc.,
$$\begin{array}{lll} +2ab, & \frown +4a^2 \sqcap & \left\{ \begin{array}{ll} +b^2 & \frown +4a^2\ . \\ -\beta^2 & +4aB \end{array}\right. \\ +Bb & -Ba & \\ \hline -4a^2 & & \quad 4 \qquad +B^2 \\ +Ba & & \end{array}$$

Compendii causa rectius ita procedemus: Ponendo $\mu \sqcap \dfrac{2ab+Bb-4a^2+Ba}{2a+B}$ vel $b-\dfrac{4a-B,\frown a}{2a+B}$ erit $\mu^2 \sqcap b^2-2ba\dfrac{4a-B}{2a+B}+\dfrac{4a-B[,\frown a]}{2a+B}\square$. Ergo $b^2-2ba\dfrac{4a-B}{2a+B}+\dfrac{4a-B[,\frown a]}{2a+B}\square+\boxed{\dfrac{4a-B,\frown a\mu}{2a+B}}\,\dfrac{4a-B,,\frown b\frown 2a+B,,-4a+B,\frown a}{2a+B,\square} \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4}$.

Multiplicentur omnia per $16a^2+16aB+4B^2$, fiet:

$$\boxed{16a^2b^2}\boxed{+16aBb^2}\boxed{+4B^2b^2}-2ba4a4a-2ba4a2B+2baB4a+2baB2B+64a^4-32a^3B+4a^2B^2 \sqcap \boxed{16a^2b^2}\boxed{+16aBb^2}\boxed{4B^2b^2}-16a^2\beta^2-16aB\beta^2-4B^2\beta^2.$$

Unde patet huius aequationis ope regulariter inveniri posse b. Adeoque regulariter summam numerorum fractionum polygonalium inveniri posse; fiet

$$b \sqcap \frac{-16a^2\beta^2-16aB\beta^2-4B^2\beta^2-64a^4+32a^3B-4a^2B^2}{\begin{array}{c}-32a^3\boxed{-16a^2B+8a^2B}+4aB^2\\ -8a^2B\end{array}}.$$

Exemplo utamur pentagoni cuius formula: $y^2+7\mu a y+7\mu^2$. Ergo $\mu \sqcap \dfrac{b-a}{7}$. et

$+ \quad a \quad +a\mu$

$$\mu^2 \sqcap \frac{b^2-2ba+a^2}{49}.\ \text{Unde}\ \frac{b^2-2ba\boxed{+a^2}+\boxed{ab}\boxed{-a^2}}{7} \sqcap \frac{b^2-a^2}{4}\ \text{seu}\ \boxed{4b^2}-4ba \sqcap$$

7 f. ,⌒ a *erg. Hrsg. zweimal* 13 numerorum *(1)* polygonorum *(2)* fractionum *L* 13 posse; *(1)* fiet enim b ⊓ *(2)* ponamus *(3)* sed nos e diverticulo in viam redeamus *(4)* fiet *L*

16–651,3 formula: Die Formel für die Fünfeckszahlen ist fehlerhaft und beeinträchtigt zusammen mit Flüchtigkeitsfehlern in Z. 16 (in der Gleichung für μ fehlt der Faktor a im Nenner) und in S. 651 Z. 1 (in der zweiten Gleichung der Kette müßte $+\frac{7}{3}a^2$ stehen) die Überlegung bis S. 651 Z. 3.

$3\,7b^2 - 7a^2$. sive $b^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}a^2 \sqcap \frac{4}{9}a^2 + 7a^2 \sqcap \frac{4a^2+63a^2}{9} \sqcap \sqrt{\frac{67a^2}{9}} \sqcap b + \frac{2}{3}a$ sive $b \sqcap \frac{a\sqrt{67}-2a}{3}$. Et notabile est infinitorum numerorum rationalium summae sic aequalem haberi [irrationalem].

$\frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{1 + y^2 - 1}{y^2-1, \frown y+1}$, huius seriei momentum ex $y+1$. est $\frac{y^2}{y^2-1}$ quod haberi potest. Eiusdem momentum ex $y-1$, est: $\frac{y^2}{y^2+2y+1}$. Haec ergo pendet ex $\frac{1}{y+1}$. $\frac{y^2+2y+1}{y^2+2y+1} \sqcap 1$. et $\frac{y+1}{y^2+2y+1} \sqcap \frac{1}{y+1}$. Ergo $\frac{y}{y^2+2y+1}$ pendet etiam ex $\frac{1}{y+1}$.

$\frac{da}{y^2-\beta^2} + \frac{c}{y+\beta} \sqcap \frac{da+cy-c\beta}{y^2-\beta^2}$, seu $\frac{\begin{array}{c} cy - c\beta \\ + da \end{array}}{y^2-\beta^2}$ vel $\frac{\begin{array}{c} y - \beta \\ + \frac{da}{c} \end{array}}{y^2-\beta^2}$. Pone $-\beta + \frac{da}{c} \sqcap \beta$ fiet: $\frac{da}{c} \sqcap 2\beta$.

$\frac{1}{y+\beta} - \frac{1}{y-\beta} \sqcap \frac{y-\beta-y-\beta}{y^2-\beta^2} \sqcap \frac{[-2\beta]}{y^2-\beta^2}$

Operae pretium foret invenire indicium unde pateat an aequatio impossibilis etiam ante collationem.

$bf \sqcap 2ga + f\beta$, et $f^2c \sqcap g^2a + f\beta g$. Ergo $g \sqcap \frac{bf-f\beta}{2a}$, et $g^2 \sqcap \frac{b^2f^2 - 2bf^2\beta + f^2\beta^2}{4a^2}$.

Iam $\cancel{f^2}c \sqcap \frac{b^2\cancel{f^2}\,-2bf^2\beta + \cancel{f^2}\beta^2}{4a\cancel{^2}}, \frown \cancel{a}, + \frac{f\beta bf - \cancel{f^2}\beta^2}{2}$. $c \sqcap \frac{b^2 + \beta^2 - 2\beta^2 - \beta^2}{4}$. Aliter:

3 rationalem *L ändert Hrsg.* 4 huius *(1)* figurae *(2)* seriei *L* 11 $2\beta^2$ *L ändert Hrsg.*

4–7 $\frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{y+1}$: Leibniz vergißt auf der rechten Seite der Gleichung im Zähler den Term $+y$; die Überlegung bzgl. der Momente wird dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt.

$$f \sqcap \frac{2ga}{b-\beta} \text{ et } f^2 \sqcap \frac{4g^2a^2}{b^2-2b\beta+\beta^2}.\ c \sqcap \frac{\cancel{g^2}a - \dfrac{2\cancel{g}a \frown \beta\cancel{g}}{b-\beta}}{\dfrac{4\cancel{g^2}a^2}{b^2-2b\beta+\beta^2}} \sqcap \frac{b\cancel{a}\boxed{-\beta a+2\beta a} + \beta\cancel{a}, \frown b-\beta}{4a\cancel{2}}.$$

Ergo $c \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4a}$.

Redeamus ad nostram collationem:

$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$
$\text{ǂ}\, n\beta\ y^2$	$\text{ǂ}\, 2ap\beta y$	$\text{ǂ}\, ap\beta^2$	y^4	$+2r\, y^3$	$+2sa\ \ y^2$	$+2\beta say$	$+\beta^2 sa$
	$\text{ǂ}\ \ n\beta^2 ..$	$\text{ǂ}\, rpa\beta$		$+2\beta ..$	$+3\beta r\ \ ..$	$+3rsa ..$	$+r\beta sa$
$\text{‡}\, \dfrac{lr\beta}{a} ..$	$\text{‡}\, 2ls\beta\ ..$	$\text{‡}\, ls\beta^2$			$+\ \ r^2\ ..$	$+\beta^2 r\ \ ..$	$+s^2a^2$
	$\text{‡}\, \dfrac{lr\beta^2}{a} ..$	$\text{‡}\, nsa\beta$			$+\ \ \beta^2\ ..$	$+r^2\beta\ \ ..$	
$+ma\, y^2$	$+ema\ ..$	$+a^2\varepsilon m$	y^4	$+\ b\, y^3$	$+\ \ \dfrac{b^2}{4}\, y^2$	$+\dfrac{b^2}{4} e\ \ y$	$\Big\{ +b^2a\varepsilon$
$+ha\ \ ..$	$+bha\ \ ..$	$+\dfrac{b^2ah}{4}$		$+\ e\ ..$	$-\ \ \dfrac{\beta^2}{4} ..$	$-\dfrac{\beta^2}{4} e\ ..$	$\dfrac{-\beta^2a\varepsilon}{4}$
		$-\dfrac{a\beta^2h}{4}$			$+\ \ e\beta\ \ ..$	$+a\varepsilon b\ \ ..$	
					$+\ \ a\varepsilon\ \ ..$		

$b \sqcap 2r + 2\beta - e$ per coll. 5. $\quad m \sqcap \dfrac{\text{ǂ} n\beta a\, \text{‡}\, lr\beta - ha^2}{a^2}$ ex coll. 1.

$$p \ \sqcap\ \frac{\text{ǂ}\, en\beta a\, \text{‡}\, elr\beta - eha^2 + \overbrace{\underbrace{2r+2\beta-e}}{b}ha^2\, \text{‡}\, n\beta^2a\, \text{ǂ}\, 2ls\beta a\, \text{ǂ}\, lr\beta^2}{\text{ǂ}2a^2\beta} \text{ ex coll 2.}$$

m et h non possunt poni $\sqcap$ 0. singulatim, aut simul.

Pone $s \sqcap 0$. fiet ex 8. $b \sqcap \dfrac{\beta}{2}$ et $e \sqcap \dfrac{4r+3\beta}{2}$, nisi malimus ex 8, $\varepsilon \sqcap 0$: Habebitur e pure, sine alia incognita ex coll. 8. Nimirum fiet: $e \sqcap \dfrac{a-4\beta}{2}$. ut praecedentis plagulae

---

17–653,1 $b \sqcap \dfrac{\beta}{2}$ et $e \sqcap \dfrac{4r+3\beta}{2}$: Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich $b = \beta$ und $e = 2r + \beta$. Leibniz übernimmt anschließend jedoch den ebenfalls fehlerhaften Wert für e aus N. 44₁ S. 647 Z. 17.

fine ostendi. Ponendo igitur $s \sqcap 0.$ et $\varepsilon \sqcap 0.$ poterit iam r inveniri nulla alia incognita implicata, nisi e, quae pro cognita haberi potest.

$$\underbrace{\frac{a-4\beta}{2}}\quad\underbrace{\frac{a-4\beta}{2}}$$

Nimirum ex coll. 7: $4\beta^2 r + 4r^2\beta \sqcap b^2 e \;-\; \beta^2 e.$

$$\overbrace{4r^2+8r\beta-4re,+4\beta^2-4\beta e,+e^2}$$

$$\frac{a-4\beta}{2}\qquad \overbrace{\frac{a^2-8a\beta+16\beta^2}{4}}$$

Ex qua aequatione reducta, fiet:

$$\underset{\mathit{II}}{\boxed{16\beta^2 r}}\boxed{+16r^2\beta} \sqcap 8r^2a - 48\,32\,r^2\beta, +48\underset{\mathit{IV}}{\boxed{32\,\underset{\mathit{I}}{16}}}\,r\beta a - 144\underset{\mathit{III}}{\boxed{80\,\underset{\mathit{II}}{64}}}\,r\beta^2 - 4ra^2\underset{\mathit{I}}{\boxed{+4ra4\beta}}$$

$$\underset{\mathit{IV}}{\boxed{+4r4\beta a}}\underset{\mathit{III}}{\boxed{-4r4\beta4\beta}} + 62\underset{\mathit{V}}{8}\,\beta^2a - 120\underset{\mathit{VI}}{32}\,\beta^3 - 10\underset{\mathit{VII}}{8}\,\beta a^2\underset{\mathit{V}}{\boxed{+32\beta a\beta}}$$

$$\underset{\mathit{VI}}{\boxed{-64\beta^3}}+\frac{a^3}{2}\underset{\mathit{VII}}{\boxed{-a^2 2\cancel{4}\beta - 4\cancel{8}a\beta a}}\underset{\mathit{V}}{\boxed{+4\cancel{8}a\beta4\beta}}\underset{\mathit{V}}{\boxed{+8\cancel{16}\beta^2a}}\underset{\mathit{VI}}{\boxed{-8\cancel{16}\beta^2 4\beta}}$$

$\underset{\mathit{V}}{\boxed{-2\beta^2a}}\underset{\mathit{VI}}{\boxed{+8\beta^3}}$ seu colligendo:

$$\boxed{\begin{matrix}+\ 8a\\ \\ -48\beta\end{matrix}}\,r^2 \left\{\begin{matrix}+\quad 144\beta^2\ \ r\\ -\qquad 4a^2\\ \hline +8a-48\beta\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}+\qquad 62\beta^2a\\ -\quad 120\beta^3\\ -\qquad 10\beta a^2\\ +\qquad \dfrac{a^3}{2}\\ \hline +8a-48\beta\end{matrix}\right. \sqcap\ 0.$$ et ordinando ad extractionem:

652,18 ex coll. 8 *erg.* *L*

$$r^2 \left\{ \frac{\begin{array}{l} +\ 144\beta^2 \\ -\quad 4a^2 \end{array}}{8a-48\beta} \right. \quad r \left\{ \frac{\begin{array}{l} +\quad 20736\beta^4 \\ -\quad 1152\beta^2a^2 \\ +\quad 16a^4 \end{array}}{64a^2-768a\beta+2304\beta^2, \frown 4} \right. \quad \sqcap$$

$$\left\{ \frac{\begin{array}{l} +\quad 20736\beta^4 \\ -\quad 1152\beta^2a^2 \\ +\quad 16a^4 \end{array}}{64a^2-768a\beta+2304\beta^2, \frown 4} \right. \quad \left\{ \frac{\begin{array}{l} -\ 62\beta^2a \\ +\ 120\beta^3 \\ +\ 10\beta a^2 \\ -\ \dfrac{a^3}{2} \end{array}}{48\beta-8a} \right.$$

Ergo $\mp r \pm \dfrac{2300}{184} \sqcap \sqrt{\dfrac{4290000}{184,2,\square}+\dfrac{6108}{184}-\dfrac{1}{2}}$ ponendo $a \sqcap 1.$ et $\beta \sqcap 4.$ Unde patet hactenus nullam occurrisse impossibilitatem.

Quemadmodum ergo $e \sqcap -\dfrac{3}{2}$, ita $r \sqcap \pm\sqrt{31+\dfrac{3}{4}+33\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}}-12\dfrac{1}{2}$ seu $r \sqcap \pm 8-12\dfrac{1}{2} \sqcap -4\dfrac{1}{2}$ vel $-20\dfrac{1}{2}$.

1–7 *Nebenrechnungen und Zusätze s. S. 660 Z. 1 – S. 662 Z. 3.*

10 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} 1 \\ \not2\,0 \\ \not4\,\not6 \\ \not2\,\not3\,\not0\,0 \ \not\sqcap\ 12\ \dfrac{92}{[184]}\Big|\dfrac{1}{2} \\ \not1\,\not8\,\not4\,4 \\ \ \not1\,\not8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \not2\,3 \\ \not5\,\not4 \\ \not3\,\not7\,\not8\,6 \\ \not6\,\not1\,\not0\,\not8 \ \not\sqcap\ 33\ \dfrac{9}{46} \sqcap 33\ \dfrac{1}{5} \quad \dfrac{18}{92}\Big|\dfrac{9}{46} \\ \not1\,\not8\,\not4\,\not4 \\ \ \not1\,\not8 \end{array}$$

---

10 f. $e \sqcap -\dfrac{3}{2}$: Aus $\beta = 4$ folgt gemäß S. 652 Z. 18 $e = -\dfrac{15}{2}$. Für die Berechnung von r verwendet Leibniz Näherungswerte.

Brevius enuntiando p, erit $p \sqcap \dfrac{ema + bha \ddagger n\beta^2 \dagger 2ls\beta \dagger lr\dfrac{\beta^2}{a}}{\dagger 2a\beta}$ per coll. 2.

$$s \sqcap \frac{a^2\varepsilon m + \dfrac{b^2ah}{4} - \dfrac{a\beta^2h}{4},, \ddagger p + \boxed{\dagger\dagger}\dfrac{2ls\beta}{\dagger 2a\beta}, \frown a\beta^2 + ra\beta}{\ddagger l\beta^2 \ddagger na\beta} \text{ coll. 3.}$$

Sed iam video quia quatuor aequationes collatitias 5.6.7.8. non nisi totidem incognitae $r.s.e.b.$ ingrediuntur, ex illis solis aliquam enasci posse impossibilitatem frustraque caeteras misceri, itaque resumamus.

Ex aequatione 5, erit ut ante $b \sqcap 2r + 2\beta - e$.

Ex aequatione 6, erit $2as \sqcap \boxed{\dfrac{b^2}{4}}\dfrac{\boxed{4r^2}\boxed{+8r\beta} - 4re, \boxed{+4\beta^2}\boxed{-4\beta e} + e^2,}{4} - \dfrac{\beta^2}{4}\boxed{+e\beta} + a\varepsilon, -\boxed{3}\beta r\boxed{-r^2}\boxed{-\beta^2}$ sive $s \sqcap \dfrac{-4re + e^2 - \beta^2 + 4a\varepsilon - 4\beta r}{8a}$.

Ex aequatione 7, $\dfrac{\underset{\mathrm{VIII}}{\boxed{-4re}}\underset{\mathrm{IX}}{\boxed{+e^2}} - \beta^2 + \underset{\mathrm{V}}{\boxed{4a\varepsilon}}\boxed{-4\beta r}}{4}\beta +$

$$\frac{\underset{\mathrm{III}}{\boxed{-12r^2e}} + 11\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{3}}re^2 - 3r\beta^2 - 4\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{+12}}ra\varepsilon - 4\underset{\mathrm{II}}{\boxed{12}}\beta r^2}{8}\boxed{+\beta^2 r}\underset{\mathrm{II}}{\boxed{+r^2\beta}} \sqcap$$

$$\frac{10\underset{\mathrm{III}}{\boxed{4}}r^2e + 12\underset{\mathrm{VIII}}{\boxed{8}}r\beta e\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{-4re^2}} + 3\underset{\mathrm{VII}}{\boxed{4}}\beta^2e - 5\underset{\mathrm{IX}}{\boxed{4}}\beta e^2 + e^3}{4} + a\varepsilon \underbrace{b}_{\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{2r}} + \underset{\mathrm{V}}{\boxed{2}}\beta - e} \underset{\mathrm{VII}}{\boxed{-\frac{\beta^2e}{4}}}.$$

654,14–19 *(1)* | $\begin{array}{l} 1 \\ \cancel{2} \\ \cancel{5}\,7\,6 \\ \cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{0}\,0 \\ \cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{4}\,4 \\ \cancel{1}\,\cancel{8} \end{array}\cancel{)}$ *(a)* 13 *(b)* 12 $\dfrac{78}{184}\Big|\dfrac{39}{92}\Big|\dfrac{4}{9}\Big|\dfrac{1}{2}$ $\begin{array}{r} 96 \\ \underline{8} \\ 78 \end{array}$ *(!) streicht Hrsg.* | *(2)* $\begin{array}{l} 1 \\ \cancel{2}\,0 \\ \cancel{4}\,\cancel{6} \\ \cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{0}\,0 \\ \cancel{1}\,\cancel{8}\,\cancel{4}\,4 \\ \cancel{1}\,\cancel{8} \end{array}\cancel{)}\,12$ | $\dfrac{92}{182}$ *ändert Hrsg.* | $\Big|\dfrac{1}{2}$ *L* 1 *(1)* m $\sqcap$ $\dagger$apβ^2 $\dagger$ rpaβ $\ddagger$ lsβ^2 $\ddagger$ nsa$\beta - 1$ *(2)* Brevius *L* 4 r.s.e.b. *erg. L* 4 solis *(1)* apparer *(2)* aliquam enasci posse | aliquam *gestr.* | impossibilitatem *(a)* quo *(b)* frustraque *L*

Et multiplicatis omnibus per 8. fiet:

$$-2\beta^3 + 11re^2 - 3r\beta^2 - 4r\,a\,\varepsilon - 4\beta r^2 \sqcap 20r^2e + 24r\beta e + 6\beta^2 e$$
$$-10\beta e^2 + 2e^3 + 8a\varepsilon\beta - 8a\varepsilon e$$

$$\frac{4e^2 - 4ae + a^2 + 32\beta.. - 16\beta a}{32a}$$

$$-2\beta^3 + \frac{21}{2}\underset{III}{11}re^2$$

$$-3r\beta^2 - 4ar\varepsilon - 4\beta r^2 \sqcap 20r^2e + 20\underset{IV}{24}r\beta e + 14\underset{V}{6}\beta^2 e$$
$$-17\underset{VI}{\left(-9\underset{II}{\boxed{-10}}\right)}\beta e^2 + \underset{I}{2}e^3$$
$$+8a\beta\varepsilon \qquad -8ae\varepsilon$$

$$\overbrace{\frac{\underset{III}{4e^2} - 4ae + a^2 \;\; \underset{IV}{+32\beta\;..} - 16\beta a}{32a}} \qquad \overbrace{\frac{\underset{II}{4e^2} \; \underset{VII}{-4ae} + a^2 \;\; \underset{V}{+32\beta\;..} - 16a\beta}{32a}} \qquad \overbrace{\frac{\underset{I}{4e^2} - 4ae + a^2 \;\; \underset{VI}{+32\beta\;..} - 12\underset{VII}{16}a\beta}{32a}}$$

Ordinando et multiplicando omnia per 32. fiet:

$$32e^3 - \frac{32,21}{2}re^2 + 32,20r^2e - 32,17\beta e^2 + 32,4\beta r^2 \sqcap 0$$
$$+\ 8,\ 4a\ ..$$

$$\begin{array}{llll}
-\ 16a\ er & +32,13\beta^2\ r & +32,14\beta^2\ e & +32,2\beta^3 \\
+32,28\beta\ .. & +\ 4a^2\ .. & -\ 8a^2\ .. & +\ 8\beta a^2 \\
 & -\ 4,16\beta a\ .. & +8,12a\beta\ .. &
\end{array}$$

2–11 $-2\beta^3$: Leibniz verwendet für ε den fehlerhaften Wert aus N. 44_1 S. 646 Z. 2.

Restat aequatio 8:

$$\frac{\underset{\text{IV}}{\boxed{-\beta^2 4re}}\underset{\text{VI}}{\boxed{+\beta^2 e^2}}\underset{\text{IX}}{\boxed{-\beta^2\beta^2}}-3\underset{\text{II}}{4}\beta^2 a\varepsilon-4\beta^2\beta r \quad \underset{\text{X}}{\boxed{..\ r\beta\ ...}}\underset{\text{V}}{\boxed{..\ r\beta\,..}}\underset{\text{VII}}{\boxed{-r\beta\,..}}\boxed{+\quad 4r\beta\ \ ..}+\underset{\text{VIII}}{\boxed{..r\beta..}}}{\cancel{8}2}$$

$$\left\{\frac{\begin{array}{l}+16r^2e^2-8re^3-24\underset{\text{IV}}{\boxed{+8}}re\beta^2\underset{\text{III}}{\boxed{-32rea\varepsilon}}\underset{\text{X}}{\boxed{+32re\beta r}}\\ +e^4+6\underset{\text{VI}}{\boxed{-2}}e^2\beta^2-8\underset{\text{III}}{\boxed{+8}}e^2a\varepsilon\underset{\text{V}}{\boxed{-8e^2\beta r}}-7\underset{\text{IX}}{\boxed{+}}\beta^4\\ \underset{\text{II}}{\boxed{-8\beta^2a\varepsilon}}\underset{\text{VII}}{\boxed{+8\beta^3 r}},+16a^2\varepsilon^2\boxed{-32a\varepsilon\beta r},+48\underset{\text{VIII}}{16}\beta^2r^2\end{array}}{\cancel{64}\,16}\right. \sqcap$$

$$\llcorner\frac{4r^2a\varepsilon+8r\beta a\varepsilon-2\underset{\text{III}}{4}rea\varepsilon\underset{\text{II}}{\boxed{+4\beta^2a\varepsilon}}-4\beta ea\varepsilon\underset{\text{III}}{\boxed{e^2a\varepsilon}}}{\cancel{4}}\lrcorner\underset{\text{II}}{\boxed{-\beta^2a\varepsilon}}$$

Unde post destructiones ordinando et explicando ε^2:

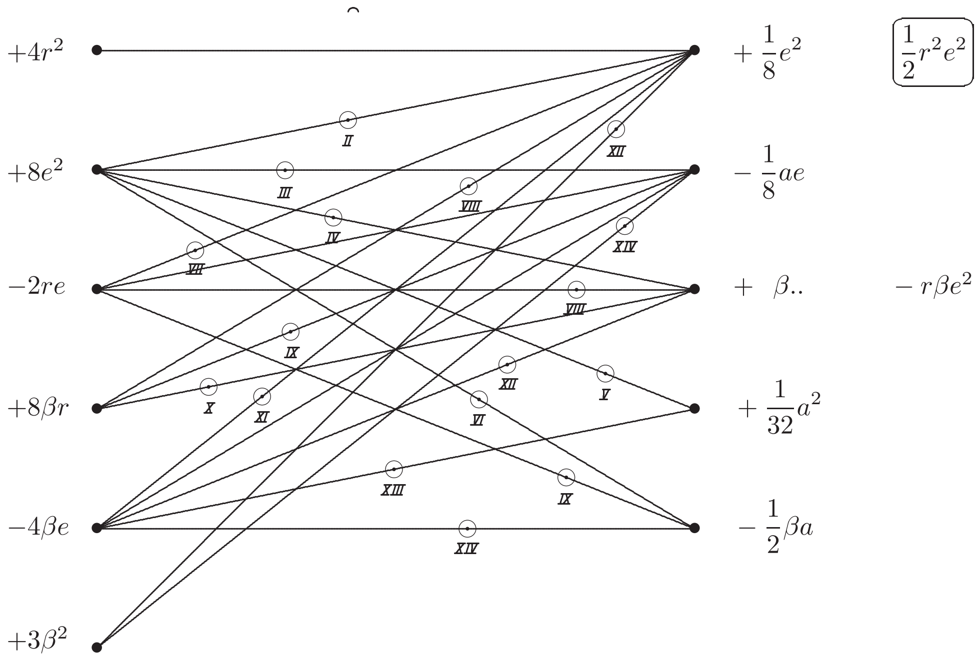
2–7 *Nebenrechnung zum Reduktionsschritt II:*

$$\frac{+32-8-48}{16}\sqcap-\frac{24}{16}\sqcap-\frac{3}{2}$$

1 aequatio *(1)* 8 in *(a)* 64 *(b)* 3 *(!)* ubi *(2)* 8: *L*

$$
\begin{array}{lllll}
\underset{\text{II}}{\boxed{+\quad e^4}} & -\frac{31}{4}\underset{\text{VII}}{\boxed{-8}}r \quad e^3 & +15\frac{1}{2}\boxed{16}r^2 \quad e^2 & -32\underset{\text{X}}{\boxed{-24}}\beta^2 r \quad e & -32\beta^3 r \\
+\frac{1}{4}\ .. & + \quad \underset{\text{III}}{\boxed{-}}\frac{1}{2}a \quad .. & +\frac{77}{8}\underset{\text{XII}}{\boxed{+6}}\beta^2 \quad .. & - \quad \frac{1}{4}a^3 \quad .. & -7\beta^4 \\
 & -\frac{7}{2}\underset{\text{XI}}{\boxed{-\underset{\text{IV}}{\boxed{+}}4}}\beta\ .. & +\frac{18}{4}\underset{\text{V}}{\boxed{+4}}a^2 \quad .. & +3+\frac{1}{8}\boxed{+3}\beta a^2 \quad .. & +\frac{1}{64}a^4 \\
 & & -67\underset{\text{VI}}{\boxed{-64}}\beta a\ .. & -18+\frac{3}{8}\underset{\text{XIV}}{\boxed{-16}}\beta^2 a\ .. & -\frac{1}{2}\beta a^3 \\
 & & +256\beta^2 \quad .. & & +48\beta^2 r^2 \\
 & & \underset{\text{V}}{\boxed{+\frac{3}{4}a^2 \quad ..}} & & +4+\frac{3}{32}\underset{\text{XV}}{\boxed{4}}\beta^2 a^2 \\
 & & \underset{\text{VI}}{\boxed{-7a\beta \quad ..}} & & \\
 & & +16\beta^2 \quad .. & &
\end{array}
$$

⊓



Aequatio haec facta ex 8 data iungatur factae ex 7^{ma} data in quarum utraque r. et e. et alterutra incognita tolletur.

657,8–658,2 *Nebenrechnungen:*

657, 8

$$\begin{array}{rrrrr}
16e^4 & -\ 32a\ e^3 & +\ 8a^2\ e^2 & -\ 8a^3\ e & +\ a^4 \\
& +256\beta\ .. & -128a\beta\ .. & +\ 128\beta a^2\ .. & -\ 32\beta a^3 \\
& & +\ 16a^2\ .. & +\ 64\beta a^2\ .. & +256\beta^2 a^2 \\
& & -256\beta a\ .. & -1024\beta^2 a\ .. & \\
& & +1024\beta^2\ .. & &
\end{array}$$

$$16a^2\varepsilon^2 \sqcap \frac{\qquad\qquad}{\boxed{1024\cancel{a^2} \smile 16\cancel{a^2}}\,64}$$

$$\begin{array}{rcl}
256 & \qquad & \cancel{4}\cancel{6} \\
\underline{\quad 4} & & \cancel{1}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{4} \mid 64 \\
1024 & & \cancel{1}\cancel{6}\cancel{6} \\
& & \cancel{1}
\end{array}$$

658,2

$$\text{etc.} - \ 4 + \frac{3}{8} \sqcap \ 6$$

$$\text{etc.} \sqcap 10 - \frac{3}{8}$$

$$\frac{80-3}{80} \sqcap \frac{77}{8}$$

1 facta *(1)* ex *(a)* 8 *(b)* 7^{ma} | data *streicht Hrsg.* | *(2)* ex *L*

657,8–658,2 explicando ε^2: S. Erl. zu S. 656 Z. 2–11. Leibniz führt die Umformung der Gleichung 8 nicht vollständig und fehlerfrei durch und bricht die Reduktion ab. Im folgenden Teilstück N. 44_3 überzeugt er sich von der Durchführbarkeit der Rechnung.

[*Nebenrechnungen und Zusätze zu S. 654 Z. 1–8*]

144 $\times$	144	48	48	2304	20736	$\cancel{2}$ 2
144	8	16	48	16	16	$\cancel{1}\cancel{0}9\cancel{3}1$
576	1152	288	384	13824	124416	$\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}6 \int 144$
576		48	192	2304	20736	$\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{4}4$
144		768	2304	36864	331776	$\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{0}$
20736				+64		23
				36928		
				−768		
				4		
				2 [*bricht ab*]		

20736	64	62	48	184
256	120	16	4	184
124416	1280	372	192	736
103680	64	62	− 8	1472
41472	7680	992	184	184
5308416		62		33856
−1152		+1612		
16		−7680		33856
6912		− 40		4
1152		−6108		135424
−18432				
+ 16				
− 18416				

$$\frac{4290000}{33856 \frown 4} + \frac{6108}{184} - \frac{1}{2}$$

---

25 $\frac{4290000}{33856 \frown 4}$: Im Zähler müßte 5290000 stehen; der Fehler und weitere Flüchtigkeiten beeinträchtigen die folgenden Rechnungen.

$$\begin{array}{r} \cancel{2} \\ \cancel{5}\cancel{2} \\ \cancel{3}\cancel{7}\cancel{4}9 \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{4}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{0}000 \text{ ⨍ } 23309 \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}4 \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8}8 \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \cancel{1}9\cancel{2}85 \\ \cancel{2}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{6} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}6 \\ \cancel{4}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \text{ ⨍ } 31\ \dfrac{91856}{135424} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{4} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 356 \\ 4\cancel{4}\cancel{6}78 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4} \text{ ⨍ } 1 \\ \cancel{9}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{4}\cancel{4}8 \\ \cancel{1}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{3}0 \\ \cancel{9}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{6} \text{ ⨍ } 21\ \dfrac{380}{4356} \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{6} \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{5}7 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}6 \text{ ⨍ } 11\ \dfrac{176}{380} \\ \cancel{3}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{0} \\ \cancel{3}\cancel{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \cancel{1}\cancel{4}2 \\ \cancel{3}\cancel{8}\cancel{0} \text{ ⨍ } 2\ \dfrac{22}{176} \\ \cancel{1}\cancel{7}\cancel{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \cancel{1}\cancel{7}6 \text{ ⨍ } 8 \\ \cancel{2}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{11} \\ 21 \\ \underline{21\ } \\ 231 \end{array} \qquad 1+\frac{11}{231}\quad \frac{242}{231} \qquad \begin{array}{r} 231 \\ \underline{242} \\ 473 \end{array} \qquad \frac{231}{473}$$

$$31\ \frac{1}{1\boxed{+\dfrac{4356}{91856}}+\dfrac{1}{21+\dfrac{380}{4356}}} \qquad 31\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{21+\dfrac{1}{11+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{8}}}}} \sqcap \frac{4290000}{135424}$$

2 $\cancel{5}\cancel{2}$: Leibniz liest statt der 2 eine 1. 4 $4\cancel{4}\cancel{6}78$: Leibniz vergißt, die 8 als letzte Ziffer des Restes in die folgende Division zu übernehmen. 11 $\cancel{1}\cancel{4}2$: Richtig wäre $\cancel{1}\cancel{4}8$. 20 rechter Ausdruck: Leibniz übernimmt die fehlerhafte Kettenbruchentwicklung mit einem Abschreibefehler in *Wallisii series interpolanda pro circulo*, *LSB* VII, 1 N. 85_1 S. 570.

Unde intelligi potest fractionem istam diminui posse per 8. item per $2+\frac{1}{8}$. item per $11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}$ etc. Eadem et in terminis analyticis serviunt ad fractas formulam datam dividentes inveniendas quorum usus esse potest in construendo.

44_3. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS TERTIA
[3. März 1675 oder unmittelbar danach]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 8. 1 Bl. 4°. Goldschnitt. 1 S. auf Bl. 8 r°. Bl. 8 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 915 B

Ad schediasma 3 martii 1675.

Pertinet ad schediasma de seriei fractionum summa cum formula differentiarum comparatur.

Ope harum 5 aequationum, etiam 5 incognitas $r.\ s.\ e.\ b.\ \varepsilon.$ comprehendentium:

(1) $e+b \sqcap 2r+2\beta$

(2) $a\varepsilon+e\beta-\frac{\beta^2}{4}+\frac{b^2}{4} \sqcap \beta^2+r^2+3\beta r+2sa$

(3) $ab\varepsilon-\beta^2\frac{e}{4}+\frac{b^2e}{4} \sqcap r^2\beta+\beta^2r+3rsa+2\beta sa$

(4) $\frac{-\beta^2a\varepsilon+b^2a\varepsilon}{4} \sqcap s^2a^2+r\beta sa+\beta^2sa$

10 fractionum *erg. L*

1 diminui posse: Leibniz hält die Quotienten des Euklidischen Algorithmus irrtümlich für gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner des Bruches. 12–663,1 Ope harum 5 aequationum: Die Gleichungen (1) – (4) übernimmt Leibniz aus dem Koeffizientenvergleich in N. 44_2 S. 652 Z. 4–12, die Gleichung (5) aus N. 44_1 S. 646 Z. 2.

$$(5)\ \varepsilon \sqcap \frac{4e^2 - 4ae + 32\beta e + a^2 - 16\beta a}{32a}$$

inveniendi sunt valores quatuor incognitarum, $r.s.e.b.$ puri scilicet et absoluti, id est ut in earum valore nulla ex his quinque incognitis supra dictis $r.s.e.b.\varepsilon.$ comprehendatur.

Quaeratur autem b per aequationem 1. Valor eius per dictam aequationem 1. repertus, substituatur in eius locum in aequatione 2^{da}, atque ita per dictam aequationem 2^{dam} ita reformatam, inveniatur valor ipsius s.

Valores reperti ipsius s. pariter et ipsius b. in ipsarum harum literarum locum substituantur in aequatione 3^{tia} et ita ex aequatione 3^{tia} alia fiet aequatio, in qua duae tantum restabunt incognitae, ε, et r. Pro ε substituatur eius valor sumtus ex aequatione quinta, et ita ex dicta aequatione 3^{tia} alia fiet aequatio, in qua duae tantum supererunt incognitae, r. et e.

Eodem modo in aequatione quarta pro b, s, ε substituendo eorum valores inventos ex aequationibus 1. 2. 5. habebitur rursus aequatio duarum tantum incognitarum, r et e. Quas duas aequationes duarum incognitarum invicem iungendo, inde fiet unica unius tantum incognitae, et habebitur vel r. absolute, vel e. absolute. Quos valores absolutos in ipsarum $b.s.$ valoribus substituendo etiam ipsarum $b.s.$ ac proinde omnium quatuor, $b.s.e.r.$ valores sine ulla harum quinque: $b.s.e.r.\varepsilon.$ mentione habebuntur, quod quaerebamus.

2 valores *(1)* 5 li *(2)* quatuor *L* 9 3^{tia} *(1)* et ex aequatione 4^{ta} alia *(a)* fiat *(b)* fiet aequatio *(2)* et *L* 10 valor *(1)* ex aequatione 4^{ta}, ita *(2)* sumtus *L* 17 ipsarum *(1)* b.s.ε valoribus substituendo etiam b.s.ε ac proinde omnium quinque, *(2)* b.s *L*

10 duae tantum: Leibniz vergißt hier die dritte Unbekannte e, argumentiert aber in der Folge korrekt.

45. DE SERIERUM SUMMA PER DIFFERENTIARUM MOMENTA
[Januar – Ende April 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 135. 1 Bl. 2°. Längs- und Querfaltung. 1 Spalte auf Bl. 135 v° rechts, linke Spalte leer bis auf 7 Zeilen Textergänzung. Auf Bl. 135 r° *LSB* VII, 1 N. 77.
Cc 2, Nr. 929

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist vor der Querfaltung des Blattes geschrieben, das ab Ende April 1675 entstandene *Problema Davenantii*, *LSB* VII, 1 N. 77, danach. Das Wasserzeichen des Papiers ist von Januar bis August 1675 belegt.

$\dfrac{1}{y^2-1} \sqcap \dfrac{1}{y+1, y-1}$. Si $y \sqcap$ 2. 6. 10. [14] etc.

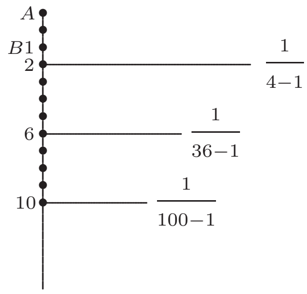
$\dfrac{1}{4-1}\quad \dfrac{1}{36-1}\quad \dfrac{1}{100-1}\quad \dfrac{1}{196-1}$ etc.

Momentum huius seriei ex A est:

$\dfrac{1}{y-1}$ seu $\dfrac{1}{2-1}\quad \dfrac{1}{6-1}\quad \dfrac{1}{10-1}\quad \dfrac{1}{[14]-1}$ etc.

Momentum eiusdem seriei ex B est:

$\dfrac{1}{y+1} \sqcap \dfrac{1}{2+1}\quad \dfrac{1}{6+1}\quad \dfrac{1}{10+1}\quad \dfrac{1}{[14]+1}$ etc.



[*Fig. 1*]

---

11 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{14} \\ 56 \\ \underline{14} \\ 196 \end{array}$$

10–15 16 *L ändert Hrsg. dreimal*

$$\frac{y}{y-1} - \frac{1}{y-1} \sqcap 1. \quad \text{Ergo} \quad \frac{1}{y-1} \sqcap \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^5} \text{ etc.}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^5} \text{ etc.}$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \sqcap \bullet + \frac{2}{y^2} \quad \bullet \quad + \frac{2}{y^4} \quad \bullet \quad \text{etc.} \sqcap \frac{2}{y^2-1}$$

$$\dagger \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{cccc} \frac{c}{a} & y^2 & + & \frac{c}{a}\beta \quad y \\ & & + & d \quad \cdot \\ & & + & \frac{bc}{a} \quad \cdot \end{array}} \; + \frac{c}{a}b\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \boxed{+\, bd} \end{array} \right.$$

$$\ddagger \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{cccc} \frac{c}{a} & y^2 & + & \frac{c}{a}\beta \quad \cdot \\ & & + & \frac{cb}{a} \quad \cdot \\ & & + & d \quad \cdot \end{array}} \; + d\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \boxed{+\, db} \end{array} \right.$$

$$\dagger \frac{y+b}{\frac{c}{a}y+d} \ddagger \frac{y+\beta+b}{\frac{c}{a}y+\frac{c}{a}\beta+d} \sqcap \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\text{Unde } \frac{\frac{c}{a}b\beta\,[-]\,d\beta}{\begin{array}{l}\frac{c^2}{a^2}y^2 + \frac{2cd}{a}y + d^2 \\ +\frac{c^2}{a^2}\beta \cdot + \frac{cd}{a}\beta\end{array}}. \quad \text{Quaeratur ergo: } \frac{1}{\begin{array}{l} y^2 + \frac{2da}{c}y + \frac{d^2a^2}{c^2} \\ +\ \beta \ \cdot + \frac{ad}{c}\beta \end{array}}. \quad \text{Ergo}$$

conferendo cum $\frac{1}{y^2-1}$ fiet: $2da+\beta c \sqcap 0$ sive $d \sqcap \frac{-\beta c}{2a}$ et $d^2 \sqcap \frac{\beta^2c^2}{4a^2}$. Ergo $\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{2} \sqcap 1$ sive $\frac{2\beta^2-\beta^2}{4} \sqcap 1$ sive $\frac{\beta^2}{4} \sqcap 1$. Ergo $\beta \sqcap 2$. Quando ergo differentia ipsarum y est 2 summa omnium $\frac{1}{y^2-1}$ habetur hoc modo.

13 + *L ändert Hrsg.*

Si collationis causa loco $\dfrac{1}{y^2-1}$ fiet: $\dfrac{1}{\begin{array}{c}y^2+2yf+f^2\\ -1\end{array}}$ conferendo fiet: $f \sqcap \dfrac{da}{c}+\dfrac{\beta}{2}$. Ergo f^2 fiet: $\dfrac{d^2a^2}{c^2}+\dfrac{da\beta}{c}+\dfrac{\beta^2}{4}$. Unde fiet rursus $\beta^2 \sqcap 4$ et patet cur explicatio nil mutet quia intervallum determinatum mutari explicando non potest.

$$\frac{y+b}{\frac{c}{a}y+d} \sqcap \frac{x}{a}. \text{ Ergo } ya+ba \sqcap \frac{c}{a}yx+da. \text{ Unde: } y \sqcap \frac{da-ca}{a-\frac{c}{a}x}.$$

$$\dagger\,\frac{a\sqrt{by+ca}+dy+ea}{hy+la}\ \dagger\ \frac{a\sqrt{\begin{array}{c}by+b\beta\\ +ca\end{array}}\ \begin{array}{c}+\,dy+d\beta\\ +ea\end{array}}{\begin{array}{c}hy+h\beta\\ +la\end{array}}.$$

$$ahy\sqrt{by+ca}\ \boxed{+dhy^2}\ \boxed{\begin{array}{ll}+\,eah & y\\ +\,h\beta d & \cdot\\ +\,la\ \cdot & \cdot\end{array}}\ \begin{array}{l}+\,h\beta\ a\ \sqrt{by+ca}\ +e\ a\ h\beta\\ +\,la\quad\cdot\quad\cdot\qquad\qquad \boxed{+\ \cdot\ \cdot\ la}\end{array}$$

$$hay\sqrt{\begin{array}{c}by+b\beta\\ +ca\end{array}}\ \boxed{+dhy^2}\ \boxed{\begin{array}{ll}+\,d\beta h & y\\ +\,ea\ \cdot & \cdot\\ +\,lad & \cdot\end{array}}\ +la^2\sqrt{\begin{array}{c}by+b\beta\\ +ca\end{array}}\ \begin{array}{l}+\,l\,a\,d\,\beta\\ \boxed{+\,l\,a\,e\,a}\end{array}$$

$$\text{Unde}\ \frac{\dagger\left\{\begin{array}{l}ahy\ \sqrt{by+ca}\\ hba\\ la^2\end{array}\right.\ \dagger\left\{\begin{array}{l}hay\\ +\,la^2\end{array}\right.\sqrt{\begin{array}{c}by+b\beta\\ +ca\end{array}}\ \begin{array}{l}\dagger\ eah\beta\\ \dagger\ lad\beta\end{array}}{va^2}\ \sqcap z.$$

1–4 Si … potest *erg.* *L* 6 *(1)* $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} \sqcap$ *(2)* $\dagger\,\dfrac{\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{by}+\mathrm{ca}}+\mathrm{dy}+\mathrm{ea}}{\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{fy}+\mathrm{ga}}+\mathrm{hy}+\mathrm{la}}\ \dagger\ \dfrac{\mathrm{a}\sqrt{\begin{array}{c}\mathrm{by}+\mathrm{b}\beta\\ +\mathrm{ca}\end{array}}\begin{array}{c}+\,\mathrm{dy}+\mathrm{d}\beta\\ +\mathrm{ea}\end{array}}{\mathrm{a}\sqrt{\begin{array}{c}\mathrm{fy}+\mathrm{f}\beta\\ +\mathrm{ag}\end{array}}\begin{array}{c}+\,\mathrm{hy}+\mathrm{h}\beta\\ +\mathrm{la}\end{array}}$. $\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{by}+\mathrm{ca}, \frown \begin{array}{c}\mathrm{fy}+\mathrm{f}\beta\\ +\mathrm{ag}\end{array}} + \mathrm{da}\sqrt{\begin{array}{c}\mathrm{fy}+\mathrm{f}\beta\\ +\mathrm{ag}\end{array}} + \mathrm{ea}\sqrt{\begin{array}{c}\mathrm{fy}+\mathrm{f}\beta\\ +\mathrm{ag}\end{array}}$ *(3)* $\dagger\ \dfrac{\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{by}+\mathrm{ca}}+\mathrm{dy}+\mathrm{ea}}{\mathrm{hy}+\mathrm{la}}$ *L*

5 $+da$: Richtig wäre $+dx$. Konsequent gerechnet müßte in der folgenden Gleichung für y im Zähler $da-ba$ stehen.

Unde quadrandi causa ordinando:

$$\text{ǂ}\left\{\begin{array}{l} la^2 \\ hba \\ ahy \end{array}\right. \sqrt{by+ca} + \omega a^3 - z^2 av \sqcap \text{ǂ}\left\{\begin{array}{l} \quad hay \\ +\, la^2 \end{array}\right. \sqrt{\begin{array}{l} by + b\beta \\ \quad + ca \end{array}} \quad \text{sive}$$

$$\begin{array}{llllll} & l^2a^4 & \frown\, by+ca & \text{ǂ}\; 2la^2 & \frown & \omega a^3 \; \sqrt{by+ca} + \omega^2 a^6\, [-]\, q2\omega a^3 z^2 av + z^4 a^2 v^2 \\ + & 2la^2hba & & \;\;\, 2hba & & -\, z^2av \\ + & 2la^2ahy & & \;\;\, 2ahy & & \\ + & h^2b^2a^2 & & & & \\ + & 2hbaahy & & & & \\ + & a^2h^2y^2 & & & & \end{array}$$

$\sqcap$

$$\begin{array}{lll} & h^2a^2y^2 & \frown\, by + b\beta\ . \\ + & 2hala^2y & \qquad + ca \\ + & l^2a^4 & \end{array}$$

Calculus fit nimis prolixus.

5 + *L ändert Hrsg.*

46. DETERMINATIONUM PROGRESSIO IN INFINITUM
[Anfang November 1675]

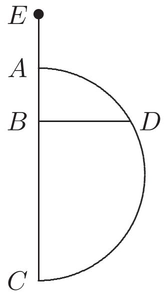
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 305. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S.
Cc 2, Nr. 777

Datierungsgründe: Die in Teil 1 u. 3 auftretenden Differential- und Integralsymbole hat Leibniz schrittweise ab dem 29. Oktober 1675 (*Analyseos tetragonisticae pars* 2^{da}, Cc 2, Nr. 1092, gedr. *LBG* S. 151–156) eingeführt; die Fehlerhaftigkeit der in Teil 3 verwendeteten Produktregel für die Differentiation erkennt er am 11. November 1675 in *Methodi tangentium inversae exempla* (Cc 2, Nr. 1120, gedr. *LBG* S. 161–167).

[*Teil 1*]

$AB \sqcap y.\ \ BC \sqcap c - y.$

$AC \sqcap c.\ \ BD \sqcap \omega \sqcap \dfrac{yc - y^2}{c}.$



[*Fig. 1*]

11 *(1)* AB $\sqcap$ x. CB $\sqcap$ b − y. Pon *(2)* EB $\sqcap$ y. CB $\sqcap$ b − z. EC $\sqcap$ b. *(a)* BD $\sqcap$ *(b)* AB $\sqcap$ e. BD *(3)* AB $\sqcap$ y. *(4)* AB $\sqcap$ y *L*

12–669,4 $BD \sqcap \omega \sqcap \dfrac{yc - y^2}{c}$: Richtig wäre $\omega = \dfrac{yc - y^2}{\omega}$. Die Überlegung wird dadurch bis S. 669 Z. 4, in der Flüchtigkeitsfehler hinzutreten, hinfällig.

$EB \sqcap e$. Sit $y \sqcap e+b$ et erit $\omega \sqcap \frac{ce+cb-e^2-2eb-b^2}{c}$ et pro ω ponatur $v+\frac{cb-b^2}{c}$ fiet $v \sqcap \underset{-2b}{+c}\ e-e^2, \smile c$. Sit eius portionis, quam metimur maxima abscissa E, $\sqcap c-2b$ seu $b \sqcap \frac{c-E}{2}$ et fiet: $v \sqcap Ee-e^2, \smile 2$ adeoque $\int v \sqcap \frac{E^3}{2}-\frac{E^3}{3}$. Sed hoc in altioribus non aeque facile.

[*Teil 2*]

$1-2+3-4+5-6$ etc. accedunt ad $\odot$.

$$\begin{array}{lcl} \text{maior} & & \text{minor} \\ 1\,t & \odot & \overline{1-2}\,t \\ \overline{1-2+3}\,t & & \overline{1-2+3-4}\,t \\ \overline{1-2+3-4+5}\,t & & \overline{1-2+3-4+5-6}\,t \end{array}$$

$y-\frac{y^3}{3a^2}+\frac{y^5}{5a^4}-\frac{y^7}{7a^6}+\frac{y^9}{9a^8}-\frac{y^{11}}{11a^{10}}+\frac{y^{13}}{13a^{12}}-\frac{y^{15}}{15a^{14}}$ etc. $\sqcap \frac{\odot}{a}$.

$\frac{y}{1}$ maior quam $\odot$. Ergo $y \Pi 1\odot$. $\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3a^2} \Pi \odot$. seu $\frac{y}{1} \Pi \frac{y^3}{3a^2}+\odot$. seu $\frac{y^3}{3a^2} \Pi \frac{y}{1}-\odot$.

$\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3a^2}+\frac{y^5}{5a^4} \Pi \odot$. Pro $\frac{y^3}{3a^2}$ ponatur $\frac{\odot^3}{3a^2}$, fiet: $\frac{y}{1}+\frac{y^5}{5a^4} \Pi \odot+\frac{1\odot^3}{3a^2}$.

$\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3a^2}\boxed{+\frac{y^5}{5a^4}}-\frac{y^7}{7a^6} \Pi \odot$. Pro $+\frac{y^5}{5a^4}$ ponatur quod est minus: $+\frac{\odot^5}{5a^4}$, manebit $+\frac{\odot^5}{5a^4}$ minus, et erit $y+\frac{\odot^5}{5a^4} \Pi \odot+\frac{y^3}{3a^2}+\frac{y^7}{7a^6}$.

$\frac{y}{1}\underset{-\frac{\odot^3}{3a^2}}{-\frac{y^3}{3a^2}}+\frac{y^5}{5a^4}\underset{-\frac{\odot^7}{7a^6}}{-\frac{y^7}{7a^6}}+\frac{y^9}{9a^8} \Pi \odot$. seu $\frac{y}{1}+\frac{y^5}{5a^4}+\frac{y^9}{9a^8} \Pi \odot+\frac{1\odot^3}{3a^2}+\frac{\odot^7}{7a^6}$.

Adeoque determinationum progressio in infinitum talis erit:

$$\aleph$$

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{I} & & \boxed{II} \\
 & y & \\
\frac{y}{1} \sqcap \odot & & \frac{y}{1} \sqcap \odot \,\Big|\, + \frac{y^3}{3a^2} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} \sqcap \odot \,\Big|\, + \frac{\odot^3}{3a^2} & & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} \sqcap \frac{\odot}{1} \,\Big|\, + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^9}{9a^8} \sqcap \frac{\odot}{1} \,\Big|\, + \frac{\odot^3}{3a^2} \quad \frac{\odot^7}{7a^6} & & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} + \frac{\odot^9}{9a^8} \sqcap \frac{\odot}{1} \,\Big|\, + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^{11}}{11a^{10}} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^9}{9a^8} + \frac{y^{13}}{13a^{12}} \sqcap \frac{\odot}{1} \,\Big|\, + \frac{\odot^3}{3a^2} + \frac{\odot^7}{7a^6} + \frac{\odot^{11}}{11a^{10}} & & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} + \frac{\odot^9}{9a^8} + \frac{\odot^{13}}{13a^{12}} \sqcap \frac{\odot}{1} \,\Big|\, + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^{11}}{11a^{10}} + \frac{y^{15}}{15a^{14}}
\end{array}$$

Ex quibus determinationibus cum habeatur pure valor ipsius $\odot$ ex data y. rationis est haberi et y. ex data $\odot$.

$y \sqcap \odot$. Per y vel $\odot$ multiplicare dividere est.

Si ita continuetur in infinitum, fient tantum ex duabus ultimis aequationes.

Ponatur autem ex $\dfrac{y^5}{5a^4} + \dfrac{y^9}{9a^8} + \dfrac{y^{13}}{[13a^{12}]}$ etc. fieri $\overline{zy}$.

$$\frac{\odot^5}{5a^4} + \frac{\odot^9}{9a^8} + \frac{\odot^{13}}{[13a^{12}]} \qquad \text{fieri } \overline{z\odot}.$$

et ex $\dfrac{\odot^3}{3a^2} + \dfrac{\odot^7}{7a^6} + \dfrac{\odot^{11}}{11a^{10}}$ etc. faciamus $\overline{v\odot}$.

$$\frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^{11}}{11a^{10}} \qquad \text{faciamus } \overline{vy}.$$

Habebimus denique duas ultimas determinationes tales: $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$ et $y + \overline{z\odot} \sqcap \dfrac{\odot}{1} + \overline{vy}$ vel mutatis his determinationibus in aequationes fiet: $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$. et $y + \overline{z\odot} \sqcap \odot + \overline{vy}$. $y \sqcap \odot + \overline{v\odot} - \overline{zy} \sqcap \overline{vy} - \overline{z\odot}$ et fiet: $\overline{v\odot} + \overline{z\odot} \sqcap \overline{vy} + \overline{zy}$. Unde sequeretur $\odot$ et y esse aequales quod absurdum est utique. Ideo error aliquis admissus, is utique in eo quod mutabamus determinationes in aequationes, quod non videtur permissum sine demonstratione, nec in infinitum progrediendo, hoc loco quia $y \sqcap \odot$; $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$. Ergo explicando $\odot$ et $y + \overline{zy} \sqcap y + \overline{z\odot} - \overline{vy}$. Ergo $\overline{zy} + \overline{vy} \sqcap \overline{z\odot}$ quod patet per se. Nihil ergo ex his duci poterit, nisi aliud quiddam accedat.

Ut pergere liceat, opus erit sumi adhuc aliam ipsius $\odot$ determinationem, quemadmodum enim ad explicandum hac usi sumus $y \sqcap \odot$. ita adhibenda erit et haec: $\dfrac{y^3}{3a^2} \sqcap \odot$. vel adhuc melius si qua $\dfrac{y^2}{\ldots a^2}$. Imo potius $\dfrac{y}{\ldots}$. Certum est tangentes semper magis crescere quam arcus, si ergo appareat octantem certa sui tangentis id est radii parte esse maiorem, utique et caeteri erunt. Est autem octans $\omega \sqcap \dfrac{\pi}{8}$, radius $\sqcap \dfrac{1}{6}\pi$. Ergo $\pi \sqcap 6$ rad.

5 f. $15a^{14}$ *L ändert Hrsg. zweimal* 11 Unde *(1)* reperitur eodem modo componi *(2)* sequeretur *L* 13 f. sine demonstratione *erg. L* 14 quia $y \sqcap \odot$ *erg. L* 15 explicando $\odot$ *erg. L* 19 $\frac{y}{\ldots}$. *(1)* Iam certum est tangentes continuo magis crescere quam arcus, adeoque si tangens octantis *(2)* Ponatur autem arcus in *(3)* Certum *L* 20 appareat *(1)* tangentem octantis certa arcus par *(2)* octantem *L* 21 $\sqcap \frac{1}{6}\pi$. *(1)* Ita $\pi \sqcap 8\omega$: *(2)* Ergo *L*

Ergo $\omega \sqcap \frac{6\,\text{rad.}}{8}$. Ergo $\omega \sqcap \frac{3}{4}$ rad. Ergo arcus octanti minor maior est tribus quartis sui tangentis, seu $\odot \sqcap \frac{3}{4}y$. posito, ut semper y. non excedere radium. Unde et $\odot \sqcap \frac{y}{2}$. et $\odot \sqcap y$. Harum duarum determinationum ope, poterit inveniri y. ex data $\odot$. et $y \sqcap \frac{4\odot}{3}$. Ergo in determinationibus $\boxed{I}$ et $\boxed{II}$ ponendo semper potentiam a $\frac{4}{3}\odot$ in locum potentiae ipsius y. maius scilicet in locum maioris, manebit maioritas, et ita stabit:

$\boxed{I}$

$$\begin{array}{l|l}
y \sqcap \odot & \\
y \sqcap \odot & +\dfrac{\odot^3}{3a^3} - \dfrac{4^5\odot^5}{3^5, 5a^4} \\
y \sqcap \odot & +\dfrac{\odot^3}{3a^3} - \dfrac{4^5\odot^5}{3^5, 5a^4} + \dfrac{\odot^7}{7a^6} - \dfrac{4^9\odot^9}{3^9, 9a^8} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\odot^{11}}{11a^{10}} - \dfrac{4^{13}\odot^{13}}{3^{13}, 13a^{12}} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

$\left[\boxed{II}\right]$

$$\begin{array}{l|l}
y \sqcap \odot & + \dfrac{4^3\odot^3}{3^3, 3a^2} \\
y \sqcap \odot & + \ \ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^5}{5a^4} + \dfrac{4^7\odot^7}{3^7, 7a^6} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^9}{9a^8} + \dfrac{4^{11}\odot^{11}}{3^{11}, 11a^{10}} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^{13}}{13a^{12}} + \dfrac{4^{15}\odot^{15}}{3^{15}, 15a^{14}}
\end{array}$$

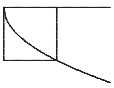
3 data $\odot$. *(1)* Quanti hae sint *(a)* ⟨maxim⟩ *(b)* momenti *(2)* et *L*   12 $\boxed{\text{II}}$ *erg. Hrsg.*

6–16 $\boxed{I}$: In der Vorlage stehen die Tabellen $\boxed{I}$ u. $\boxed{II}$ nebeneinander.

Si utrobique iidem prodiissent termini, tunc habita fuisset aequatio ultimarum determinationum inter se, adeoque singulae in aequationes transiissent.

Poterit fieri, ut propius accedatur ad scopum, etsi non ideo ausim dicere, prorsus attingi, si, ubique ad determinationem sequentem reddendam puram non determinatio pura omnium prima, sed proxime praecedens, substituatur. Video tamen cur ne sic quidem perfecte attingatur scopus: Quando scilicet aliquid, ut $\odot \sqcap \frac{3}{4}y$. forinsecus assumimus. Sed iam video si nihil forinsecus assumatur, sed solae ex aequatione nostra determinationes coniungantur rem successuram. Duobus modis rem tentare decreveram uno, ut ope quatuor primarum per crucem, inveniatur pura, quae in tertia pari substituta det rursus puram. Et ita porro, sed iam video id non licere, quia errores primi omnes simul in ultimum refunduntur. Vera ergo in eo consistit via, utut ex duabus semper pluribusve sibi oppositis aut vicinis valorem purum eliciamus.

[*Teil 3*]



[*Fig. 2*]

$\odot \sqcap \overline{dt} \int \dfrac{a^3}{a^2+t^2}$. Ergo $\overline{d\odot} \sqcap \dfrac{a^2}{a^2+t^2}\,\overline{\overline{ddt}}$ identicum seu $\dfrac{d\odot}{\overline{\overline{ddt}}} \sqcap \dfrac{a^2}{a^2+t^2}$.

et $d\odot a^2, +t^2 d\odot \sqcap a^3$. et $t^2 \sqcap \dfrac{a^3 - \overline{d\odot}a^3}{d\odot}$.

$\int \overline{dt}\odot \sqcap (\overset{\text{ult}}{\odot})(\overset{\text{ult}}{T}) - \int \odot dt$. Ergo $\int \dfrac{\odot^2}{\int \dfrac{a^3}{a^2+t^2}} \sqcap \int \overline{dt\odot} \sqcap (\odot)\text{ult} \frown (T)\text{ult},, - \int \odot\, dt.$

16 *Unter* (T)ult, *gestrichen:* diff

2 singulae *(1)* dedissent aeq *(2)* in *L* 3 dicere, *(1)* non poterit *(2)* prorsus *L* 4 puram *(1)* ⟨prim⟩ *(2)* non omnium prima, sed proxime praecedens, quippe quae haud dubie minus aberrat, substituatur. *(2)* non *L* 9 ope *(1)* duarum *(2)* quatuor *L* 14 *(1)* y $\sqcap$ *(2)* a *(3)* $\odot \sqcap$ *L*

14 Ergo $\overline{d\odot} \sqcap \dfrac{a^2}{a^2+t^2}\,\overline{\overline{ddt}}$: Leibniz differenziert das Produkt zunächst falsch; in der weiteren Überlegung nähert er sich trotz zweier Fehler der richtigen Formel.

Hinc modus ostenditur ex duobus factis inveniendi differentiam, ut diff $\overline{(\odot) \frown (T)}$ addatur $-$ diff $\int \odot dt$ et diff. erit $\overline{dt}\odot$. Ergo diff. $(\odot) \frown (T)$ erit $\overline{dt}\odot - d\int \overline{\odot\overline{dt}}$.

[*Teil 4*]

$A \sqcap B$. $A \Pi C$. Ergo differentia inter A et C, minor quam differentia inter A et B et inter B et C. Ergo error non maior quam $A - C$, quam dicitur $A \sqcap B$.

Videamus an non ex duabus determinationibus oppositis affectis, in tabula $\aleph$ parallelis possit haberi pure valor ipsius y, ex dato valore ipsius $\odot$. Primae duae oppositae parallelaeque determinationes sunt $y \sqcap \odot$ et $y \Pi \odot + \dfrac{y^3}{3a^2}$. Pro $\odot$ ponamus ω. Ex priore quia $y \sqcap \omega$ erit $y^3 \sqcap \omega^3$, et fiet $y \Pi \omega + \dfrac{\omega^3}{3a^2}$. Imo sic non procedit res. Tentemus aliter $y \sqcap \odot$ et y $\Pi \odot + \dfrac{y^3}{3a^2}$. Ergo $y \Pi \odot + \dfrac{y\odot^2}{3a^2}$. Hoc succedit sed malum in eo quod $\odot$ in fractiones valorum ipsius y. ingredietur, quod nollem. Videndum tamen fiet: $y \Pi \dfrac{\odot}{1 - \dfrac{\odot^2}{3a^2}}$. Imo error, non succedit. Invertimus determinationem.

Si a tabulae $\aleph$ partis seu seriei $\boxed{I}$ terminis auferantur termini proxime praecedentes seriei $\boxed{II}$ habebimus pro serie I.

$$\begin{array}{r|l|}
+y \sqcap \odot & +y + \dfrac{y^5}{5} \sqcap +\odot + \dfrac{\odot^3}{3} \\
-0 \quad -0 & -y \qquad\quad -\odot - \dfrac{y^3}{3}
\end{array}$$

. Sed iam video omnino his determinationibus tabulae $\aleph$ non esse utendum, sed rediri debere ad primas:

4 *(1)* $\odot \sqcap$ y. *(2)* A $\sqcap$ B. A Π C. *(a)* | Ergo *streicht Hrsg.* | A + A – C *(b)* Ergo *L* 5 B et C. *(1)* AB $\sqcap$ AC. A – C $\sqcap$ A – B *(2)* Ergo *L* 7 ipsius $\odot$ | , vel ob *erg. u. gestr.* | . Primae *L* 8 f. ponamus ω. *(1)* Sit y $\sqcap$ *(2)* Si *(3)* Ex priore *(a)* $y^3 \sqcap \omega^3$, et y Π $\odot+$ *(b)* quia *L* 11 f. y Π $\dfrac{\odot}{1 - \dfrac{\odot^2}{3a^2}}$. *(1)* ex. duabus sequentibus: *(2)* Imo *L* 13 Si a *(1)* terminis tabulae $\boxed{\text{I}}$ *(2)* tabulae *L* 13 auferantur | ordine *gestr.* | termini *L*

10–12 Ergo $y \Pi \odot + \dfrac{y\odot^2}{3a^2}$: Die Folgerung ist nicht zulässig, wie Leibniz schließlich bemerkt.

$\odot \sqcap \frac{y}{1}$	$\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}$
$\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$	$\odot \sqcap \bullet \quad \bullet + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$
$\odot \sqcap \bullet \quad \bullet \quad \bullet - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9}$	$\odot \sqcap \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11}$

Ubi si pro $\frac{y^3}{3}$ ponatur $\frac{\odot^3}{3}$, nescio an liceat dicere: $\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{\odot^3}{3}$ seu $\frac{y}{1} \sqcap \odot + \frac{\odot^3}{3}$. Sed quamvis id non liceret in his primis licebit tamen in postremo omnium, quia postrema determinationum pro aequatione est. Verum hac ratione prima inveniri aut scribi non poterit nisi praecedentes faciant partem, eademque semper repetantur (: alioqui nunquam primum eius terminum scribere poterimus :) aut nisi etiam inferiores determinationes sint probae. Sed exaltatio per ductum in se ipsum non procedit ad altiores.

$\odot y^2 \sqcap \frac{y^3}{1} - \frac{y^5}{3}$. Ergo $y^5 \sqcap \frac{y^3}{1} - \odot y^2$. Rursus $y^5 \sqcap \odot - \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3}$. Sed non ideo ausim scribere alterum horum altero maius. Si maius dividas per minus, et minus per maius manebit maius, et fiet: $\frac{y^5}{y^{\cancel{3}} - \odot \cancel{y^2}} \sqcap \frac{\odot - y + y^3}{y^{\cancel{5}3}}$ et $y^8 \sqcap \odot\, y^2 - y^3 + y^5, -\odot^2 + y\odot - y^3\odot$.

Si minor multiplicetur per minorem et maior per maiorem, manet determinatio itaque $\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}$ multiplicetur per $y^2 \sqcap \odot^2$, fiet: $y^2\odot \sqcap \frac{\odot^2 y}{1} - \frac{y^3\odot^2}{3}$, vel $y \sqcap \odot - \frac{y^2\odot}{3}$.

10–12 Ergo $y^5 \sqcap \frac{y^3}{1} - \odot y^2$: Leibniz vernachlässigt wiederholt den Nenner von Termen, hinzu kommt ein Rechenfehler, der die letzte Ungleichung des Absatzes beeinträchtigt.

47. INFINITUM

[Anfang November 1675]

Überlieferung:

L Konzept: LH 4 V 10 Bl. 58. Ausschnitt ca 20 x 23 cm ohne linke untere Ecke (ca 11 x 8 cm). 1 S. auf Bl. 58 v°. Bl. 58 r° leer. Wasserzeichen vorhanden. Schema sowie Figuren zuerst auf dem Bl., Text darum herumgeschrieben. Isolierte Bemerkungen am linken u. am unteren Rand. Überschrift ergänzt.

E Teildruck: *LFC* S. 147 f. = S. 677 Z. 1–9.
Cc 2, Nr. 1408

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt. Das zu *Fig. 1* gehörige Problem behandelt Leibniz ausführlich in *Methodi tangentium inversae exempla*, datiert 11. November 1675 (Cc 2, Nr. 1120, gedr. *LBG* S. 161–167).

I n f i n i t u m

$$\begin{array}{cccc}
\left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \\
\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{3}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{4}\right\rangle & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \text{etc.} & \\
\text{etc.} & & & \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \left[\frac{1}{16}\right] \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
3 & 27 & \frac{1}{4} \\
6 & 216 & \frac{1}{9} \\
10 & 1000 & \frac{1}{16}
\end{array}$$

14 f. *Textverlust durch Zerschneiden erg. Hrsg.* 18 $_{16}$ *L ändert Hrsg.*

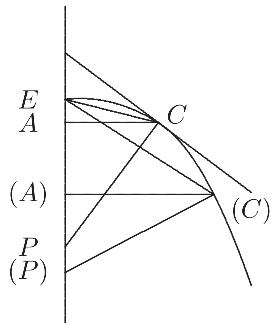
13–677,9 I n f i n i t u m : Fast wörtlich erscheint diese Argumentation wieder in einem Brief an Erhard Weigel vom September 1679 (*LSB* II, 1 N. 212 S. 486 u. III, 2 N. 345 S. 838 f.).

$\frac{1}{0}$ est quantitas infinita, hinc credibile est summam seriei huius: 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ etc. esse infinitam.

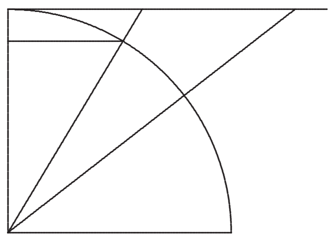
At summa seriei $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. est etiam $\frac{1}{0}$ sive infinita. Ergo sequeretur quia $\frac{1}{0}$ ipsi $\frac{1}{0}$ aequale fore $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ etc. $\sqcap$ $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$ etc. quod est absurdum.

Videtur enim $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. ipso $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. infinities esse maius. Dicendum ergo $\frac{1}{0}$ et $\frac{1}{0}$ non aequivalere seu 0 non posse esse quantitatem minimam, sed esse infinite parvam, ut una 0 sit alia maior. Et hic videtur hoc modo oblatum nobis exemplum quo infinitum unum alio infinities maius est. Et videtur summa omnium fractionum, summae omnium unitatum et inter finitam quantitatem quodammodo media esse.

[*Figuren außerhalb des Haupttextes*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\frac{AC}{(A)(C)} \sqcap \frac{(A)(P)}{AP}$$

1 f. esse *(1)* finitam *(2)* infinitam *(3)* infinitam *L* 4 absurdum. *(1)* Dicendum ergo *(2)* Videtur *L*

12 $\frac{AC}{(A)(C)} \sqcap \frac{(A)(P)}{AP}$: Die Bedingung läuft darauf hinaus, daß das Produkt aus Ordinate und Subnormale konstant ist, und wird durch die kubischen Parabeln erfüllt.

[*Isolierte Bemerkungen*]

[*Am unteren Rand:*]

$a^y \sqcap y^a$ $\qquad$ $y^z \sqcap zy, \quad 2^2 \sqcap 2,2$

[*Am linken Rand, gegenläufig:*]

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{17} \\ 161 \\ \underline{23} \\ 391 \end{array}$$

48. AEQUATIONES INFINITAE PRO FIGURIS ETIAM ORDINARIIS [November 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 117. 1 Zettel 19,2 x 7 cm. 1 S. auf Bl. 117 r°. Bl. 117 v° leer. An oberer und unterer Schnittkante Reste fremden Textes. Cc 2, Nr. 1206

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1675 belegt. Das Stück ist vor dem auf Juni 1676 datierten N. 62 geschrieben, das in S. 786 Z. 3 auf N. 48 verweist und auf S. 793 Z. 15 f. die Reihenentwicklung von Z. 10 übernimmt.

A e q u a t i o n e s i n f i n i t a e p r o f i g u r i s e t i a m o r d i n a r i i s, sit $a+x \frown a-x \sqcap y^2$, sive $\dfrac{y^2}{a+x} \sqcap a-x$. fiet: $a-x \sqcap \dfrac{y^2}{a} - \dfrac{y^2x}{a^2} + \dfrac{y^2x^2}{a^3}$ etc. Res apparet difficilior si sit $x^2y+x^3 \sqcap y^2a$, fiet $x^2 \sqcap \dfrac{y^2a}{x+y}$ fiet: $x^2 \sqcap \dfrac{y^2a}{x} - \dfrac{y^3a}{x^2} + \dfrac{y^4a}{x^3} - \dfrac{y^5a}{x^4}$ etc. Sed quoniam praeterea etiam: $x^3 \sqcap y^2a - x^2y$ sive $\dfrac{x^3}{ya-x^2}$ fiet: $\odot$

$\odot$ $x^3 \sqcap \dfrac{x^3}{ya} + \dfrac{x^5}{y^2a^2} + \dfrac{x^7}{y^3a^3}$ etc. Unde duos valores ipsius x^2 aequando: Fiet

$\dfrac{y^2a}{x} - \dfrac{y^3a}{x^2} + \dfrac{y^4a}{x^3}$ etc. $\sqcap \dfrac{x^2}{ya} + \dfrac{x^5}{y^2a^2} + \dfrac{x^7}{y^3a^3}$ etc.

Quod si omnes fractiones reducere vellemus ad communem denominatorem foret exponens potentiae cuiusque termini infinitus, certo quodam demto. Et tamen eiusmodi aequationis infinitae dari poterit summa, seu expressio finita. Si sint aequationes in quibus plures excitari possunt analogiae, plures etiam in unam addi poterunt formulae. Et

15 f. foret *(1)* potentia cuiusque infinita *(2)* exponens *L* 16 eiusmodi *(1)* seri *(2)* aequationis *L* 18 formulae *(1)*; quia et ex duabus *(2)*. Et *L*

12 sive $\dfrac{x^3}{ya-x^2}$: Leibniz berechnet den Wert für y und setzt ihn irrtümlich gleich x^3. Der Fehler beeinträchtigt die Überlegung bis Z. 14, wo konsequent gerechnet in den Zählern der letzten beiden Terme der rechten Seite x^4 und x^6 stehen müßten.

ita enumerando possibiles poterimus iudicare de summis eiusmodi serierum si quando occurrant.

---

1 *Fragment fremden Textes unter* summis: $x - 1 \frown$

49. PROGRESSIO HARMONICA
[Oktober – Dezember 1675]

Die Gesprächsaufzeichnung N. 49_1 und die Aufzeichnung von Tschirnhaus N. 49_2 stehen in engem Zusammenhang: Die Betrachtungen der Teile 1 u. 2 von N. 49_1 werden in Teil 1 u. 2 von N. 49_2 weitergeführt. Die Wasserzeichen der beiden Teilstücke sind in den Leibniz-Handschriften bisher nur mit einem einzigen weiteren Träger belegt: Die Aufzeichnung von Tschirnhaus N. 49_2 ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie Leibniz' *Regle pour trouver les feries* (Cc 2, Nr. 1502 A, B), in der aus gegebenen Kalenderdaten die zugehörigen Wochentage berechnet werden. Leibniz behandelt darin den 1. Januar 1676 und den 15. August 1676 als Daten der Zukunft, den 1. Mai 1615 (geändert aus 1. Mai 1675) als Datum der Vergangenheit. Da Tschirnhaus sich seit Ende September 1675 in Paris aufhielt, dürften die beiden Teilstücke in der Zeit von Oktober bis Dezember 1675 enstanden sein.

49_1. NOTAE

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 256. 1 Bl. 2°. Obere Hälfte links Ausriß von max. 3 x 7,5 cm. Ca 1 1/2 S. Untere Hälfte von Bl. 256 r° leer. Textfolge Bl. 256 r° oberes Viertel, Bl. 256 v° rechte Hälfte des unteren Drittels, Bl. 256 r° zweites Viertel, Bl. 256 v° linke Hälfte des unteren Drittels, Bl. 256 v° obere zwei Drittel.
Cc 2, Nr. 1340

[*Teil 1*]

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \frac{1}{y} & & & \\ & & \frac{2}{y} & & \frac{1}{y} & & \\ & \frac{3}{y} & & \frac{3}{2y} & & \frac{1}{y} & \\ \frac{4}{y} & & \frac{6}{3y} & & \frac{4}{3y} & & \frac{1}{y} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline y \sqcap 1 \\ y \sqcap 2 \\ y \sqcap 3 \\ y \sqcap 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Productum inferiorum $\frac{5}{y} + \frac{10}{3y} \sqcap \frac{15+10 \sqcap 25}{1,3y} \sqcap \frac{4}{y} + \frac{6}{3y} + \frac{4}{3y} + \frac{1}{y}$

[*Tschirnhaus*]					[*Leibniz*]
1		2		3	$1, 2, 3 \sqcap 6$. Num. term. 3. multipl. per 1,2,1 aequ. 6.
$\underline{1}$		$\underline{1}$		$\underline{2}$	
1		2		6	
1	3	3	1	| 9	$1.2.3.4 \sqcap 24 \sqcap 1, 3, 3, 1,, 4$
				$\underline{4}$	
				36	

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}$$

24	24	$\top\!\!\top$	50	$\top\!\!\top$	36	25
12		4				$\underline{3}$
8	6				9	[75]
$\underline{6}$		3				
$\frac{50}{24}$	2				3	$\frac{[75]}{36}$
	1					

[*Auf der Rückseite:*]

[*Zu Z. 9–14 , Spalte 5 gehörig:*] $\frac{6+8+12+24}{24}$

$$\frac{1}{1}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{11}{6}\quad\frac{50}{24}$$

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}$$

1				
1	1			
1	3	2		
1	6	11	6	
1	10	35	50	24

$1 + 6 + 11 + 6 \backsim 24$
$\underline{4 \quad 3 \quad 2 \quad 1}$
$4 + 18 + 22 + 6 \backsim 50$

$1 + 6 + 11$
$\underline{6 \quad 3 \quad 1}$
$6 + 18 + 11 \backsim 35$

$1 + 6$
$\underline{4 \quad 1}$
$4 + 6 \backsim 10$

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a & \sqcap & 1 \\ ab & \sqcap & 1 + a \\ abc & \sqcap & 1 + a + ab \\ & & \quad\;\; + b \\ abcd & \sqcap & 1 + a + ab + abc \\ & & \quad\;\; + b + ac \\ & & \quad\;\; + c + bc \end{array}$$

[*Tschirnhaus*]

$$bc \wp \quad \begin{array}{r} 1 + a \\ \underline{\qquad b} \\ b + ab \\ 2b \end{array} \qquad bcd \qquad b \wp \quad \begin{array}{l} 1 + a \\ \underline{cd \qquad\;} \\ cd + acd \\ 2cd \end{array}$$

[*Auf der Rückseite:*]

$$\frac{1}{1} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{3} \;\; \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{5}$$

abc

$abcd$

$$\frac{1}{1} \;\; \frac{1}{1+a} \;\; \frac{1}{1+b}$$

$$\begin{array}{c} \dfrac{2+a}{1+a} \;\; \dfrac{1}{1+b} \\ \hline 3 + 2a + ab \\ + 2b \\ \hline 1 + \;\; a + ab \\ + \;\; b \end{array}$$

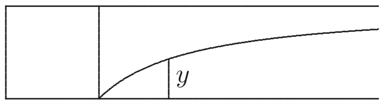
682,5 $\sqcap$ 24 $\sqcap$ *(1)* $\begin{array}{c} 1+3+3+1 \\ \hfill 4 \\ \hline\hline 4 \;\; 12 \;\; 12 \;\; 4 \end{array}$ *(2)* 1, 3, 3, 1,, 4 *L* 682,11+13 65 *T ändert Hrsg. zweimal*

11 f. bc $\wp$ *(1)* $\begin{array}{c} \mathrm{b+a} \\ \mathrm{b} \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{c} \mathrm{1+a} \\ \mathrm{b} \end{array}$ *T*

11–14 *bc* $\wp$: Tschirnhaus setzt auf der rechten Seite zunächst den Faktor c richtig gleich $b + a$, ändert dann jedoch in $1 + a = b$, ohne den zweiten Faktor in $1 + b = c$ zu ändern, und berechnet so b^2 anstatt bc.

[*Teil 3*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

$$y \sqcap \frac{x-1}{x} \qquad y \sqcap \frac{\frac{x}{2}-1}{x}$$

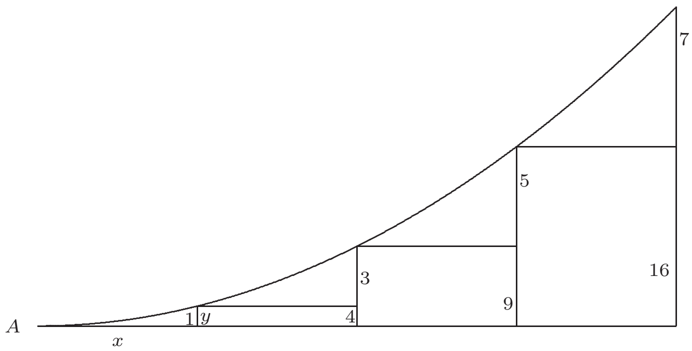
$$xy \sqcap x-1 \qquad y \sqcap \frac{x-2}{2x} \qquad \frac{4}{12}$$

$$2xy \sqcap x-2$$

$$x \sqcap \frac{1}{0} \qquad \frac{y}{0} \sqcap \frac{1}{0}-1 \qquad \frac{2y}{0} \sqcap \frac{1}{0}-2$$

$$y \sqcap 1-\emptyset \qquad 2y \sqcap 1-\emptyset$$

$$y \sqcap \frac{1}{2}$$



$$x\,x \sqcap a\,y \qquad \frac{xx}{a} \sqcap y$$

1 3 5 7
1 2 3 4

[*Fig. 2*]

[*Tschirnhaus*]

1 2 4 8 16

[*Leibniz*]

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$$

12 *Fig. 2*: Zwei Vorstufen der Figur werden nicht wiedergegeben.

[*Tschirnhaus*]	[*Leibniz*]
$\begin{array}{ccc} 4 & \frac{5}{2} & \\ \hline \frac{4}{1} & \frac{5}{2} & \frac{6}{3} \end{array}$	natur. $\underbrace{\underbrace{y\,,\frac{y+1}{2}}\,,y+2}_{\text{natur.}}$ [*bricht ab*]

49_2. PROGRESSIO HARMONICA

Überlieferung: *T* Aufzeichnung (Tschirnhaus für Leibniz): LH 35 XII 1 Bl. 255. 1 Bl. 2°. Rechts unregelmäßige Rißkante. Ca 1 1/3 S. Untere zwei Drittel von Bl. 255 v° leer bis auf vier Zeilen quer zur Schreibrichtung. Auf Bl. 255 r° über und unter S. 687 Z. 5–10 Nebenrechnungen zu nicht aufgefundenem Schema. — Überschrift von Leibniz ergänzt.
Cc 2, Nr. 1181

P r o g r e s s i o   h a r m o n i c a

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & & & \\[2ex]
 & & & & \overset{b}{\frac{2}{y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & & \\[2ex]
 & & & \overset{c}{\frac{3}{y}} & & \overset{g}{\frac{3}{b2y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & \\[2ex]
 & & \overset{d}{\frac{4}{y}} & & \overset{h}{\frac{6y}{c3y}} & & \overset{l}{\frac{4}{g3y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & \\[2ex]
 & \overset{e}{\frac{5}{y}} & & \overset{i}{\frac{10}{d4y}} & & \overset{m}{\frac{10}{h6y}} & & \overset{o}{\frac{5}{l4y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & \\[2ex]
\overset{f}{\frac{6}{y}} & & \overset{k}{\frac{15}{e5y}} & & \overset{n}{\frac{20}{i10y}} & & \overset{p}{\frac{15}{m10y}} & & \overset{q}{\frac{6}{o5y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}}
\end{array}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{a}{y}\;\Big|\;\frac{b}{y}+\frac{a}{y}\propto\frac{a+b}{y}\;\Big|\;\frac{c}{y}+\frac{g}{by}+\frac{a}{y}\propto\frac{a+c}{y}+\frac{g}{by}\propto\frac{ab+bc+g}{by}\;\Big|\;\frac{d}{y}+\frac{h}{cy}+\frac{l}{gy}+\frac{a}{y}\propto \\
\frac{a+d}{y}+\frac{h}{cy}+\frac{l}{gy}\propto\frac{a+d}{y}+\frac{gh+cl}{cgy}\propto\frac{cga+cgd+gh+ch}{cgy}\;\Big|\;\frac{e}{y}+\frac{i}{dy}+\frac{m}{hy}+\frac{o}{ly}+ \\
\frac{a}{y}\propto\frac{a+e}{y}+\frac{i}{dy}+\frac{o}{ly}+\frac{m}{hy}\propto\frac{a+e}{y}+\frac{li+do}{dly}+\frac{m}{hy}\propto\frac{a+e}{y}+\frac{hli+hdo+dlm}{hdly}\propto \\
\frac{hdla+hdle+hli+hdo+dlm}{hdly}\;\Big|\;\frac{f}{y}+\frac{k}{ey}+\frac{n}{iy}+\frac{p}{my}+\frac{q}{oy}+\frac{a}{y}\propto \\
\frac{aeimo+efimo+kimo+nemo+peio+eimq}{eimoy}
\end{gathered}
$$

14 $\frac{cga+cgd+gh+ch}{cgy}$: Der letzte Term im Zähler müßte $+cl$ lauten; Tschirnhaus übernimmt den fehlerhaften Wert in die vierte Spalte des Schemas S. 687 Z. 1–3.

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{1} \;\Big|\; \frac{b+bc+g}{by} \;\Big|\; \frac{cg+cgd+gh+ch}{cgy} \;\Big|\; \frac{hdl+hdle+hli+hdo+dlm}{hdly} \;\Big|\; \frac{eimo+efimo+kimo+nemo+peio+eimq}{eimoy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{cc+ccd+2ch}{cgy} \;\Big|\; \frac{hdd+hdde+2hdi+ddi}{hdly} \;\Big|\; \frac{eeii+eefii+kiie+neii+keei+eiik}{eimoy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{c+cd+2h}{cy} \;\Big|\; \frac{dh+hde+2hi+di}{hdy} \;\Big|\; \frac{ei+eif+ki+ni+ke+ik}{eiy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{a+2b+ab+bb}{by}$$

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{3c+cd+d}{cy} \;\Big|\; \frac{2dec+4cd+2kc+2ec+dd}{2cdy} \;\Big|\; \begin{array}{l} \cancel{ed}+\cancel{2ec}+fed+2fec+fd+ \\ 2cf+\cancel{kd}+\cancel{2cl}+\cancel{2ke}+ee+ \\ \cancel{ed}+\cancel{2ec}+\cancel{de}+dd+\cancel{2cd}+\cancel{2ce}+ \\ \cancel{2cd}+4cc+2de+4ec \\ \hline 5ed+10ec+4cd+fed+2fec+ \\ fd+2cf+ee+dd+4cc \end{array}$$

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{3c+dc+d}{cy} \;\Big|\; \begin{array}{l} 2cde+\cancel{2cd}+\cancel{2cd}+4cc+ \\ 2ce+dd+\cancel{2cd} \end{array}$$

$$\frac{2cde+6cd+2ce+dd+4cc}{2cdy}$$

5 *(1)* $\frac{\mathrm{2dec+2cd+2kc+2ec+dd}}{\mathrm{2cdy}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{2dec+4cd+2kc+2ec+dd}}{\mathrm{2cdy}}$ *T* 9 *(1)* 3ed + 6ec *(2)* 5ed + 10ec *T*

1–13 Neben dem fehlerhaften Wert $+ch$ in der vierten Spalte von Z. 1–3 beeinträchtigt eine Reihe von Versehen die Rechnungen. Trotz Kontrollbetrachtungen und Neuansätzen gelingt es Tschirnhaus nicht, die Unstimmigkeiten zu beseitigen.

687,5 *Darunter und darüber Nebenrechnungen zu nicht gefundenem Schema:*

$i \sqcap 2c \quad o \sqcap 2k \quad r \sqcap 2p$

$i \sqcap 2c \quad k \sqcap d+2c \quad l \sqcap e+d+2c \quad o \sqcap 2k \quad m \sqcap f+e+d+2c$

$p \sqcap e+d+2c+2k \quad n \sqcap g+f+e+d+2c \quad q \sqcap f+2e+2d+2c+2k$

$r \sqcap 2e+2d+4c+4k$

Auf der Rückseite, quer zur Schreibrichtung:

$$\begin{array}{cccccc} y & y & by & cy & 2cdy & 2d+2ce \text{ in } y \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e+d+2c \\ \underline{2d+4c} \\ 2de+2dd+8dc+4ce+8cc \\ 2def+2ddf+8dcf+4cef+8ccf \text{ in } y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e+3d+6c \\ \underline{f+e+d+2c} \\ ef+3fd+18cd+ee+4de+8ce+3dd+12cc \\ efg+3fdg+18cdg+eeg+4deg+8ceg+3ddg+12ccg \end{array}$$

1 *Schema*: Grundlage der Gleichungen und der Nebenrechnungen ist ein achtzeiliges Dreiecksschema, entsprechend dem auf S. 686, mit den Werten $a=1, \ldots h=8, i=6, k=10, l=15, m=21, n=28, o=20, p=35, q=56, r=70$. 13 $+18cd$: Richtig wäre $+12cd+6cf$; der Fehler wird in die folgende Zeile übernommen.

[*Teil 2*]

$$\frac{1}{a}\quad\frac{1}{b}\quad\frac{1}{c}\quad\frac{1}{d}\qquad\frac{a+b}{ab}\quad\frac{1}{c}\;\Big|\;\frac{ac+bc+ab}{abc}\quad\frac{1}{d}\;\Big|\;\frac{acd+bcd+abd+abc}{abcd}$$

687,13 *Kontrollbetrachtungen und Nebenrechnungen:*

1. Ansatz:

$$\frac{e}{y}+\frac{3}{y}+\frac{e}{cy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\frac{y}{y}+\frac{3}{y}+\frac{y}{cy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\frac{5}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{4}{}$$ [*bricht ab*]

$$\begin{array}{cccc} c & d & e & y \sqcap 5 \\ 3 & 4 & 5 & \\ & & \underline{12} & \\ & & 60 & \\ & & \underline{2} & \\ & & 120 & \\ & & 72 & \\ & & 30 & \\ & & 16 & \\ & & \underline{36} & \\ & & \frac{274}{120} & \end{array}$$

2. Ansatz:

$$\frac{e}{y}+\frac{3}{y}+\frac{e}{dy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\cancel{\frac{1}{1}}+\frac{3}{5}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}$$

$$\cancel{\frac{1}{1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}\sqcap\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$$\underline{15}$$

$$\frac{17}{15}+\frac{3}{10}\sqcap\frac{5}{6}+\frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{l} 170 \\ \underline{45} \\ \dfrac{215}{\cancel{150}}\sqcap\dfrac{31}{\cancel{30}}\;\cancel{3}\;\;55 \\ 5 \end{array}$$ [*bricht ab*]

$$
\begin{array}{rl}
& \begin{array}{l} 4 + 3a + 2ab + abc \\ \quad + 3b + 2ac \\ \quad \underline{+ 3c + 2bc \qquad\quad} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 + 2a + ab + abcd \\ \quad + 2b + ac \\ \quad + 2c + bc \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 + a + 2abcd - abc \\ \quad + b \\ \quad + c \end{array} \\
abcd \frown & \begin{array}{l} 1 + a + ab + abc \\ \quad + b + ac \\ \quad + c + bc \end{array} \qquad\quad\; \begin{array}{l} 1 + a + ab\ [+abc] \\ \quad + b + ac \\ \quad + c + bc \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l} 2abcd + \cancel{1} + c - \cancel{ab} \\ \qquad\quad 1 + a \end{array} \qquad \frac{a + c + 2abcd}{abcd}
$$

1–8 *Nebenbetrachtungen:*

$$
\begin{array}{l} 4 + 3a + 2ab + abc \\ \quad + 3b + 2ac \\ \quad + 3c + 2bc \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4 + 3a + 2ab + abc \\ \quad + 3b + 2ac \\ \quad + 3c + 2bc \end{array}
$$

$$
\begin{array}{l} 1 + a + ab + abc \\ \quad + b + ac \\ \quad \underline{+ c + bc \qquad\quad} \\ 2 + a + [\textit{bricht ab}] \\ \quad + b \\ \quad + c \end{array}
$$

4 + abc *erg. Hrsg.* 10–12 *(1)* $\begin{array}{l} 3+2a+ab+abcd \\ +2b+ac \\ +2c+bc \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{l} 4+3a+2ab+abc \\ +3b+2ac \\ +3c+2bc \end{array}$ *T*

1–8 Tschirnhaus berechnet (wie in N. 49_1 Teil 2 skizziert) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$ für $a = 1$, $b = 1 + a$, $c = 1 + b$, $d = 1 + c$ und formt den Zähler des Bruches sukzessive um. Im letzten Schritt müßte a mit negativem Vorzeichen in den Zähler des resultierenden Bruches übernommen werden.

50. TANGENTIUM APPLICATIO AD NUMERORUM SERIES
Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 7 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S. Rechter Rand (Außenseite des ursprünglichen Bogens) um ca 1 cm beschnitten. Erste Überschrift und Hervorhebungen Z. 8–11 (durch doppeltes Unterstreichen) mit anderer Tinte ergänzt.
Cc 2, Nr. 1186

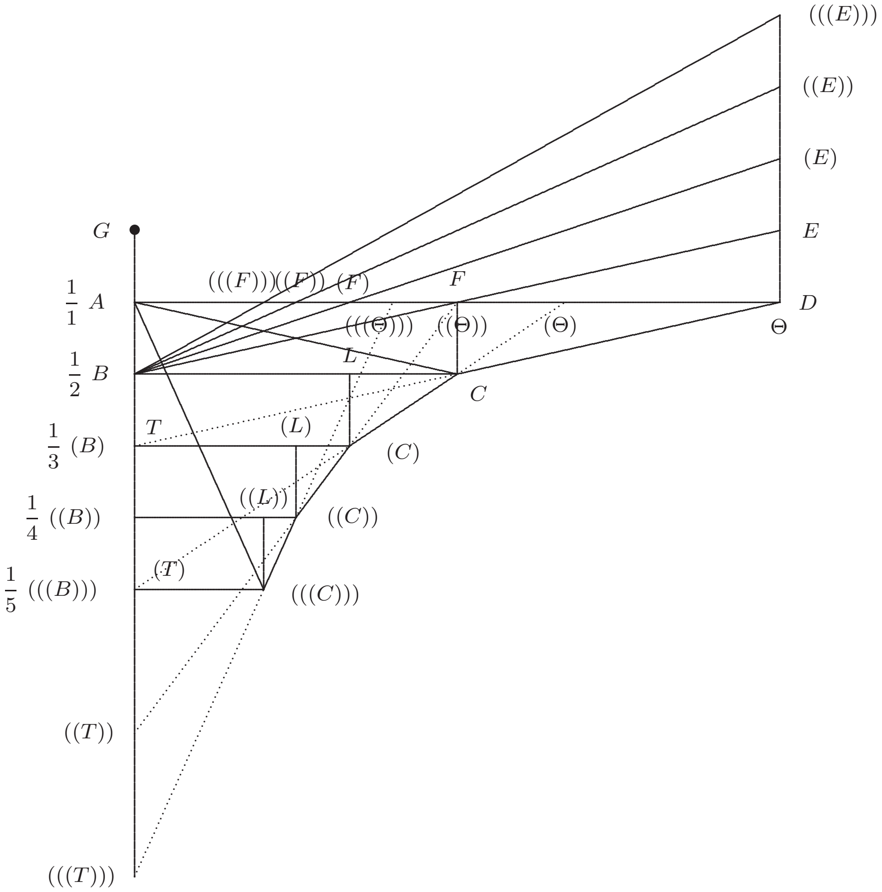
Xb. 1675.

Tangentium applicatio ad numerorum series ut in quadraturis

Progressiones numerorum geometrice tractandae

Quaeritur figura seu polygonum regulatum, progressionis harmonicae. Intervalla terminorum sint aequalia $AB \sqcap B(B)$ etc. $\sqcap \beta$. Ipsa unitas sit AD. Reliqui termini BC, $(B)(C)$, $((B))((C))$ erunt $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. etc. Ex D erigatur in contrarias ipsis B, partes recta DE, in qua sumantur DE, $D(E)$, $D((E))$, $D(((E)))$ ipsis AB, $A(B)$, $A((B))$ etc. aequales. Iungantur BE, $B(E)$, $B((E))$ quae secabunt ipsam AD in punctis F, (F), $((F))$ etc. Erunt AF. $A(F)$. $A((F))$ etc. $\sqcap \frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ etc. adeoque ipsae BC, $(B)(C)$ etc. tantum ipsis sumendae sunt aequales.

Ex cuiuslibet ordinatae termino, ut (C) in ordinatam proxime maiorem BC, demittatur perpendicularis $CL \sqcap (B)B \sqcap AB$ constanti. Erunt ipsae LC, vel $(L)(C)$ etc. differentiae $\sqcap \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{20}$ etc. Sit $GB \sqcap y$. Erit $BC \sqcap \frac{1}{y}$ et $LC \sqcap \frac{1}{y} - \frac{1}{y+\beta} \sqcap \frac{\beta}{y^2+\beta y}$. Ducantur tangentes figurae, seu producantur latera polygoni huius dum, utrique axi scil. AB, et ei coniugato, occurrant in (Θ) et (T).



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

691,22–693,1 et (T). *(1)* Erit *(a)* $^{\text{(F)(T)}}$ *(b)* $\frac{\text{(B)(T)}}{\text{(B)(C)}} \sqcap$ *(aa)* $\frac{\text{L(C)}}{\text{LC}}$ *(bb)* $\frac{\text{LC}}{\text{L(C)}}$ *(cc)* $\frac{\text{L(C)}}{\text{LC}}$ sive (B)(T) $\sqcap$ *(aaa)* $\frac{1}{\text{y}+\beta} \frown \text{y}^2+\beta$ *(bbb)* $\dfrac{\frac{\beta}{\text{y}^2+\beta\text{y}}}{}$ *(2)* Ergo (B)(T) $\sqcap \dfrac{\beta\frac{1}{\text{y}+\beta}}{\frac{\beta}{\text{y}^2+\beta\text{y}}} \sqcap \dfrac{1}{\frac{1}{\text{y}}} \sqcap$ y. Ergo erit (B)(T) $\sqcap$ *(3)* $\dfrac{\text{BT}}{\text{BC} \sqcap \frac{1}{2\beta}} \sqcap$ *(a)* $\left\langle\frac{\beta}{\beta}\right\rangle$. et BC $\sqcap$ BT *(b)* $|\dfrac{\beta}{\frac{\beta}{2}}$. *ändert Hrsg.* | et *L*

$\dfrac{BT}{BC \sqcap \dfrac{1}{2\beta}} \sqcap \dfrac{\beta}{\dfrac{\beta}{2[\beta^2]}}$ et $BT \sqcap \beta$. Eodem modo: $\dfrac{(B)(T)}{(B)(C) \sqcap \dfrac{1}{3[\beta]}} \sqcap \dfrac{\beta}{\dfrac{\beta}{6 \sqcap 2, 3[\beta^2]}}$ et $(B)(T) \sqcap 2\beta$ et generaliter $\dfrac{(BT)}{(BC) \sqcap \dfrac{1}{y+\beta}} \sqcap \dfrac{L(C) \sqcap \beta}{LC \sqcap \dfrac{\beta}{y^2+\beta y}}$. Ergo $(BT) \sqcap y \sqcap GB \sqcap A(B)$. Eodem modo $((B))((T)) \sqcap A((B))$ et ita in caeteris.

Quaeritur iam $A\Theta$. intervallum scilicet inter tangentes et punctum A, in axe coniugato. Sed statim patet fore $A\Theta \sqcap 2BC$ quia $AT \sqcap 2BT$.

Iungantur $AC. A(((C)))$. Erit summa omnium $A(\Theta),^\frown$ in β dupla spatii $AC(C)$ etc. $(((C)))A$, at eadem dupla omnibus BC. Ergo spatium $AC(C)$ etc. $(((C)))A$ spatio $BC \ldots (((C)))(((B)))[B]$ aequale quod aliunde patet, quia et $A(((B)))(((C))) \sqcap ABC$ perpetuo. Ideo in figura harmonica nihil hinc duci potest. At, videamus an non in aliis hac methodo quae in geometricis mihi utilis fuit, aliquid detegi queat:

[*Es folgt die Fig. 2 auf S. 694.*]

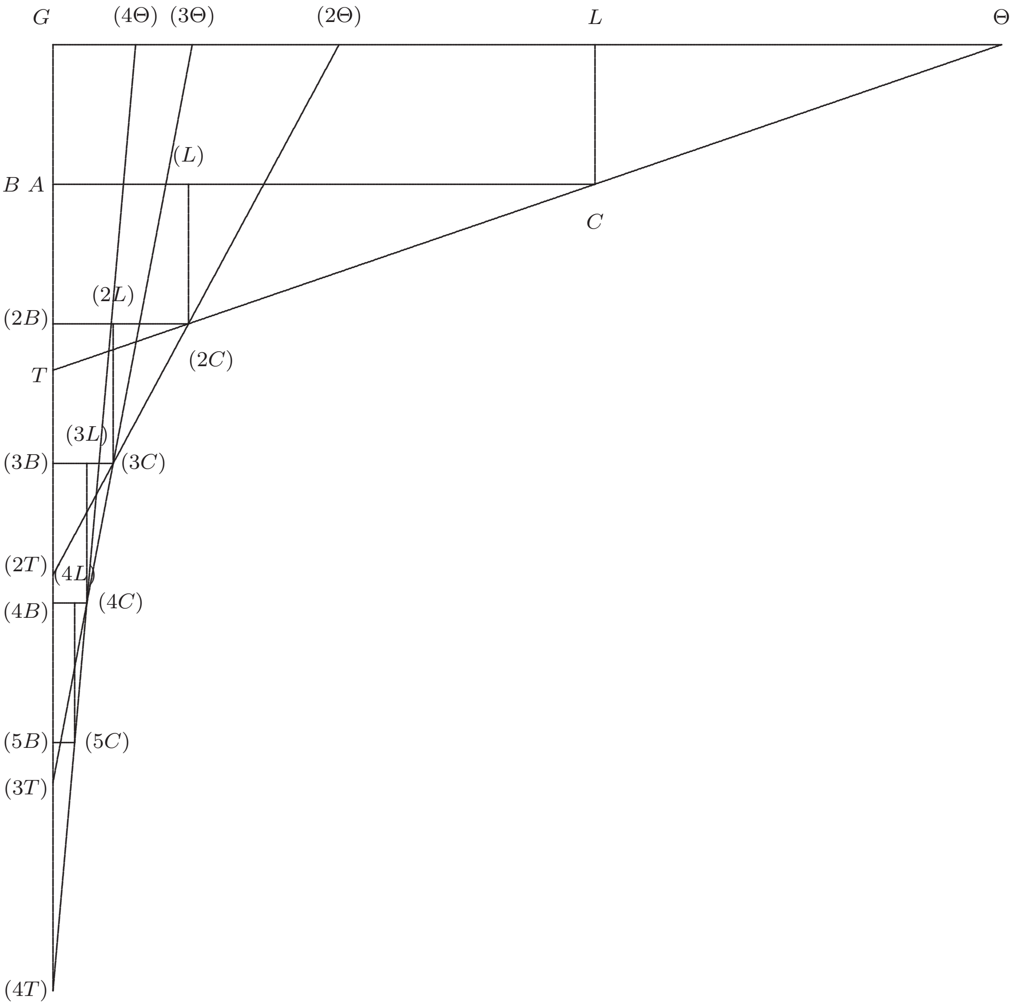
Sit $AC \sqcap 1$. $GB \sqcap GA \sqcap \beta \sqcap (yB)(\overline{y+1}B)$. $GB \sqcap y$. $BC \sqcap \dfrac{1}{y^2}$.

$\displaystyle\int \frac{\beta}{y^2} \sqcap \int \square (yB)(\overline{y+1}B)(\overline{y+1}C)(yC)$.

$LC \sqcap \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+2y\beta+\beta^2} \sqcap \dfrac{2y\beta+\beta^2}{y^4+2y^3\beta+y^2\beta^2} \sqcap \overset{\odot}{\dfrac{2\beta}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}} + \boxed{2}\,\overset{☽}{\dfrac{\beta}{y+\beta}}$. Habetur autem $\displaystyle\int LC$. Ergo ad habendum $\displaystyle\int \overline{\boxed{2}\,\frac{\beta}{y+\beta}}$ tantum opus haberi $\displaystyle\int \frac{1}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}$. Si omnes in infinitum quaerantur $\displaystyle\int \overline{LC}$ erit summa eorum $\sqcap 1$. Si finitus numerus fiet

1 β *erg. Hrsg.* 1 β^2 *erg. Hrsg.* 2 $\sqcap \dfrac{\mathrm{L(C)} \sqcap \beta}{\mathrm{LC} \sqcap \dfrac{\beta}{\mathrm{y}^2+\beta\mathrm{y}}}$ *(1)* $\sqcap \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{y}}}$ *(a)* $\sqcap$ *(b)* Ergo *(2)* Ergo *L*
6 dupla *(1)* omn *(2)* spatii *L* 7 dupla *(1)* spatii B *(2)* omnibus *L*

14 f. Im Nenner von ☽ fehlt der Faktor y; der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis S. 695 Z. 3.



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 2*: Der mit (L) bezeichnete Punkt entspricht dem Punkt L im Text; der Punkt L der Figur tritt im Text nicht auf.

$1-\frac{1}{y^2}$. Ergo $\int\overline{\odot+\rightmoon}\sqcap 1-\frac{1}{y^2}$. $\int\frac{\odot y\beta}{2}\sqcap\int\rightmoon$. $\int\frac{\beta\odot\frown y+\beta}{2}\sqcap\int\frac{\beta^2}{y\frown y+\beta}\sqcap\beta-\frac{\beta}{y}$. Iam $-\int\frac{\beta\odot y}{2}+\int\frac{\beta\odot}{2}\frown y+\beta\sqcap\int\frac{\beta^2\odot}{2}$. Ergo $\int\frac{\beta^2\odot}{2}\sqcap\beta-\frac{\beta}{y}-\int\rightmoon$. At $\int\rightmoon\sqcap 1-\frac{1}{y^2}-\int\odot$. Ergo $\int\frac{\beta^2\odot}{2}\sqcap\beta-\frac{\beta}{y}-1+\frac{1}{y^2}+\int\odot$. Qui calculus si rectus habebitur $\int\odot$. adeoque et $\int\rightmoon$. quae quaerebatur. Eademque methodus ad caeteras potentias poterit applicari et ni fallor alibi probavi ex data $\int\frac{1}{y^2}$. dari summam finitam $\frac{1}{y}$.

Altera methodus, quae geometrica est, et latitudinem sive spatium considerat, erit quaeremus BT. nempe $\frac{BT}{BC}\sqcap\cfrac{\beta}{\cfrac{2y\beta+\beta^2}{\boxed{2}, y\frown y+\beta}}$ at $BC\sqcap\frac{1}{y^2}$. Ergo $BT\sqcap\frac{\beta y^2+2\beta^2y+\beta^3}{2y\beta+\beta^2}\sqcap$ $\beta+\frac{\beta y^2}{2y\cancel{\beta}+\beta^{\cancel{2}}}$ cui si addatur $AB\sqcap y-\beta$ fiet $AT\sqcap\frac{3y^2+\beta y}{2y+\beta}$. Eritque $\frac{A\Theta}{BC}\sqcap\frac{AT}{BT}\sqcap$ $\frac{3y^2+\beta y}{y^2+2\beta y+\beta^2}$ ponendo Θ esse in AC et fiet $A\Theta\sqcap\frac{3y+\beta}{y^3+2\beta y^2+\beta^2y}\sqcap\frac{3}{y^2+2\beta y+\beta^2}+$ $\frac{\beta}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}$. Quorum summa si habeatur, poterit iterum haberi area spatii. Et notabile quod ad eandem reditur hic figuram, $\frac{1}{y\odot,\ \boxed{2}\, y+\beta}$, ita ut hae duae methodi aut singulae, aut iunctae rem conficere videantur. Nec dubium eadem et in caeterarum potentiarum reciprocis datur.

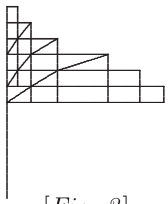
$1\sqcap 1-\frac{1}{\mathrm{y}^2}$. *(1)* $\int\frac{\odot\mathrm{y}}{2}\sqcap\int\rightmoon$. $\int\frac{\odot\frown\mathrm{y}+\beta}{2}\sqcap\int\frac{\beta}{\mathrm{y}\frown\mathrm{y}+\beta}\sqcap 1-\frac{1}{\mathrm{y}}$. Iam $-\int\frac{\odot\mathrm{y}}{2}+\int\frac{\odot}{2}\frown\mathrm{y}+\beta\sqcap$ $\int\frac{\beta\odot}{2}$. Ergo $\int\frac{\beta\odot}{2}\sqcap 1-\int\rightmoon-\frac{1}{\mathrm{y}}$. At $\int\rightmoon\sqcap 1-\frac{1}{\mathrm{y}^2}-\int\odot$. Ergo $\int\frac{\beta\odot}{2}\sqcap(1-1)+\frac{1}{\mathrm{y}^2}+\int\odot-\frac{1}{\mathrm{y}}$ *(2)* $\int\frac{\odot\mathrm{y}\beta}{2}\sqcap\int\rightmoon$ *L*

5 alibi: Leibniz erinnert sich vermutlich ungenau an ein Ergebnis aus der *Analysis tetragonistica ex centrobarycis*, dat. 25./26. Okt. 1675 (Cc 2, Nr. 1089/1090; *LBG* S. 151): „Omn. $\frac{a}{x}\sqcap$ ult. $\overline{x\ \text{omn.}\ \frac{a}{x^2}}-\overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x^2}}$“.

Pulcherrima est haec tangentium applicatio ad numerorum series. Vel ideo quod ita seriei numericae alia aequivalens exhibetur, quod alias difficile, quia numeri non tractabiles ut figurae quoniam differentiae non negligendae.

Hac methodo etiam poterunt investigari triangulorum centra gravitatis, et eorum distantiae duci in triangulum, et productae seriei summa habebitur, si momenta aliunde habentur, vel contra. Haec geometriae et arithmeticae communia.

Caeterum est aliquid arithmeticae peculiare, ut scilicet figurae propositae exhibeatur aequivalens; elementis seu differentiis alia quadam ratione distributis, ut



[*Fig. 3*]

quid prohibet aliam componi seriem ex elementis seu differentiis, alia plane ratione in lineam rectam compositis, ut scilicet lineas duxi. Putem haec ad geometriam quoque applicari posse. Quemadmodum poterit ad geometriam quoque applicari illa mira ratiocinatio, qua summae inveniuntur in se ipsas replicatae; ope tangentium. Quemadmodum etiam ope eiusmodi diversae descriptionis arithmeticae ad geometriam translatae poterunt forte aliquando exhiberi figurae transcendentes, seu quarum descriptio non est in potestate, aequales illis quae describi possunt v. g. figurae ananalyticae habebuntur, si non possit dari summa differentiarum secundum lineas quas vides iunctarum, ad faciendas per earum summationem novas ordinatas.

15 aliquando *(1)* mutari figurae hac *(2)* exhiberi figurae *(a)* mechanicae a *(b)* transcendentis *(c)* transcendentes *L* 16 figurae *(1)* non *(2)* ageometricae *(3)* analy *(4)* ananalyticae *L*

12 f. illa mira ratiocinatio: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, S. 19–24 [Marg.].

51. DE INVENTIONE THEOREMATUM ELEGANTIUM
[November 1675 – Februar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 119. Ca. 2/3 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 119 r°. Bl. 119 v° leer. Linker Rand (im Falz des ursprünglichen Bogens) leicht bogenförmig. An der oberen, schrägen Schnittkante Buchstabenreste fremden Textes.
Cc 2, Nr. 1341

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt.

I n v e n t i o t h e o r e m a t u m e l e g a n t i u m e t d e m o n s t r a t i o n u m e x c a l c u l o c o n c i n n a n d a r u m in eo consistit, ut unam formulam in varias formulas aequipollentes mutemus eas inprimis, quarum iam nota natura et proprietates.

Ut si proponam tibi terminos continuabiles in infinitum nempe:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} a & & & b & & \\ (a) & \sqcap & \sqrt{ab} & (b) & \sqcap & \dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} \\ ((a)) & \sqcap & \sqrt{(a)(b)} & ((b)) & \sqcap & \dfrac{2(b)\sqrt{(a)(b)}}{(b)+\sqrt{(a)(b)}} \\ \text{etc.} & & & \text{etc.} & & \end{array}$$

Utique erit elegantior enuntiatio si dicas, esse (a) medium geometricum inter a. b. et (b) medium harmonicum inter b. et (a).

12 terminos *(1)* : *(2)* continuabiles *L* 17 esse (a) *(1)* progressionis *(2)* medium *(a)* arith *(b)* geometricum *L*

9 f. d e m o n s t r a t i o n u m e x c a l c u l o c o n c i n n a n d a r u m : vgl. Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II S. 341 bis 420. 12 terminos: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, prop. XI S. 25–28; ders., *Excercitationes geometricae*, 1668 S. 2 f. [Marg.]; in seinem Handexemplar, *Niedersächs. Landsbibl.* Ms IV, 377, hat Leibniz auf S. 2 die Reihenfolge der Berechnung der zweiten Terme der Doppelfolge aus den vorhergehenden durch Verbindungsstriche angedeutet.

Quod patebit si pro $\sqrt{ab}$ in valore ipsius (b) substituas id cuius valor est $\sqrt{ab}$ nempe (a) et fiet $(b) \sqcap \dfrac{2b(a)}{b+(a)}$. et erunt $\quad b \quad (b) \quad (a) \quad$ progressionis harmonicae, quod sic patet $\quad b \quad \dfrac{2b(a)}{b+(a)} \quad (a)$.

Est autem $\dfrac{2b(a)}{b+(a)}$ formula medii harmonici duplum scilicet rectanguli per summam divisi. Hae scilicet formulae simplices notandae et in catalogos referendae, et nominibus designandae sunt, ut scilicet cum earum ope elegantiora obtineamus theoremata, et utendo theorematis formularum eiusmodi notarum iam demonstratis, faciliores obtineamus demonstrationes. Imo et constructiones, dum iam pulchra problemata plerumque circa formulas eiusmodi notas et celebratas habentur. Porro ut in nostro exemplo obiter dicam cum communis mensura non mutet progressionis dividendo tres terminos per ba, fiet:

$$\frac{1}{a} \qquad \frac{2}{b+a} \qquad \frac{1}{b} \qquad \text{vel} \qquad \frac{1}{2a} \qquad \frac{1}{a+b} \qquad \frac{1}{2b}.$$

Quorum trium terminorum novissimorum nominatores sunt progressionis arithmeticae, nempe:

$$\frac{1}{2a} \qquad \frac{1}{2a,+\overline{-a+b}} \qquad \frac{1}{2a,+2\overline{-a+b}}.$$

Ita si omnia multiplicemus per $b+a$ fiet ex tribus scilicet terminis initio, quorum medius fractio, fiet inquam:

$$b^2+ab \qquad 2ab \qquad ba+a^2$$

sive $\quad b+a,b \qquad 2ab \qquad b+a,a.$

Si a primo auferas medium fiet b^2-ab. Si a secundo tertium fiet: $ab-a^2$, id est fiet illic $b \frown b-a$, hic a $[\frown]$ $b-a$, quae sunt ut b. ad a, cum ipse terminus primus sit etiam ad tertium ut b. ad a.

---

13 f. *Unter* arithmeticae: Progressio harmonica arithmeticae est reciproca.

6 cum *(1)* | offeruntur *streicht Hrsg.* | earum ope *(2)* earum ope *(a)* pulcheriora obt *(b)* elegantiora *L* 6 f. et *(1)* ob lemma *(2)* utendo *L* 21 a; b − a *L ändert Hrsg.*

Hinc porro sequitur si addantur duo numeri integri progressionis harmonicae uno interiecto distantes, esse aut quadratos aut quadratorum multiplos. Nam $b^2+ab+ab+a^2$, seu $b^2+2ab+a^2$ quadratus. Quadrati sunt cum progressio primitiva est.

Et differentiae eorum sunt differentiae duorum quadratorum. Hinc solutio cuiusdam problematis, perelegans. Quaeritur series numerorum, in quibus id contingat, in infinitum, ut sint quadrati simul vel multipli; et generaliter loquendo multipli quadratorum; summae; et differentiae vel multipli differentiarum quadratorum sint differentiae, terminorum uno intervallo dissitorum. Hae sunt quaestiones longe difficiliores quam simplices.

1 f. uno ... distantes *erg.* *L* 5 perelegans. *(1)* Sit quaerenda vero num *(2)* Quaeritur *L*
6 quadratorum *(1)* et |sint *streicht Hrsg.*| *(2)* summae *L*

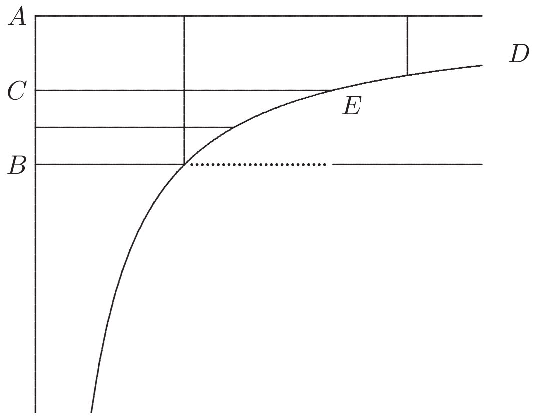
52. PRO SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE
[November 1675 – Februar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 254. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 254 r°. Bl. 254 v°. leer. Cc 2, Nr. 1185

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt.

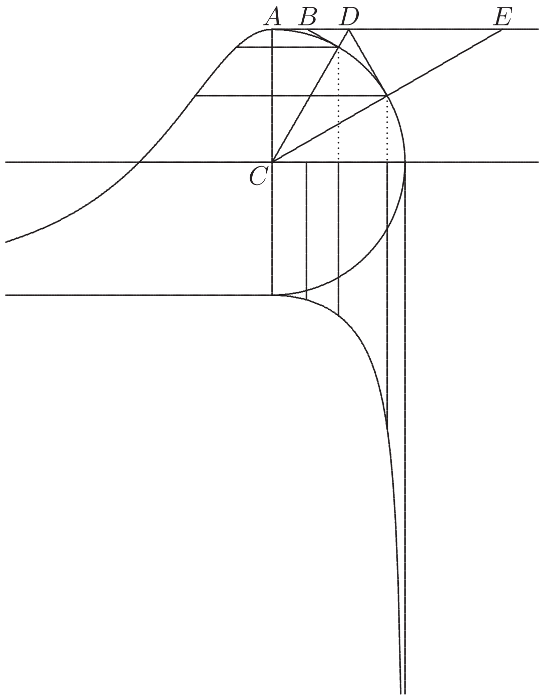
[*Teil 1*]

P r o s u m m a p r o g r e s s i o n i s h a r m o n i c a e



[*Fig. 1*]

8 P r o *erg. L*



[*Fig. 2*]

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\left[\frac{1}{1}\right]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	etc.
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$		

3 $\frac{1}{1}$ *gestr. L, erg. Hrsg.*

1 *Fig. 2*: vgl. die Darstellungen der figura segmentorum und der figura angulorum in *LQK* S. 42 u. 46.

$$\frac{a}{a[-ay]} \sqcap 1 + y + y^2 + y^3$$

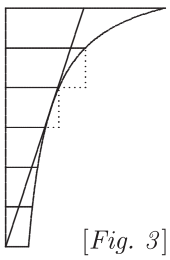
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \sqcap \frac{2}{1} \sqcap 1 + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \sqcap \frac{3}{3-1} \sqcap \frac{3}{2} \sqcap 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{625} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \sqcap \frac{5}{5-1} \sqcap \frac{5}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$$

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{216}$	
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{1296}$	
etc.	etc.				

In arithmeticis progressionibus non potest alia commode fieri aequatio referens ad alium axem.



[*Fig. 3*]

$$\frac{a}{y} - \frac{a}{y+\beta} \sqcap \frac{\boxed{ay} + a\beta \boxed{-ay}}{y^2+\beta y} \sqcap \frac{a\beta}{y^2+\beta y}$$ cuius momentum est: $\int \overline{\frac{a\beta}{y+\beta}} \sqcap \int \beta$ [*bricht ab*]

1 + y *L ändert Hrsg.*

[*Teil 2*]

Sit numerus quantuscunque, quaeritur an multiplicari possit per alium, ut productum fiat minus quam summa omnium productorum possibilium ex omnibus numeris minoribus.

$$\begin{array}{llll} y^3 + b\,y^2 & + bc\,y & + bcd \\ \quad\;\; c & + bd & \\ \quad\;\; d & + cd & \end{array}$$

Videndum an differentia inter productum continuorum, et summa productorum omnium numerorum minorum superare possit quemlibet numerum datum.

Producti continuorum logarithmus habetur addendo logarithmos omnium numerorum inferiorum.

[*Isolierte Gleichung*]

$y^z * * *$ etc. $e \sqcap \dfrac{s}{y}$

5–7 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{l} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c \\ a\,b\,d \\ a\,c\,d \\ b\,c\,d \end{array}$$

2 quantuscunque, *(1)* multiplicetur per *(2)* quaeritur *L*

10 f. Producti . . . inferiorum: vgl. N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 34. In Leibniz' Handexemplar ist der Absatz unter der entsprechenden Aussage mit Bleistift angestrichen.

53. DE TRIANGULO HARMONICO

Die folgenden drei Stücke stehen in einem engen inneren und zum Teil auch äußeren Zusammenhang: N. 53_3 ist als erstes entstanden, vermutlich kurz vor dem auf Dezember 1675 datierten Stück N. 53_1, in dem es erwähnt wird.

Bei der Abfassung von N. 53_2, datiert Februar 1676, hat Leibniz auf N. 53_3 verwiesen sowie umgekehrt einen Hinweis auf N. 53_2 in N. 53_3 ergänzt. Anschließend hat er dieses Blättchen in N. 53_2 wie in einen Brief eingefaltet und den so entstandenen Umschlag mit einer beide Stücke betreffenden Aufschrift (= S. 708 Z. 7–10) versehen.

53_1. DE PROGRESSIONE HARMONICA
Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 250. 1 Bl. ca. 18,5 x 16 cm. Obere und untere Schnittkante unregelmäßig. 1 S. auf Bl. 250 r°. Datum und Überschrift über dem Schema S. 706 Z. 2–19 ergänzt. — Auf Bl. 250 v° teilweise zerschnittene numerische Divisionen mit verschiedenen Rechenproben. Druck in einem späteren Band der Reihe.
Cc 2, Nr. 1180 tlw.

Decemb. 1675

P r o g r e s s i o   h a r m o n i c a

1					1				
	1					2			
2		1			3		4		
	2		1			6		8	
4		2		1	9		12		16
	4		2			18		24	
8		4			27		36		
	8					54			
16					81				

Progressio geometrica proxime inferior est series differentiarum transversalium progressionis geometricae propositae. Nec tantum differentiarum transversalium primarum seu primarum, sed et secundarum etc.

Series differentiarum rectarum progressionis geometricae est eiusdem progressionis geometricae. Si ope differentiarum transversalium inveniri possunt summae, sequitur hoc applicari posse ad geometricas; nam si seriei differentiarum transversalis primae quaeratur rursus series differentialis prima, et huius rursus, venietur tandem ad primam quae est unitatum; ubi differentiae sunt 0. seu exhaurientur. Sed si progressio non sit per numeros, non venietur unquam ad unitates:

704,17 *Unter* P r o g r e s s i o h a r m o n i c a : Adde schedam exiguam de inveniendis theorematis.

706,5–15 *Nebenrechnungen zum Schema*:

5 $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \sqcap \frac{12-6}{6,12} \sqcap \frac{1}{12}$

7 $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} \sqcap \frac{20-12}{12,20} \sqcap \frac{8}{12,20} \sqcap \frac{2}{3,20} \sqcap \frac{1}{30}$

10 $105 \sqcap 5,21$ $\frac{105-60}{60,105} \sqcap \frac{45 \sqcap 5,9}{\cancel{3},2,\cancel{5},\cancel{3},7,10} \sqcap \frac{1}{140}$

11 $\frac{12}{30,42} \sqcap \frac{1}{7,15} \sqcap \frac{1}{105}$

13 $\frac{14}{42,56} \sqcap \frac{1}{6,28} \sqcap \frac{1}{168}$ $\begin{array}{r} 21 \\ 8 \\ \hline 168 \end{array}$

15 $\begin{array}{r} 72- \\ 56 \\ \hline 16 \end{array}$ $\frac{16}{56,72} \sqcap \frac{\cancel{2},\cancel{8}}{7,\cancel{8},\cancel{2},36} \sqcap$ $36,7 \sqcap 252$ $\begin{array}{r} 28 \\ 9 \\ \hline 252 \end{array}$

6 si *(1)* diff *(2)* seriei |differentiarum *erg.*| transversalis *L* 10 Adde *(1)* schediasmata *(2)* schedam *L*

---

10 schedam exiguam: N. 53_3.

$\frac{1}{1}$									
	$\frac{1}{2}$								
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$							
	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$						
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{5}$					
	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{7}$			
	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{8}$		
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{56}$		$\frac{1}{9}$	
	$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{140}$		$\frac{1}{168}$		$\frac{1}{72}$		$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{105}$				$\frac{1}{252}$		$\frac{1}{90}$	
	$\frac{1}{42}$						$\frac{1}{360}$		
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{168}$							
	$\frac{1}{56}$								
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{252}$							
	$\frac{1}{72}$								
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{360}$							
	$\frac{1}{90}$								
$\frac{1}{10}$									

Series secunda habet denominatores ex ductu duorum primorum proximorum, series tertia, ex ductu terminorum seriei primae, in terminos numero antecedentes seriei secundae sed per primum divisos, ut

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{3} & , & \frac{1}{2} & \smile & \frac{1}{2} & \sqcap & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{6} & \smile & \frac{1}{2} & \sqcap & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5} & , & \frac{1}{12} & \smile & \frac{1}{2} & \sqcap & \frac{1}{30}. \end{array}$$

Si quaelibet series differentiarum descendens per primum terminum suum dividatur, fient reciproci numerorum combinatoriorum.

1 ex *(1)* facto *(2)* ductu *L* 2 ex *(1)* facto terminorum seriei *(2)* ductu *(a)* termini se *(b)* terminorum *L* 2 in *(1)* terminum *(2)* terminos *(a)* respondentes *(b)* ⟨in⟩ *(c)* numero *L* 7 differentiarum descendens *erg. L*

53_2. TRIANGULUM HARMONICUM ET TRIANGULUM PASCALII
Februar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 27 Bl. 2. 1 Bl. 4°. Goldschnitt. Brieffaltung. 1 S. auf Bl. 2 r°. Datum auf Bl. 2 r° oben ergänzt. Überschrift auf Bl. 2 v° Mitte. 10 Z. Cc 2, Nr. 1337

Feb. 1676.

Triangulum harmonicum respondens triangulo arithmetico Pascalii, quo ostenditur quomodo numerorum figuratorum reciproci seu fracti, possint addi in summam. Patet et quomodo saepe ex simplicibus divinemus composita.

Ingeniosissimus Pascalius tractatum scripsit de triangulo arithmetico: de summis, et summis summarum, et summis ex summis summarum, etc. numerorum progressionis arithmeticae.

Ego singulari quadam ratione incidi in triangulum harmonicum; de differentiis et differentiis differentiarum, et differentiis ex differentiis differentiarum, etc. numerorum progressionis harmonicae.

Cumque numeri progressionis harmonicae sint reciproci, sive fracti numerorum progressionis arithmeticae, factum est miro naturae consilio, ut etiam reliquae totius trianguli harmonici series (tantum certo modo multiplicatae) serierum respondentium trianguli arithmetici reciprocae essent, atque iidem sint numeri trianguli arithmetici et harmonici, eo tantum discrimine quod termini trianguli arithmetici sint integri, id est fracti habentes figuratum, (id est trigonalem, pyramidalem, trigonotrigonalem, etc.) pro numeratore, et unitatem pro nominatore; contra termini trianguli harmonici habeant unitatem pro numeratore, numerum figuratum pro nominatore.

Reliqua ex tabulae inspectione patent, quae deducere demonstrationibus non est operae pretium. Hodie enim quivis characteristicae analyseos cultor facile deprehendit et demonstrat, qualia multis ratiociniis Pascalius ostendit.

17 progressionis *(1)* arithmeticae *(2)* harmonicae *L* 18 ut | reciproci *gestr.* | etiam *L* 26 f. et demonstrat *erg. L*

8 Pascalii: *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.] (*PO* III, S. 433–593).

T r i a n g. a r i t h m e t.
P a s c a l i i

servit ad inveniendas summas integrorum finitorum figuratorum, et quadraturas parabolarum rationalium, omnium graduum, quae sunt figurae carentes asymptotis.

T r i a n g. h a r m o n.
m e u m

servit ad inveniendas summas fractorum figuratorum, finitorum et infinitorum summam finitam habentium et quadraturas hyperbolarum rationalium, omnium graduum, quae spatia habent finitae magnitudinis, at ob asymptotos, infinitae longitudinis.

708,24 *Nach* nominatore *Tabelle gestr. L*:

1	1	1	1	$\frac{1}{1}$
5	4	3	2	$\frac{1}{2}$
15	10	6	3	$\frac{1}{3}$
35	20	10	4	$\frac{1}{4}$
70	35	15	5	$\frac{1}{5}$
126	56	21	6	$\frac{1}{6}$

5 *rechte Spalte* figuratorum, *(1)* etc. *(2)* finitorum *L* 9 rationalium, *(1)* (excepta prima, ⟨minime⟩ quadrabili) *(2)* omnium *L*

								$\frac{1}{1}$								
							1		$\frac{1}{1}$							
						1		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$						
					1		2		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$					
				1		3		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{1}$				
			1		4		3		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{1}$			
		1		5		6		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{1}$		
	1		6		10		4		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{1}$	
etc.		7		15		10		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{7}$		etc.
	etc.		21		20		5		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{21}$		etc.	
		etc.		35		15		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{35}$		etc.		
			etc.		35		6		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{35}$		etc.			
				etc.		21		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{21}$		etc.				
					etc.		7		$\frac{1}{7}$		etc.					
						etc.		$\frac{1}{1}$		etc.						
[I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII]

16–711,14 *Spalten- und Zeilenzählung erg. Hrsg. Die römisch numerierten Zeilen sind im Manuskript senkrecht unter die entsprechenden Spalten geschrieben. Die eckigen Klammern im Text bis S. 711 Z. 11 stammen von Leibniz selbst.*

[IV] etc.
[V] Summae ex summis summarum seu $\nabla\nabla$ $^{\text{gonales}}$
[VI] Summae summarum seu pyramidales
[VII] Summae arithmeticorum, seu trigonales [differentiae pyramidalium etc.]
[VIII] Progressio arithmetica [differentiae trigonalium et differentiae differentiarum pyramidalium, etc.]
[X] Progressio harmonica seu reciproci arithmetici [summae fractionum seu reciprocorum trigonalium per $\frac{2}{1}$ divisorum; summae summarum reciprocorum pyramidalium per $\frac{2}{1}$ in $\frac{3}{2}$ id est per 3 divisorum etc.]
[XI] Differentiae harmonicorum multiplicatae per $\frac{2}{1}$ [seu reciproci triangularium, seu summae pyramidalium per $\frac{3}{2}$ divisorum]
[XII] Differentiae differentiarum multiplicatae per [3]
[XIII] Differentiae inter differentias differentiarum multiplicatae per [4]
[XIV] etc.

Adde quae alibi scripsi de trianguli harmonici numerorum summis in scheda exigua, huic involuta.

4 [differentiae ... etc.] *erg. L* 5 f. [differentiae ... etc.] *erg. L* 7 seu reciproci arithmetici *erg. L* 7–9 [summae ... per $\frac{2}{1}$ divisorum; | summae summarum *erg.* | reciprocorum ... etc.] *erg. L* 10 *(1)* Progressio *(2)* Differentiae *L* 10 f. [seu ... divisorum] *erg. L* 12 Differentiae *(1)* harmonicorum *(2)* differentiarum *L* 12 $\frac{3}{2}$ *L ändert Hrsg.* 13 Differentiae *(1)* ex *(2)* inter *L* 13 $\frac{4}{3}$ *L ändert Hrsg.*

53_3. SCHEDA EXIGUA
[Dezember(?) 1675 – Februar 1676]

Überlieferung:

L Überarbeitetes Konzept: LH 35 VIII 27 Bl. 1. Ein Zettel 4,5 x 17,5 cm. 2 S.
E P. Costabel, *Leibniz et les séries numériques*, 1978, S. 90–91.
Teildruck in dt. Übersetzung: D. Mahnke, *Zusätze aus den ungedruckten Handschriften*, 1931, S. 31–33 (= Z. 14 – S. 713 Z. 9 und S. 713 Z. 13 – S. 714 Z. 15).
Cc 2, Nr. 1336

[*Teil 1*]

Origo inventionis trianguli harmonici.

Anno 1673 Hugenius mihi proposuerat summam fractionum triangularium inveniendam quam particulari sed valde memorabili solutione deprehenderat. Cum ergo in ea essem meditatione forte notavi[:]

Si exponatur

$$A \sqcap \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

$$B \sqcap \frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15}$$

et si dimidii termini B addantur terminis ex A, per lineas quas vides iunctis, reddi terminos ex A, terminis ex B superscriptos. Quod in mentem primum venerat, quod viderem primum terminum nempe 1 ipsius B, dimidiatum, additum iuncto per lineam

10 trianguli harmonici *erg. L* 11 f. inveniendam *erg. L* 12 solutione *(1)* invenerat *(2)* deprehenderat 18 nempe 1 *erg. L*

11 Anno 1673: Das Gespräch hat wahrscheinlich im September 1672 stattgefunden; vgl. in der Einleitung S. XXV sowie N. 36 u. *Historia et origo calculi differentialis*, 1714 (*LMG* V S. 404). Huygens' Lösung des Problems ist abgedruckt in *HO* XIV, S. 144–150.

ex A, nempe $\frac{1}{2}$ facere 1, seu primum ex A. Item quod nominatores proximi ex A in se ducti, faciunt semper numeratorum ex B duplos, ut

$$\underset{1}{1,2 \sqcap 2.} \quad \underset{3}{2,3 \sqcap 6.} \quad \underset{6}{3,4 \sqcap 12.}$$

Quod autem in caeteris seriebus sumenda sint $\frac{2}{3}C$, $\frac{3}{4}D$, etc. ita facile divinavi, quia $\frac{2}{3}$ primi termini ex C et $\frac{3}{4}$ primi termini ex D, id est semper unitatis, addita secundo termino seriei praecedentis, faciunt semper unitatem. Unde patet quomodo simplicium auxilio s a e p e c o m p o s i t a d i v i n e m u s . Ex hoc autem theoremate inductione deprehenso, summas eleganti satis ratiocinio inveni. Et ex his porro exstruxi ∇^{lum} harmonicum cuius cum arithmetico mirus consensus. De quo alibi.

[*Teil 2*]

Demonstratio. Summae serierum trianguli arithmetici reciproci seu trianguli harmonici.

Sit
$$\begin{array}{l}
A \sqcap \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.}\\
B \sqcap \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \text{ etc.}\\
C \sqcap \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} \text{ etc.}\\
D \sqcap \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} \text{ etc.}\\
\text{etc.} \sqcap \text{ etc.}
\end{array}$$

Erit
$$\begin{array}{l}
A - 1 \sqcap + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.}\\
\frac{1}{2}B \sqcap + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \text{ etc.}
\end{array}$$

1 facere *(1)* duplos *(2)* 1 *L* 2 semper | sequentiam *gestr.* | numeratorum *L* 2 *B (1)* dimidios *(2)* duplos 6 C | seu unitatis *gestr.* | et *L* 9 f. Et ... alibi. *erg. L* 12 serierum *(1)* reciproce triangulo-pyramidalium etc. *(2)* trianguli *L* 13 Sit *erg. L*

10 De quo alibi: N. 53₂.

Iam per theorema $A - 1 + \frac{1}{2}B \sqcap 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc.

Ergo $A - 1 + \frac{1}{2}B \sqcap A$. Ergo $B \sqcap \frac{2}{1}$. Adeoque habetur totius seriei B summa.

Eodem modo $B - 1 + \frac{2}{3}C \sqcap B$. Ergo C $\sqcap \frac{3}{2}$.

$C - 1 + \frac{3}{4}D \sqcap C$. Ergo D $\sqcap \frac{4}{3}$. Et ita porro in infinitum.

Ergo ut in unum contrahamus:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underbrace{A} & \underbrace{B} & \underbrace{C} & \underbrace{D} & \text{etc.}\\
\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

summa

$$\underbrace{\frac{0}{\ldots}\quad \frac{1}{0}}_{\text{coniecturalia}}\quad \underbrace{\frac{2}{1}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{4}{3}\quad \text{etc.}}_{\text{certa}}$$

1 theorema: s. o. S. 712 Z. 14–17.

54. NUMERI PROGRESSIONIS HARMONICAE

8. Februar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 243–244. 1 Bog. 2°. 4 S. Zusatz am linken Rand von Bl. 244 r° u. unten auf Bl. 243 v° quergeschrieben. Geringer Textverlust durch Ausrisse im Falz. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1303

8. Feb. 1676.

Numeri progressionis harmonicae
et
proprietates quaedam in earum progressione observatae
et
summa circiter vera

[*Teil 1*]

Progressionis harmonicae natura est, ut tribus quibuslibet sumtis terminis continuis, sit primus ad tertium, ut differentia primi et secundi ad differentiam secundi et tertii: $a\ \ b\ \ c$ sint characteres algebraici erit: $\dfrac{a}{c} \sqcap \dfrac{a-b}{b-c}$. et $a,b - a,c \sqcap a,c - b,c$. et $2,a,c \sqcap a,b + b,c$. cuius aequationis ope, quaerere possumus valorem vel a. vel b. vel c, itaque $b \sqcap \dfrac{2,a,c}{a+c}$. id est medius trium terminorum progressionis harmonicae est duplus facti ex extremis, divisi per summam. Quaeramus et extremos, erit scilicet $a \sqcap \left[\dfrac{b,c}{2,c,,-b}\right]$.

15 f. tertii: *(1)* 1.2.3.4.5.6.7 sint characteres algebraici *(a)* p s t *(b)* erit: $\dfrac{1}{3} \sqcap \dfrac{1-2}{2-3}$. et $1,2-1,3 \sqcap 1,3-2,3$. et $2,1,3 \sqcap 1,2+2,3$. et erit $2 \sqcap \dfrac{2,1,3}{1+3}$ id est numerus medius *(2)* a b c *L*   17 vel *(1)* 1. vel 2. vel 3. Sed satius quaerere valorem ipsius 2, sive medii, nam nulla est ratio cur alter extremorum prae altero eligatur, itaque $2 \sqcap \dfrac{2,1,3}{1+3}$ *(2)* a. vel b. *L*   19–716,1 scilicet *(1)* $1 \sqcap \dfrac{2,3}{2\,1,3,,-1,2}$. et $3 \sqcap \dfrac{1,2}{2\,1,2,,-2,3}$ *(2)* $1 \sqcap \dfrac{2,3}{2,3,,-2}$ et $3 \sqcap \dfrac{1,2}{2,1,,-2}$. Sit $1 \sqcap$ a. et $2 \sqcap$ b. erit $3 \sqcap \dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$. a b $\dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$ sive $\dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{b}}$ $\dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}}$ $\dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$ *(3)* | $\mathrm{a} \sqcap \dfrac{\mathrm{b,c}}{2,\mathrm{b},,-\mathrm{c}}$ *ändert Hrsg.* | et *L*

et $c \sqcap \dfrac{a,b}{2,a,,-b}$. Ergo assumendo $a.b.$ sequens seu tertius habebitur et ita stabit $a \quad b \quad \dfrac{ab}{2a-b}$ sive reducendo ad unum numeratorem, quod etiam aliquando utile est, quemadmodum alias ad unum nominatorem, fiet $\dfrac{ab}{b} \quad \dfrac{ab}{a} \quad \dfrac{ab}{2a-b}$. Sunt autem nominatores $b.\,a.\,2a-b$, termini progressionis arithmeticae, nam duplus medius, aequatur summae extremorum.

Medium harmonicum $\dfrac{2ac}{a+c}$ reciprocum est dimidiae summae fractionum sub extremis $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}$. seu $b \sqcap \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$.

Sed quoniam progressio quaelibet eadem manet si tota per aliquam quantitatem dividatur, ideo resumendo: $\dfrac{ab}{b} \quad \dfrac{ab}{a} \quad \dfrac{ab}{2a-b}$ etc. et totum dividendo per ab, fiet: $\dfrac{1}{b} \quad \dfrac{1}{a} \quad \dfrac{1}{2a-b}$. Sit quartus terminus $\dfrac{1}{c}$ quaeritur c quam sic inveniemus scribendo: $\dfrac{1}{b} \quad \dfrac{1}{B \sqcap a} \quad \dfrac{1}{A \sqcap 2a-b}$

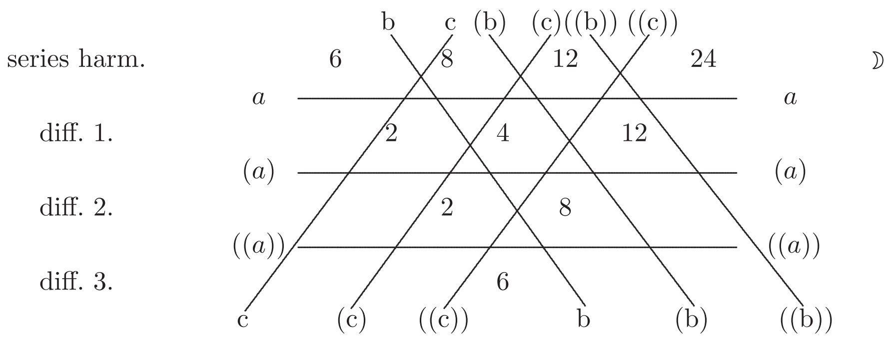
3 nominatores *erg. L* 5 f. extremorum *(1)*: Et quoniam b et a pro arbi *(2)*. *(a)* Divisis omnibus per ab, fiet: $\dfrac{1}{\mathrm{ab}^2} \quad \dfrac{1}{\mathrm{a}^2\mathrm{b}}$ vel $\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2} \quad \dfrac{1}{2\mathrm{a}^2\mathrm{b}-\mathrm{ab}^2}$ vel $\dfrac{1}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}}$. Sit *(aa)* quartus *(bb)* continuatae huius progressionis quartus, $\dfrac{1}{\mathrm{c}}$, appellando secundum $\dfrac{1}{\mathrm{AB}^2}$. et tertium $\dfrac{1}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}}$, fiet quartus $\dfrac{1}{2\mathrm{A}^2\mathrm{B}-\mathrm{AB}^2}$ et $\mathrm{c} \sqcap 2\mathrm{A}^2\mathrm{B}-\mathrm{AB}^2$. Hinc $\mathrm{A} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}}{\mathrm{B}^2}$. et $\mathrm{A}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^4\mathrm{b}^2}{\mathrm{B}^4}$. et $\mathrm{A}^2 \sqcap \dfrac{2\mathrm{a}^2\mathrm{b}-\mathrm{ab}^2}{\mathrm{B}}$. fiet $\mathrm{B}^3 \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^3\mathrm{b}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$. Ergo $\dfrac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$ debet esse cubus. Quod praestabitur si ponatur $\mathrm{a} \sqcap 1$. et $\mathrm{b} \sqcap 1$. erit enim $\dfrac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}} \sqcap 1$. qui primus est casus, et oritur progressio harmonica prima 1.1.1. *(aaa)* Aliter *(bbb)* Proximus *(aaaa)* gradus *(bbbb)* casus est, ut ponendo $\mathrm{b} \sqcap 1$. fiat $\mathrm{a} \sqcap 5$. et fiet: $\dfrac{1}{5} \quad \dfrac{1}{25} \quad \dfrac{1}{45}$ etc. sive omnia multiplicando per $\mathrm{ab} \sqcap 5$, fiet $\dfrac{1}{1} \quad \dfrac{1}{5} \quad \dfrac{1}{9} \quad \dfrac{1}{15}$ etc. *(b)* Medium *L* 10 scribendo *erg. L*

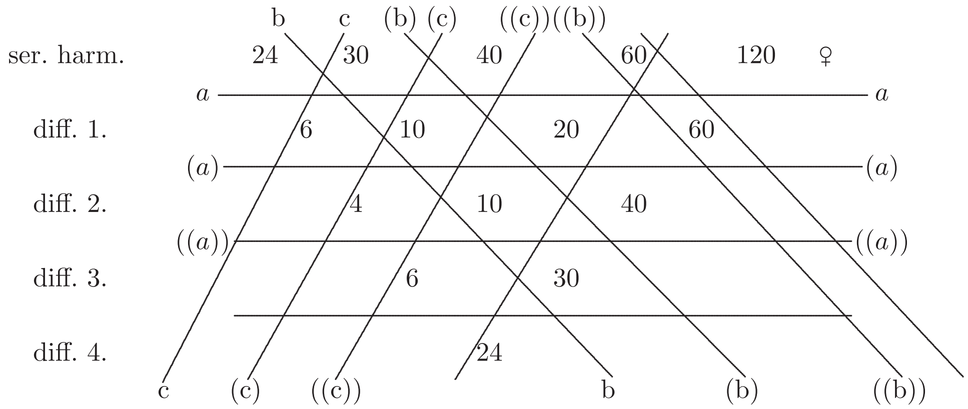
6 f. Medium ... $b \sqcap \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$: vgl. N. 55 S. 733 Z. 16.

$\dfrac{1}{c \sqcap 2A - B}$. Fit enim quartus ex secundo et tertio, ut tertius ex primo et secundo, ergo inserendo valores A et B in valore c, fiet $c \sqcap 4a - 2b, -a \sqcap 3a - 2b$. Fiet ergo progressio harmonica: $\dfrac{1}{b}\ \ \dfrac{1}{a}\ \ \dfrac{1}{2a-b}\ \ \dfrac{1}{3a-2b}\ \ \dfrac{1}{4a-3b}$ etc. id est eius termini sunt fractiones, quarum nominatores sunt progressionis arithmeticae incipientis a $\underline{b}$. et continue crescentis, differentia $a - b$. Unde patet etiam omnes possibiles progressiones harmonicas enumerari posse, quia a. et b. sumi possunt pro arbitrio, modo a, maior quam b. Deinde sequitur hinc progressionem numerorum integrorum harmonicorum non posse continuari in infinitum. Nam ut in integris exhibeatur progressio harmonica reducendae sunt fractiones ad communem denominatorem. Quo abiecto habebuntur numeri progressionis harmonicae integri. Sed patet eos longe alios fieri, prout alius atque alius sumitur denominator. Alius autem alius oritur denominator, quando aliae atque aliae sumuntur fractiones, quod fit, quando nunc plures nunc pauciores fractiones assumuntur. Hinc difficillimae tractationis haec progressio est, ob continuam variationem, ut tamen in eius naturam in integris per compendiosas inductiones inquirere possimus, operae pretium erit, incipere ordine enumerare omnes series integrorum harmonicorum finitas, quae ex infinita unica fractionum $\dfrac{1}{1}\ \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{5}$ etc. fieri possunt. Ex primo fit 1. ex duabus primis, invento et abiecto communi denominatore, 2.1. ex tribus primis, 6.3.2. expressa in tabula adiecta per ☉, ex quatuor primis, 24.12.8.6. expressa in tabula adiecta per ☽. Atque ita continuari tabula intellige inquisitis cuiuslibet seriei differentiis, et differentiarum differentiis, ut factum vides. Eumque in finem n o t a n d a , tabulae subscripta, consulantur.

	1			$\frac{1}{1}$
	1 2			$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2} \sqcap \frac{2}{1}\ \frac{1}{2}$
series harmonica	2 3 6	☉		$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \sqcap \frac{6}{6}\ \frac{3}{6}\ \frac{2}{6}$
diff. 1.	1 3			
diff. 2.	2			

14 incipere *erg.* L 16 invento et *erg.* L 17 denominatore, *(1)* et reducendo ad unam fractionem *(2)* 2.1. ex L





120 144 180 240 360 720
24 36 60 120 360
12 24 60 240
12 36 180
24 144
120

720 840 1008 1260 1680 2520 5040
120 168 252 420 840 2520
48 84 168 420 1680
36 84 252 1260
48 168 1008
120 840
720

Notanda in tabula

Differentiae sunt, primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $aa, (a)(a)$ etc.

Incrementa primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $bb, (b)(b)$ etc.

Decrementa primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $cc, (c)(c)$ etc.

Differentiae incrementa, decrementa, simpliciter, significant ea quae primi gradus.

In progressione harmonica termini decrementis differentiae primae, incrementis secundis, 2^{dae} tertiis coincidunt, sive generaliter, series horizontales coincidunt obliquis decrementalibus, in progressione harmonica.

Difficile foret a priori invenire progressionem quae hoc praestaret, si nesciremus esse harmonicam.

In serie qualibet incrementali termini ab extremis aequidistantes coincidunt.

Continuatio tabulae per series, seu progressio progressionum harmonicarum sive serierum. Series sequens quaesita fiet ex praecedente, si ultimus praecedentis, fiat primus sequentis, et reliqui sequentis, sint omnes praecedentis per suum ordinalem numerum naturalem ordine seriei quaesitae respondentem, multiplicati, ut ☉ est tertia in ordine, adeoque naturalis ei respondens, sive ordinalis eius, 3. Primus eius terminus est 2. maximus seriei praecedentis, sequentes, 3.6. sunt facti ex terminis seriei praecedentis, 1.2. in o r d i n a l e m seriei quaesitae, 3.

Continuatio tabulae per incrementa, seu progressio progressionum incrementalium, sive incrementorum harmonicorum. Primus et ultimus (coincidentes) iam habentur, sunt enim iidem cum primo termino seriei seu ultimo seriei praecedentis. Reliqui sic fient. Incrementalium praecedentis seriei primus multiplicetur per 1. secundus per 2. tertius per 3. etc. et ita in medium usque ab utroque enim extremo fit idem. Ita series incrementalis ♀, nempe ⟨24.6.⟩4. sic fiet. 24. terminus seriei primus (est semper factus ⟨—⟩ ⟨om⟩nium ordinalium), reliqui ex ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis, 6.2. per 1.2. ordine multiplicatis.

Quoniam autem incrementorum progressionem invenimus, non est opus nunc quidem tabulam longius continuari, nam incrementa videntur simplicioris esse naturae, quam ipsae series, adeoque supererit ut inquiramus in progressionis incrementorum proprieta-

2 *(1)* Tabula facile continuari poterit, si *(2)* Differentiae *L* 2 includuntur *(1)* lineis, *(2)* rectis *L* 5 decrementa, *(1)* intellige *(2)* simpliciter *L* 10 f. harmonicam. *(1)* Continuatio tabulae: *(2)* In *L* 13 quaesita *erg. L* 13 si *(1)* primus *(2)* ultimus *L* 14 suum ordinalem *erg. L* 15 quaesitae *erg. L* 24 f. ⟨om⟩nium *(1)* naturali *(2)* ordinalium *L* 25 ex *(1)* terminis seriei | increment⟨—⟩ *erg.* | ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis, ordine, *(2)* ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis *L*

tes. Nam quando series quaedam tractatur, utile est quaeri eius differentias, et differentias differentiarum, et differentias tertias, seu quas ipsae habent differentiae differentiarum, idque tamdiu, donec vel ultimae differentiae sint 0. et habemus quaesitum, hoc enim sufficit ad naturam progressionis propositae investigandam, ita enim et aequatione potest exprimi, et summae terminorum possunt inveniri, quae sunt primaria in qualibet progressione quaesita. Vel differentiae nunquam evanescunt quamdiu termini suppetunt, et tunc inquirendum est in seriem incrementorum, vel decrementorum; illorum, si series ab initio proposita in infinitum crescere potest, horum, si in infinitum potest decrescere: utrorumque, si finita est. Hoc loco differentias nunquam exhaustum iri patet nisi cum terminis, et series proposita harmonica finita est, adeoque incrementorum simul et decrementorum series, examinanda, quae utraque etiam finita, sed aequidiuturna cum ipsa serie terminorum, imo series decrementorum mirabili sane proprietate coincidit cum serie terminorum.

Superest ergo tantum examinanda series incrementorum separatim; quoniam enim eius naturam ac progressionem certa quadam regula invenimus, sola per se incrementa iam novam tabulam possumus quaerere, extra tabulae superioris continuationem.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
\hline
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 0 & & & \\
\hline
 & 2 & & 1 & & 2 & \\
 & & -1 & & 1 & & \\
 & & & 2 & & & \\
\hline
6 & & 2 & & 2 & & 6 \\
 & -4 & & 0 & & +4 & \\
 & & +4 & & +4 & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

2 differentiarum, et *(1)* differentiae quam ipsae *(1)* differentias *(a)* secundas seu *(b)* tertias *L* 3 vel *(1)* incideamus in *(2)* ultimae *L* 6 Vel *(1)* nulla inveniri potest differentia *(2)* diff *(3)* differentiae *L* 6 quamdiu ... suppetunt *erg. L* 7 f. decrementorum; *(1)* si pro *(2)* illorum, si series | *(a)* pro data *(b)* ab initio proposita *erg.* | in *L* 9 f. nisi ... terminis *erg. L* 11 utraque *erg. L*

24 6 4 6 24
−18 −2 2 18
16 4 16
− 12 12
24

120 24 12 12 24 120
−96 −12 0 12 96
+84 +12 +12 84
− 72 0 72
72 72
0

720 120 48 36 48 120 720
−600 −72 −12 12 72 600
+528 +60 24 60 528
− 468 −36 36 468
432 [72] 432
[−360] [360]
[720]

5040 720 240 144 144 240 720 5040
4320 [480] 96 0 • • •
[3840] [384] • • • •
[3456] • • • •
• • • •
• • •
• •
•

18 0 *L ändert Hrsg.* 19 432 *L ändert Hrsg. zweimal* 20 0 *L ändert Hrsg.* 23 360 *L ändert Hrsg.* 24 3960 *L ändert Hrsg.* 24 264 *L ändert Hrsg.* 25 3696 *L ändert Hrsg.*

Hic illud primum notabile est (ut in triangulo arithmetico), quod idem ab utraque extremorum parte diverso.

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\text{Calculo producitur:} & \text{ut} & 6 & 2 & 2 & 6 & & \\
 & & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \text{per} & \\
 & 24 & 6 & 4 & 6 & 24 & & \\
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \text{per} & \\
120 & 24 & 12 & 12 & 24 & 120 & &
\end{array}$$

Notandae, et differentiae negativae, quae hic occurrunt.

Caeterum quoniam differentiae incrementorum ad magnos denique numeros ascendunt, non est cur sic pergamus. Et referenda huc quae alibi calculavi, ubi certa quadam ratione differentiae exhauriri videbantur.

In omni progressione harmonica, ut $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}$ excerpti per intervalla aequalia sunt etiam harmonici, ut $\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{11}$ etc.

Quare idem est et in integris, quando fractiones ad communem denominatorem reducuntur.

---

14 f. *Nebenbetrachtung, gestrichen:*

$$\frac{1}{2} \sqcap \frac{2, \frac{1}{3}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}} \quad \text{seu} \quad 1 \sqcap \frac{2, 2, \frac{1}{\cancel{3}} \sqcap 4}{\frac{3,1}{1} + \frac{1,1}{1} \sqcap 4}$$

$$\frac{1}{3} \sqcap \frac{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \sqcap \frac{2, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{5}}. \quad \text{Ergo} \quad \frac{\cancel{2}}{3} \sqcap \frac{\cancel{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} + \frac{\cancel{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{5}} \quad \text{et} \quad 3 \sqcap \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\ \textit{(!)}}$$

$\left(\sqcap \frac{\frac{4}{1} + \frac{2}{1}}{2}\right)$. Reducendo ad unum numeratorem $\frac{1}{3} \sqcap \frac{1}{4+2} + \frac{1}{5+1} \sqcap \frac{2}{6}$

14 integris, | ut arbitror *gestr.* | quando *L*

---

10 alibi calculavi: vgl. N. 22 Teil 2.

[*Teil 2*]

Summae progressionum finitarum omnium quarum formulae rationales aequabiles, licet fractae. Quod hactenus nemo.

Cum diu laborassem frustra in summis reciprocarum progressionum, seu fractionum, investigandis, tandem subito lucem quandam hausi. Diu constabat mihi ex Mercatoris methodo posse appropinquando exhiberi summam terminorum harmonicae finitorum, id enim cum hyperbolae quadratura in numeris propinquis exhibita, coincidit, sed nondum appropinquationis ope ad exactam summam quaesitam veniri posse cogitaveram. Quod nuper in mentem venit, et nunc explicabo.

Nam sit: $\underbrace{\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{7}}_{\rightmoon}$ etc. seu

$\frac{1}{1}-\frac{0}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{1}-\frac{3}{4}+\frac{1}{1}-\frac{4}{5}+\frac{1}{1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{1}-\frac{6}{7}$ etc. seu

$7,-\Big(\underbrace{\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}}_{\odot}\Big)$. Ergo si series $\odot$ inveniatur invenietur et $\rightmoon$, nam $\rightmoon \sqcap 7-\odot$.

3 *Am Rande:* Aequabiles formulae, quae aequationem certi gradus seu lineam non transcendentem dare possunt.

2–4 Summae progressionum *(1)* formularum ra *(2)* finitarum ... rationales | aequabiles *erg.* |, licet ... nemo *erg. L* 5 reciprocarum | arithm *erg. u. gestr.* | progressionum *L* 6 f. Mercatoris *(1)* regul *(2)* methodo *L* 8–10 , sed ... explicabo *erg. L* 11 etc. *(1)* seu *(2)* seu $1-\frac{2}{1}+1-\frac{3}{2}+1-\frac{4}{3}+1-\frac{5}{4}+1-\frac{6}{5}+1-\frac{7}{6}+1-\frac{8}{7}$ *(3)* seu *L*

6 f. ex Mercatoris methodo: N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XV S. 29 f. [Marg.], entwickelt $\frac{1}{1+a}$ durch fortgesetzte Division in die Reihe $1-a+a^2-a^3+a^4$ etc.

Fractionum in $\odot$ contentarum numeratores, 0.1.2.3. etc. appellemus y. erit $\odot \sqcap \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{(y)}{1+(y)}$ etc. Iam $\dfrac{y}{1+y} \sqcap y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 \; -y^6 \; \left[+y^7 - y^8 + y^9 - y^{10}\right]$ etc.

Et quanquam hoc modo subtrahenda addendis maiora, si in infinitum continuetur series potentiarum; attamen si appropinquatio tantum quaeratur non est opus iri in infinitum; sed finiri potest in potentia affirmativa, adeoque et series tota harum potentiarum $y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$ erit affirmativa seu nihilo maior et continuari poterit, donec ab $\dfrac{y}{y+1}$ minus differat quam aliqua quantitas data. Iam si idem fiat in singulis y, habebimus:

$$y \sqcap 1 \qquad \frac{y}{1+y} \qquad \sqcap\!\!\!\!\!p \quad y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$$

$$y \sqcap 2 \qquad \frac{(y)}{1+(y)} \qquad \sqcap\!\!\!\!\!p \quad (y) - (y)^2 + (y)^3 - (y)^4 + (y)^5$$

$$y \sqcap 3 \qquad \frac{((y))}{1+((y))} \qquad \sqcap\!\!\!\!\!p \quad ((y)) - ((y))^2 + ((y))^3 - ((y))^4 + ((y))^5$$

etc. etc. etc. etc. etc. etc. etc.

$$y \sqcap 100 \; \frac{{}_{100}(y)_{100}}{1+{}_{100}(y)_{100}} \; \sqcap\!\!\!\!\!p \; {}_{100}(y)_{100} - {}_{100}(y)_{100}^{\,2} + {}_{100}(y)_{100}^{\,3} - {}_{100}(y)_{100}^{\,4} + {}_{100}(y)_{100}^{\,5}$$

Iam haberi potest nullo negotio, summa omnium y. seu 1.2.3. etc. ab 1 ad 100 et omnium y^2 seu 1.4.9. etc. ab 1 ad 100^2, et ita quoque cuborum etc. Cum ergo in singulis aequationibus eousque produci possint potentiae, ut sit error minor dato, poterit

8–12 *Am Rande:* $\sqcap$ maior. Et $\sqcap\!\!\!\!\!p$ est paulo maior.

2 f. $-y^6$ | $-y^7 + y^8 - y^9 + y^{10}$ *ändert Hrsg.* | etc. *(1)* Iam quia numerum ipsarum y supponimus esse finitum, haberi potest in numeris $\int$ y | seu sum. omnium y *erg.* |, (et $\int y^2$ et $\int y^3$, et sum. y^4 etc. Unde sequitur, *(2)* Sed quoniam hoc modo subtrahenda addendis maiora, ideo aliter procedemus *(3)* Et *L* 3 maiora, *(1)* si *(2)* cum y sit integer, *(3)* si *L* 4 potentiarum *erg. L* 4 si *(1)* in affirma *(2)* subsistatur in po *(3)* appropinquatio *L* 7 Iam | si *streicht Hrsg.* | si *L* 13 seu ... etc. *erg. L*

12 $\dfrac{{}_{100}(y)_{100}}{1+{}_{100}(y)_{100}}$: Die Symbole bedeuten die Anzahl der Klammern. Die Bezeichnungsweise ist nicht völlig in Übereinstimmung mit der linken Spalte. Um Konsequenz zu erzeugen, müßten entweder einfache Klammern bereits in Z. 8 oder 99 Klammern in Z. 12 stehen.

in singulis error tam fieri parvus, ut et in summa sit minor dato. Et ita habebitur summa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}+\frac{1}{100}$ quantitate quantumlibet verae propinqua.

Sed hic video erratum, quia enim y est integer, hinc tantum abest, ut continuando appropinquemus, ut contra quo longius continuamus, hoc longius absit error a vero. Huic malo elegans remedium inveni, ponendo $y \sqcap \frac{1.\,\text{vel}\,2.\,\text{vel}\,3.}{1000,000\,\text{etc.}}$ ita, ut id quod unitas erat, sit pars $\frac{1}{1000,000^{\text{ma}}}$, quantitatis alterius quae ipsam vicibus tot continet. Quod semper in problemate dato effici potest. Et ita postremae potestates negligi poterunt, et appropinquabimus pro libitu.

Habemus ergo viam exhibendi quantitatem, quae a summa reciprocorum arithmeticae progressionis differat minus quam quantitas data. Haec quantitas sit: $\frac{z\,\text{quantitas verae appropinquans}}{1000,000,000,000,000,000}$ seu $\frac{z}{\overline{1000}^6}$. Quia ivimus ad y^5. eritque z. integer. Iam idem $\sqcap_{P}$ $\frac{\text{integris} \sqcap v}{1.2.3.\,\text{etc.}\,100.1000,000}$ erit $\frac{z}{\overline{1000}^6} \sqcap_{P} \frac{v}{1.2.3.\,\text{etc.}\,100.\overline{1000}^2}$.

Error autem ponatur minor quam $\frac{1}{\overline{1000}^2}$, seu $v \sqcap_{P} \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^4}+\frac{1}{\overline{1000}^2}$, seu si omnia rursus per $\overline{1000}^2$ multiplicata intelligamus, per quae ante diviseramus, $v \sqcap_{P} \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$ et $v \sqcap_{P} \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}+1$.

Et numerus integer cadens inter hos duos ipsius v valores, (qui non nisi unus esse potest, quoniam non nisi unitate differunt) erit quaesitus. Is vero numerus statim reperie-

---

5 f. *Zusatz s. S. 729 Z. 22 – S. 730 Z. 15*

3 hic | rursus *gestr.* | video *L* 11 integer *(1)*, reductis *(2)*. Iam *L* 13 Error *(1)* ergo ponatur inventus minor quam 1, *(2)* autem *L* 15 f. +1. *(1)* Debet maximus numerus integer cadens inter hos duos, esse quaesitus *(2)* Et *L* 17 quaesitus. *(1)* Sed illud agitur *(2)* Is *L*

11–726,5 $\frac{z\,\text{quantitas verae appropinquans}}{1000,000,000,000,000,000}$ ... potest: vgl. N. 55 S. 732 Z. 7–9 tur fractionem quantumlicet ad integros reducendo. Quare res eo tandem redit tantum, ut inveniendus sit numerus maximus integer in $\dfrac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$ contentus, eique addenda unitas; is enim maior quam $\dfrac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$, et minor quam $\dfrac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}+1$. Satisfacit ergo, et solus, satisfacit, quia inter duas quantitates sola unitate differentes plus quam unus integer consistere non potest.

Adeoque infallibiliter habebimus exactam et veram progressionis harmonicae propositae finitae, summam.

Hoc iam inventum immensos pariter in geometria et arithmetica habere usus, paucis ostendam. Ac primo hinc dabitur summa omnium serierum, quae ex huius seriei terminis affirmatis negatisque componunturque, quales sunt plurimae, ut:

$\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$ etc. vel $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}$ etc. quarum prior exhibet quadraturam hyperbolae, posterior circuli. Et hinc iam reperta est via per quam solis numerorum additionibus, mira facilitate veniri poterit, ad appropinquationem, etiam si quis velit Ludolphina exactiorem. Idque admoneri operae pretium erit in mea *Quadratura arithmetica*. Iam $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}$ etc. etiam sic poterunt exprimi, $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{35}+\dfrac{2}{99}$ etc. sive: $\dfrac{2}{2^2-1}+\dfrac{2}{6^2-1}+\dfrac{2}{100^2-1}$ etc. quorum denominatores duplorum ab imparibus quadrata unitate minuta.

Si naturales y. erunt pares $2y$. impares, $2y-1$, eorum dupli, $4y-2$, et horum quadrata, $16y^2-16y\boxed{\begin{matrix}+4\\-1\end{matrix}}+3$. Ergo omnium $\dfrac{1}{16y^2-16y+3}$ haberi potest summa; videndum an non hoc modo datae cuiuslibet, $\dfrac{1}{b^2y+cy+d}$ haberi possit summa, verum quia iam scio, non posse hoc modo haberi summam huius $\dfrac{1}{y^2+2cy+c^2}$. Ideo ut hanc formam exclu-

4 differentes *(1)* una maior *(2)* plus *L*   16 f. imparibus *(1)* radices *(2)* quadrata *L*

14 Ludolphina: Ludolph van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596; seine beste Approximation überliefert W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, S. 55.   14 f. *Quadratura arithmetica*: vgl. *LQK*, Scholium zu prop. XXXII S. 80.

damus, ideo quaeramus tantum huiusmodi seriei summam $\dfrac{1}{z^2+d}$. Semper enim ad eam reduci potest formula, ubi si d extet, non potest comprehendi $y^2+2cy+c^2$. Sit ergo numerorum arithmeticae progressionis undecunque incipientium, forma, $fy+g$. sit differentia, e, erit terminus harmonicae progressionis, $\dfrac{1}{fy+g}$. et $\dfrac{1}{fy+g} - \dfrac{1}{\begin{array}{l} fy+fe \\ +\ g \end{array}}$ debet aequari $\dfrac{h}{z^2+d}$ fiet: $\dfrac{\boxed{fy}+fe\boxed{+g}\boxed{-fy}\boxed{-g}}{\begin{array}{l} f^2y^2+2fgy+g^2 \\ \quad +f^2e\ .\ +feg \end{array}}$ et $h \sqcap fe$. Potest autem h fieri qualem velimus, nec nos turbat. Porro $fy \sqcap z$. $2g+fe \sqcap 0$. seu $fe \sqcap -2g$. et $g^2\boxed{+feg} - 2g^2 \sqcap d$. sive $g \sqcap \sqrt{\ }-d$. Ponamus $-d \sqcap D$. erit $d \sqcap -D$. Ergo $g \sqcap \pm\sqrt{}D$. $e \sqcap \dfrac{\pm 2\sqrt{}D}{f}$ et $y \sqcap \dfrac{1}{f}z$. Ergo quaelibet fractio quadratica huius formae $\pm\dfrac{2\sqrt{}D}{z^2-D}$ exprimi poterit terminis progressionis harmonicae, huiusmodi: $\dfrac{1}{\frac{1}{f}z+\sqrt{}D}$ sed alternatim affirmatis et negatis. Videamus iam si data sit forma: $\dfrac{1}{\frac{1}{f}x^2+bx+c}$. quae cum hac: $\dfrac{1}{z^2-D}$. comparari possit: Sit $z \sqcap x+l$. fiet $\dfrac{1}{f}z^2 - D \sqcap \dfrac{1}{f}x^2 + \dfrac{2l}{f}x + \begin{array}{l} l^2 \\ -D \end{array}$. ergo $\dfrac{l}{f} \sqcap \dfrac{b}{2}$ et $D \sqcap l^2-c$. et erit $f \sqcap \dfrac{2l}{b}$. Data ergo forma: $\dfrac{\pm 2\sqrt{l^2-c}}{\frac{b}{2l}x^2+bx+c}$. erit harmonica eius $\dfrac{1}{\begin{array}{l} +\frac{b}{2l}x+\sqrt{l^2-c} \\ \quad +\frac{b}{2} \end{array}}$. Eodem modo et formularum fracta-

3 sit *(1)* unitas ⊓ e *(2)* differentia *L* 9 erit ... g ⊓ $\pm\sqrt{}$D. *erg. L* 10 quaelibet *(1)* formul *(2)* fractio quadratica *(a)* reduci potest ad differentiam *(b)* huius *L* 10 poterit *(1)* differentia duarum *(a)* harmo *(b)* harmonicarum *(2)* terminis *L* 15 modo *(1)* formulae *(2)* fractionum cubicarum et quadraticarum *(3)* et *L*

rum ad cubum aut [quadratoquadratum] assurgentium haberi poterunt summae, vel eo magis, nimirum tres harmonicas addendo subtrahendoque a se invicem. Quin imo poterunt additiones misceri subtractionibus, item series addendae aut subtrahendae antea multiplicari. Videntur tamen haec irrelevantia, seu varietatem arbitrariarum non auctura. Sed verbo: Maxima varietas in eod fingi potest, ut faciamus:

$\frac{qy+b}{fy+g} \mp \frac{ry+c}{ly+m} (\mp) \frac{sy+d}{ny+p}$ etc. quot scilicet opus ad formulam conficiendam propositae similem, cuius summa quaeritur, dum scilicet omnes hae ad communem denominatorem reducuntur. Unde si formula sit $\frac{y^3+\alpha y^2+\beta y+\gamma}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$, poterit huiusmodi progressionis iniri summa: dum ostendetur summae trium praecedentium harmonicarum, vel ab harmonicis cognita quantitate differentium aequari.

Quanquam et singularum partium iniri possunt summae, ut separatim portio: $\frac{y^3}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$ quae rursus resolvi potest in has duas: $\frac{1}{\delta} - \frac{\frac{\varepsilon}{\delta}y^2 + \frac{\theta}{\delta}y + \left[\frac{\lambda}{\delta}\right]}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$. Quam rursus dissolvamus in partes tres, secundum $y^2.y.\left[\frac{\lambda}{\delta}\right]$ et tribus residuis partibus prioris addamus, fient: $\frac{\begin{array}{ccc} +\alpha\, y^2 + & \beta\, y + & \gamma \\ -\frac{\varepsilon}{\delta}\quad\cdot & -\frac{\theta}{\delta}\quad\cdot & -\left[\frac{\lambda}{\delta}\right] \end{array}}{\delta y^3 \text{ etc.}}$. Ex his rursus excerpendo: $\frac{\begin{array}{c} +\alpha\, y^2 \\ +\frac{\varepsilon}{\delta}\quad\cdot \end{array}}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$. Singulorum separatim methodo eadem iniri possunt summae, sed satius arbitror sine divulsione priori methodo insisti. Interea hinc excipiendi casus $\frac{1}{y^2}$. et $\frac{1}{y^3}$. etc. qui hoc modo tractari non possunt, quia tunc $l^2 - c \sqcap 0$. Huic rei duplex remedium circumspicio; primum, quod eodem modo cum quadratis, cubis aliisque formis agi potest, quo ab initio paginae praecedentis, cum ipsis harmonicis egimus. Et hoc est remedium generale omnium

1 quadratoquadratoquadratum *L ändert Hrsg.* 3 subtractionibus *(1)* (videtur tamen haec inev *(2)*, item *L* 12 $\frac{\mathrm{y}^3}{\delta \mathrm{y}^3+\varepsilon \mathrm{y}^2+\theta \mathrm{y}+\lambda}$ *(1)* | fiet: *streicht Hrsg.* | $\sqcap \frac{1}{\delta}$, *(2)* quae *L* 12 λ *L ändert Hrsg.* 13 $\mathrm{y}^2.\mathrm{y}.$ | λ *ändert Hrsg.* | *(1)* numeratoris, et *(2)* et *L* 15 λ *L ändert Hrsg.*

19 f. ab ... praecedentis: s. o. S. 723 Z. 5

formularum; alterum est, ut sumamus formulas illas quarum tam finitarum quam infinitarum per regulas aliunde notas datur summa, nempe $\dfrac{1}{y \frown y+1}$ et $\dfrac{1}{y \frown y+1 \frown y+2}$ et $\dfrac{1}{y \frown y+b \frown y+2b \frown y+3b}$ aliaeque tales nempe quarum nominatores sunt numeri combinatorii; imo una cum integris y. vel y^2. y^3. etc. in unum, aut ad harmonicas addantur; ita enim ex additione tot serierum, quarum singularum habetur summa, poterit credo cuilibet formulae rationi fractae vel ex integris fractisque utcunque mixtae, similis exhiberi. Imo quoniam numeri triangulares aliique figurati sive combinatorii sunt differentiae harmonicorum; poterunt et investigari differentiae quadratorum vel cuborum etc. ab harmonicis, unde novae formae facile summabiles. Ope ergo harmonicorum, quos arithmetice summa⟨mus⟩ et aliorum quales triangulares et pyramidales etc. quos summamus analytice, additis si opus integris, non dubito formulas alias omnes excitari posse. Unde illud commodum habebimus, ut calculatis semel per tabulam harmonicorum summis, omnes aliae summae perfacile inveniantur per traditam tabulam analyticam, quae generaliter usum tabulae harmonicae in caeteris ostendat. Tabula harmonica, si condenda sit, hoc fieri posset per logarithmos; dum scilicet omnes multiplicationes tot numerorum, quibus opus in harmonicis, ope logarithmorum contraherentur facilius ope ingentis instrumenti in quo descripta hyperbola. Omnium optime si regulam analyticam adhuc inveniam pro summis harmonicorum. Caeterum et aliae ⟨— —⟩ demonstrationes huc resumendae, quibus videbar probare, ex datis harmonicis inveniri posse summam quadratorum finitorum ⟨— —⟩

[*Zusatz zu S. 725 Z. 5 f.*]

Corrigendum hic aliquid scilicet quia y est fractio, ut $\dfrac{x}{1000}$, hinc $\dfrac{y}{1+y}$ foret $\dfrac{x}{1000+x}$ etc. Rectius ergo sic: Sumamus $\dfrac{1}{1}\ \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{3}$ etc. faciamus: $\dfrac{1000}{1000-0}\ \dfrac{1000}{1000-1}\ \dfrac{1000}{1000-2}$ et con-

3 tales *(1)* infinitum; una cum inte *(2)* nempe *(a)* combi *(b)* quarum *L* 23 $\frac{1}{3}$ etc. *(1)* | multiplicemus *streicht Hrsg.* | super et infra per 1000, fiet $\frac{1000}{1000+0}$ $\frac{1000}{}$ *(2)* faciamus *L*

22–730,15 Corrigendum ... quaeritur: vgl. N. 55 S. 731 Z. 18 – S. 732 Z. 6.

tinuando usque ad $\dfrac{1000}{1000 - 1000 \sqcap 0}$ sive fient $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1000}}$ $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{1000}}$ etc. usque ad $\dfrac{1}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ id est $\dfrac{1000}{1000}$ $\dfrac{1000}{999}$ $\dfrac{1000}{998}$ etc. usque ad $\dfrac{1000}{1}$. Quam progressionem facere possumus ex ordinaria: $\dfrac{1}{1000}$ $\dfrac{1}{999}$ $\dfrac{1}{998}$ etc. per ⟨1000⟩ multiplicata. Et ita ex data hac et ordinariae summam habebimus. Et ob $1-\dfrac{1}{1000}$ potentiae dividendo non alternis addentur et subtrahentur, sed semper addentur. Si ergo addendi sint termini 144 verbi gratia, tunc loco 1000 adhibendi 144. Possemus tamen semper ⟨per⟩ 1000, et similes procedere, hoc modo. Volumus summam inire huius seriei $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ etc. $\dfrac{1}{144}$. Fingamus nos inire velle usque ad $\dfrac{1}{1000}$ et incipiendo a $\dfrac{1000}{1-\dfrac{x}{1000}}$ etc. seu $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ $\dfrac{1000}{1-\dfrac{2}{1000}}$ progrediamur usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{856}{1000}}$ et ineamus summam, deinde procedamus etiam alio calculo ab $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ et unam summam ab altera subtrahendo habebimus summam horum, $\dfrac{1000}{144}$ $\dfrac{1000}{143}$ etc. $\dfrac{1000}{1}$ quae quaerebatur. Pulcherrimum est specimen, et forte in aliis utile futurum reducendi calculum alioqui difficillimum, ob numeros multiplicandos, ad decimalem. Et hoc usui haberemus, quod una pars calculi, nempe incipiendo ab $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ serviet pro exemplis omnibus; et altera tantum variaretur, pro omnibus inquam exemplis, quando non amplius quam 1000 terminorum summa quaeritur.

1 f. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ *(1)* sive dividendo *(2)* id *L* 12 reducendi *(1)* | rem *streicht Hrsg.* | al *(2)* calculum *L*

55. PROGRESSIONIS HARMONICAE PROPRIETAS

[Am oder kurz nach dem 8.] Februar 1676

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 253. Ca. 3/4 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 253 r°. Überschrift und Datum ergänzt. Datum links neben Z. 21 wiederholt. Am unteren Rand und auf der Rückseite Aufzeichnungen anderen Inhalts (Druck in einem späteren Band der Reihe). Ursprünglich bildete LH 35 II 1 Bl. 253 mit LH 35 XIII 1 Bl. 391 (*Tangentium calculus*, Cc 2, Nr. 00, Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2°; der Text S. 733 Z. 18 wurde beim Zerschneiden des Blattes teilweise abgetrennt.
Cc 2, Nr. 1334 tlw.

Datierungsgründe: Die Gesprächsaufzeichnung bezieht sich mehrfach auf das auf den 8. Februar 1676 datierte Stück N. 54.

[*Leibniz*]

Progressionis harmonicae proprietas et arithmeticae summa naturali via demonstrata accomodabilis et ad alias summas.
Febr. 1676

$$\frac{100}{1-y} \qquad y \sqcap \frac{1}{100}$$

$$\frac{\cancel{100}}{1-\dfrac{0}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\dfrac{1}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\dfrac{2}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\dfrac{3}{100}}$$

$$\frac{\cancel{100}}{100-0} \quad \frac{\cancel{100}}{100-1} \quad \frac{\cancel{100}}{100-2} \quad \frac{\cancel{100}}{100-3} \quad \text{etc.} \quad \frac{\cancel{100}}{100-99}$$

$$\frac{100}{100} \quad \frac{100}{99} \quad \frac{100}{98} \quad \frac{100}{97} \quad \text{etc.} \quad \frac{100}{1}$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{100}} \sqcap 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4} \text{ etc.}$$

18–732,6 Vgl. N. 54 S. 729 Z. 22 – S. 730 Z. 15.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{100}} & \sqcap & 1 & + & \dfrac{2}{100} & + & \dfrac{4}{100^2} & + & \dfrac{8}{100^3} & \bullet \\
\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{100}} & & 1 & & \dfrac{3}{100} & & \dfrac{9}{100^2} & & \dfrac{27}{100^3} & \bullet \\
\hline
\text{etc.} & & \bullet & & \bullet & & \text{etc.} & & \bullet & \bullet
\end{array}$$

$$\frac{100}{99} \qquad \frac{100}{99}+1 \qquad 1+\frac{1}{99} \qquad \frac{1}{100^5}+\frac{1}{100^7}+\frac{1}{100^9}$$

$$1+\frac{1}{99} \qquad 2+\frac{1}{99} \qquad 2$$

$$2+\frac{1}{99}$$

$$v \mathrel{\boxed{\scriptstyle P}} \frac{zc}{100^5}\,. \qquad v \mathrel{\boxed{\scriptstyle P}} \frac{zc}{100^5}+1.$$

$$\frac{v}{c} \sqcap \frac{z}{100^5} + e. \qquad \frac{v}{c} \mathrel{\boxed{\scriptstyle P}} \frac{z}{100^5}.\ \text{Ergo}\ \frac{v100^5}{c100^5} \mathrel{\boxed{\scriptstyle P}} \frac{zc}{c100^5}.$$

$$\frac{v}{c} \mathrel{\boxed{\scriptstyle P}} \frac{z}{100^5}+1. \qquad \frac{v100^5}{c100^5}[\mathrel{\boxed{\scriptstyle P}}]\frac{zc}{c100^5}+1.$$

[*Tschirnhaus mit Ergänzungen von Leibniz*]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$$

9 $\boxed{\scriptstyle P}$ *L ändert Hrsg.*

7–9 Vgl. N. 54 S. 725 Z. 11 – S. 726 Z. 5. — Die Bedeutung des Symbols $\boxed{\scriptstyle P}$ erklärt Leibniz S. 724 Z. 16, entsprechend steht $\boxed{\scriptstyle P}$ für „ein wenig kleiner“.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} &&& \\ && \frac{1}{1a} & + & \frac{2}{1a+(1)c} & + & \frac{1}{(1)c} && \\ & \frac{1}{1a} & + & \frac{3}{2a+(1)d} & + & \frac{3}{1a+(2)d} & + & \frac{1}{(1)d} & \\ \frac{1}{1a} & + & \frac{4}{3a+(1)e} & + & \frac{6}{3a+(3)e} & + & \frac{4}{1a+(3)e} & + & \frac{1}{(1)e} \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc} &&& 1 &&& \\ && 1 && 1 && \\ & 1 && 2 && 1 & \\ 1 && 3 && 3 && 1 \end{array}$$

Pulcherrima progressio numerorum progressionis harmonicae.

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & x+y & x+2y & \end{array}$$

$x \qquad x+y \qquad x+2y$ sed sic naturalius

$$\begin{array}{ccccc} \frac{a+[c]}{1} & a+b & & & \\ \frac{2a \mid a+c \mid 2c}{2} & 2a+2b & \frac{3a+3c}{2} & & \frac{3}{2} \\ \frac{3a \mid 2a+c \mid a+2c \mid 3c}{3} & 3a+3b & & & \\ \frac{4a \mid 3a+c \mid 2a+2c \mid a+3c \mid 4c}{4} & 4a+4b & \frac{10a+10c}{4} & \frac{5a+5c}{2} & \frac{5}{2} \end{array}$$

Modus progressionis arithmeticae exprimendae utilis ad inveniendas summas, et ideo naturalis, sic utraque litera adhibita eodem modo componitur.

Isoliert: $\frac{2ac}{a+c}$ *Am Rande, quer:* $\frac{0}{1}$

[*Leibniz, am unteren Rand und auf LH 35 XIII 1 Bl. 391 r°*]

$\frac{1}{y^2} \quad \frac{1}{1,-2y+y^2}$

1 f. *Obere zwei Zeilen des linken Schemas erg. L* 6 Pulcherrima ... harmonicae. *erg. L* 9 sed ... naturalius *erg. L* 10 b *T ändert Hrsg.* 14 f. Modus ... componitur *erg. L*

16 $\frac{2ac}{a+c}$: vgl. N. 54 S. 716 Z. 6 f.

56. EXPRESSIO QUANTITATIS PER SERIEM
[Ende April 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. 1/4 S. auf Bl. 10 r° oben. Auf dem Rest des Bogens N. 57_2.
Cc 2, Nr. 1399

Datierungsgründe: N. 56 ist vor dem auf Ende April datierten N. 57_2 geschrieben und dürfte unmittelbar vorher entstanden sein. Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Monate April bis Juli 1676 belegt.

Omnis quantitas exprimi potest hoc modo: $by^z + cy^\omega + dy^v$ etc. si opus est in infinitum. Ergo et curvae cuiuslibet ordinata eodem modo potest exprimi. Ergo summa omnium ordinatarum secundum omnes y. erit: $\dfrac{by^{z+1}}{z+1} + \dfrac{cy^{\omega+1}}{\omega+1} + \dfrac{dy^{v+1}}{v+1}$ etc. Si vero ordinata fuisset: $by^{z+\varphi} + cy^{\omega+\varphi} + dy^{v+\varphi}$ fuisset summa $\dfrac{by^{z+\varphi+1}}{z+\varphi+1} + \dfrac{cy^{\omega+\varphi+1}}{\omega+\varphi+1} + \dfrac{dy^{v+\varphi+1}}{v+\varphi+1}$. Ponamus iam potentias ipsarum y esse progressionis arithmeticae, ut $by^z \quad cy^{z+\omega} \quad dy^{z+2\omega}$ etc. erit summa: $\dfrac{by^{z+1}}{z+1} + \dfrac{cy^{z+\omega+1}}{z+\omega+1} + \dfrac{dy^{z+2\omega+1}}{z+2\omega+1}$. Si fuisset $by^{z+\varphi} + cy^{z+\omega+\varphi} + dy^{z+2\omega+\varphi}$ foret summa: $\dfrac{by^{z+\varphi+1}}{z+\varphi+1} + \dfrac{cy^{z+\omega+\varphi+1}}{z+\omega+\varphi+1} + \dfrac{dy^{z+2\omega+\varphi+1}}{z+2\omega+\varphi+1}$ sed difficile erit eruere rationem harum summarum, tametsi hoc unum forte generale dici possit, quod reductis omnibus ad communem denominatorem, si z et ω sint numeri integri, necesse est, nominatores, quippe factos numerorum progressionis arithmeticae habere quandam mensuram communem. Nisi forte in continua tantum, 7.9.11. non possunt dividi per 1.3.5. ergo necesse est esse continuos vel continuorum multiplos.

10 et *(1)* aequationis *(2)* curvae *L* 18 progressionis *(1)* geometricae *(2)* arithmeticae *L*

57. DE PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA

Die beiden Teilstücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang mit den Exzerpten aus Pietro Mengolis *Circolo*, 1672, die Leibniz vermutlich vor dem auf Ende April 1676 datierten Stück N. 57_2 angefertigt hat. Der erste Teil der Exzerpte (Cc 2, Nr. 1383 A) ist bisher nicht aufgefunden; erhalten sind der zweite Teil (Cc 2, Nr. 1383 B) und eine Beilage (Cc 2, Nr. 1384, Druck in einem späteren Band der Reihe). Die Notiz N. 57_1 verweist darauf, daß N. 57_2 bei den Exzerpten abgelegt war; sie ist auf Papier aus Hannoverscher Zeit geschrieben und möglicherweise anläßlich einer erneuten Auseinandersetzung mit dem Thema in *De cyclometria per interpolatione*, LH 35 II 1 Bl. 68–73, datiert 26. März 1679 (Druck in einem späteren Band der Reihe), entstanden.

57_1. PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA
[Ende 1676 – Ende März 1679]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 73. 1 Streifen ca 5,4 x 10,9 cm. Unten Rißkante. 15 Zeilen auf B. 73 r°. Bl. 73 v° leer.
Cc 2, Nr. 1403

Datierungsgründe: s. o. Z. 6–9.

Progressionis harmonicae summa

Hanc, vide inventam a me primum et ascriptam sub finem schediasmatis in fol. cui titulus: *Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adiecta.* Aprilis. 1676.

Hoc schediasma collocavi apud *Excerpta ex Mengoli Circulo*.

---

17 sub finem schediasmatis: s. u. N. 57_2 S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12. 20 *Excerpta ex Mengoli Circulo*: s. o. Z. 2–5.

57_2. ARITHMETICA INFINITORUM ET INTERPOLATIONUM
Ende April 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 9–10. Ca 3 S. Obere Hälfte von Bl. 9 r° u. unteres Viertel von Bl. 10 v° leer. Auf dem Rest des Bogens N. 56.
Cc 2, Nr. 1398, 1400, 1401

(Fine April. 1676)

Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adiecta

$$\begin{array}{r|l}
t & \\
a & r \\
a^2 \quad ar & r^2 \\
a^3 \quad a^2r & ar^2 \quad r^3 \\
a^4 \quad a^3r \quad a^2r^2 & ar^3 \quad r^4 \\
a^5 \quad a^4r \quad a^3r^2 & a^2r^3 \quad ar^4 \quad r^5
\end{array}$$

tab. I

$$\begin{array}{c}
1 \\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}
\end{array}$$

tab. II

15 *Zu* tab. I:
NB.
Nota pro ar. posset sumi $\frac{a}{r}$ item pro $r \sqcap 1-a$. sumi potest $a-1$. item pro $\sqrt{}$. sumi potest $\sqrt[3]{}$. $\sqrt[4]{}$. etc. denique praecedentium omnium reciprocae.

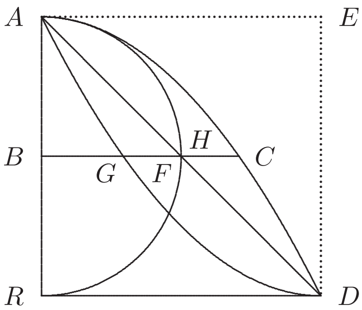
8 sub finem: S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12. 15 tab. I: vgl. P. MENGOLI, *Circolo*, 1672, § 10–15 S. 4–6 und die Quarta Tauola Triangolare S. 7; tab. II: *a. a. O.* § 9 S. 4.

1					
2	2				
3	6	3			
4	12	12	4		
5	20	30	20	5	
6	30	60	60	30	6

tab. III

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

tab. IV



[*Fig. 1*]

Sit trilineum $ARDCA$ duabus rectis $AR.\,RD$. et curva ACD. inclusum. Recta AR tota sit $\underline{t}$. Abscissa AB sit $\underline{a}$. Residua BR sit $\underline{r}$. Ordinata BC sit $\underline{y}$.

Si ponamus iam esse $y \sqcap t$. ut si pro figura $ARDCA$ erit quadratum $ARDE$. Si y sit $\sqcap$ a vel r, seu si ordinata BF sit $\sqcap$ AB. pro figura $ARDCA$, erit triangulum semiquadratum ARD. Sin $y \sqcap \dfrac{a^2}{t}$. vel posita $t \sqcap 1$. si $y \sqcap a^2 \sqcap BG$. pro figura $ARDCA$, erit $ARDGA$ trilineum parabolicum, et ita de caeteris altioribus, ut si y sit a^3, vel a^4. Si vero sit $y \sqcap ar$. seu si ordinatae BH sint ut rectangula ABR. erit figura $ARHA$ proportionalis elementis hemisphaerii atque ita omnes termini tabulae I. ordine per figuras poterunt exhiberi, quarum ordinatas exprimant.

16 ARDE. *(1)* et ACD linea, *(2)* Si *L* 23 proportionalis *(1)* plan *(2)* elementis *(a)* sphaerae *(b)* hemisphaerii *L*

7 tab. III: *a. a. O.* § 8 S. 3 f.; tab. IV: *a. a. O.* § 7 S. 3. 12 Recta *AR* . . . sit: *a. a. O.* § 10 f. S. 4 f.

Porro quoniam harum figurarum omnium quarum ordinatae tab. I. exhibentur, datae sunt quadraturae (sunt enim omnes ex genere paraboloeidum, quippe rationales integrae) ideo areas figurarum completarum seu summas omnium ordinatarum ab A. ad R. expressimus tab. II. Nempe omnes a. seu area ARD. est $\frac{1}{2}$ quadrati $ARDE$. Omnes a^2, seu area $ARDGA$, est $\frac{1}{3}$ eiusdem; et ita de caeteris.

Si iam fractiones hae invertendo in integros transmutentur fiet tabula III. quam patet factam ex tab. IV. numerorum combinatoriorum, serie parallela quavis in seriei numerum multiplicata, nam $1, \frown 1 \sqcap 1.$ $1, \frown 2$ $1, \frown 2 \sqcap 2.2.$ $1.2.1. \frown 3 \sqcap 3.6.3.$ etc.

Quoniam vero hoc modo reperiuntur tantum areae figurarum eiusmodi completarum; videndum est an non eodem modo et portiones quaelibet mensurari possint. Exempli causa: $BH \sqcap y \sqcap ar$. Est $r \sqcap t - a$. Ergo $y \sqcap at - a^2$ seu posita $t \sqcap 1$ erit $y \sqcap a - a^2$. Ergo $\overline{\text{summ}\, y} \sqcap \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \sqcap \frac{3a^2 - 2a^3}{6} \sqcap a^2, \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$. Eodem modo si sit $y \sqcap a^2 r$: fiet $y \sqcap a^2 - a^3$. et $\overline{\text{sum}\, y} \sqcap \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \sqcap \frac{4a^3 - 3a^4}{12}$. Unde brevius: $\int \overline{ar} \sqcap \frac{1}{2}a^2 r + \frac{1}{6}a^3 \sqcap \frac{1}{3}a^2 r + \frac{1}{6}a^2$. Et similiter: $\int \overline{a^2 r} \sqcap \frac{1}{3}a^3 r + \frac{1}{12}a^4 \sqcap \frac{1}{4}a^3 r + \frac{1}{12}a^3$. Eodem modo $\int \overline{a^2 r} \sqcap \frac{1}{5}a^4 r + \frac{1}{20}a^4$. Quaeramus et $a^3 r^2$. fiet $\sqcap a^3, 1 - 2a + a^2 \sqcap a^3 - 2a^4 + a^5$. et $\int \overline{a^3 r^2} \sqcap \frac{a^4}{4} - \frac{2a^5}{5} + \frac{a^6}{6} \sqcap [a^4], \frac{1}{4} + \frac{2a}{5} + \frac{1a^2}{6} \sqcap \frac{1, 30,, -2, 24a + 20a^2}{4, 5, 6}[a^4]$. Unde patet regula generalis, nempe[:] Ad habendam summam figurae, cuius ordinata sit verbi gratia, $a^3 r^2$. termini combinatorii valoris ipsius r^2. suis affecti potestatibus, ut $1. - 2a.\ 1a^2$. ducantur ordine in harmonicos, seu fractiones unitatem pro numeratore, arithmeticos continuos pro [denominatoribus] habentes; ita ut maximus denominator, sit [6.] (hoc loco), [unitate differat ab] exponentium potestatum a, et r. summa. Notandum

---

21–739,4 *Zusatz s. S. 746 Z. 3–8*

3 areas *(1)* integrarum *(2)* figurarum *L* 8 f. etc. *(1)* Quoniam ergo ad hunc velut fontem pervenimus, iam ad tab. I. redeamus *(a)*, in qua *(b)*. Eam vero deficientem esse patet et posse suppleri. Exempli causa si detur figura, cuius ordinatae sint $\sqrt{}$a. $\sqrt{}$a^3. etc. *(2)* Quoniam *L* 16 a^3 *L ändert Hrsg. zweimal* 19 ordine *erg. L* 20 numeratoribus *L ändert Hrsg.* 20 f. denominator, *(1)* unitate differat a *(2)* sit | 5. *ändert Hrsg.* | (hoc loco), | unitate ... ab *erg. Hrsg.* | exponentium *L*

autem est, si ponatur ultima $a \sqcap t \sqcap 1$. seu si de figurae completae summa agatur, tunc reductis omnibus fractionibus ad communem denominatorem semper fieri posse ut fractio non habeat nisi unitatem pro [numeratore], vel ideo quia in tabula II. id semper evenit: adeoque quoniam id semper evenire necesse est quomodocunque coniungantur, hinc poterimus ducere problema sane memorabile: scilicet si sint numeri combinatorii quicunque alternatim affirmati et negati ut $1 \mid -3 \mid +3 \mid -1$. et ducantur in totidem fractiones harmonicas simplices continuas, ut $\frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}. \frac{1}{7}$ ut fiat $\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7}$, reducta fractio ad communem denominatorem semper deprimi potest ut numeratorem habeat unitatem[:] $5,6,7 - 3,4,6,7 + 3,4,5,7 - 4,5,6$. Et pro integris $210 - 504 + 420 - 120 \sqcap 6$. Hoc poterit condi theorema memorabile, si in seriem plenam numerorum combinatoriorum, (ut 1. 11. 121. 1331. etc.) ducantur totidem numeri harmonici; alterutris alternatim affirmatis et negatis, factus erit productum totidem, uno minus, numerorum ordine deinceps ab unitate sumtorum, ut $1 \mid -2 \mid +1$ in $30 \mid 24 \mid 20$. dat $2 \sqcap 1,2$. $1 \mid -3 \mid +3 \mid -1$ in $210 \mid [168] \mid [140] \mid 120$. dat $6 \sqcap 1,2,3$.

Unde mirabilis etiam ducetur aequatio. Nempe: Si in seriem plenam numerorum combinatoriorum alternatim affirmatam et negatam, ducantur totidem harmonici quicunque, semper proveniet idem.

9–14 *Nebenrechnungen:*

210	42	28 }	$\sqcap$	14	30 24 20
	<u>12</u>	15 }		<u>30</u>	20
	84			420	
	<u>42</u>			<u>210</u>	
	504			630	
				$-$ <u>624</u>	
				6	

9–740,13 *Zusatz s. S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12*

3 denominatore *L ändert Hrsg.* 6 alternatim ... negati *erg. L* 8 semper *(1)* reduci *(2)* deprimi *L* 10 memorabile, *(1)* si numeri progressionis harmonicae, ducantur in seriem *(2)* si in seriem | plenam *erg.* | numerorum *L* 14 504 *L ändert Hrsg.* 14 420 *L ändert Hrsg.*

Et porro si series plena numerorum combinatoriorum, alternatim affirmatorum et negatorum in totidem differentias numerorum harmonicorum continuorum ordine sibi detractorum ducatur, factum aequabitur nihilo: ut si sumatur: 1 | − 2 |1. ducaturque in

$$\left.\begin{array}{ccc} -2,3 & -1,3 & -1,2 \\ \underline{+5,6} & \underline{+4,6} & \underline{+4,5} \\ 24 & 21 & 18 \end{array}\right\} \sqcap 24.21.18. \quad \text{Nam} \quad \left.\begin{array}{ccc} +24 & +21 & +18 \\ \underline{\quad 1} & \underline{-\ 2} & \underline{\quad 1} \\ 24 & -42 & 18 \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Hinc aequatio duas habens radices aequales per hos numeros, ut 24. 21. 18 multiplicata manet aequatio. Unde conicio hos productos differentiarum respondentium harmonicorum semper dare numeros progressionis arithmeticae. Et vicissim credibile est differentias eiusmodi quatuor harmonicorum, semper dare numeros triangulares. Ratio quia arithmetici in $1-2+1$ ducti faciunt 0. et triangulares in $1-3+3-1$ ducti faciunt 0. Quod inventum denique conducere videbitur ad harmonicorum ineundas summas, quo posito spes est etiam ad quadratorum summas aliqua arte posse veniri.

Sed nunc ad figurarum incompletarum seu portionum summas redeamus: Scilicet

$$\int \overline{a^3 r^2} \sqcap \frac{1,30 - 2,24a + 1,20a^2}{4,5,6}[a^4] \text{ sive}$$

$$1,\frac{5,6 - 2,4,5}{4,5,6},, - 2a\frac{4,6 - 4,5}{4,5,6},, + \frac{4,5}{4,5,6}r^2,,,[a^4].$$

Sed videtur reductio ad r esse inutilis, et sufficere, ut exprimamus per a. Tabulam ergo summarum ordinatarum tabulae I. seu arearum pro figuris incompletis pariter et completis condemus hanc:

2 differentias *(1)* nu *(2)* serier *(3)* numerorum *(a)* combinatoriorum *(b)* harmonicorum *L*
8 f. productos *(1)* harmonicorum in *(2)* differentiarum *(a)* divers *(b)* respondentium harmonicorum | in $+1-2+1$ ductos *gestr.* | semper *L* 10 eiusmodi *(1)* in 1 − 3 + 3 − 1 dare numeros *(2)* quatuor *L*
14 ad *(1)* nostrum *(2)* nostras su *(3)* figurarum *L* 15 f. a^3 *L ändert Hrsg. zweimal*

					$\frac{a}{1}$
				$\frac{a^2}{2}$	
			$\frac{a^3}{3}$		$a^2, \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$
		$\frac{a^4}{4}$		$a^3, \frac{1}{3} - \frac{a}{4}$	
	$\frac{a^5}{5}$		$a^4, \frac{1}{4} - \frac{a}{5}$		$a^3, \frac{1}{3} - \frac{2a}{4} + \frac{a^2}{5}$
$\frac{a^6}{6}$		$a^5, \frac{1}{5} - \frac{a}{6}$		$a^4, \frac{1}{4} - \frac{2a}{5} + \frac{a^2}{6}$	

tab. V.

					1
				a	
			a^2		$a, 1 - a$
		a^3		$a^2, 1 - a$	
	a^4		$a^3, 1 - a$		$a^2, 1 - 2a + a^2$
a^5		$a^4, 1 - a$		$a^3, 1 - 2a + a^2$	

tab. VI.

Nempe ex tabulae I. parte sinistra per lineam perpendicularem resecta, (omissa dextra, quae tantum repetitio foret sinistrae, quia quod de r, idem dici potest de a, et contra) facio tabulam VI. pro t ponendo 1, et pro r. ponendo eius valorem, ($t - a$, vel) $1 - a$. et tabula V. areas figurarum tabulae VI, completarum pariter et incompletarum ordine exhibebit.

Porro hactenus earum tantum figurarum tab. I. et VI. areas tab. II. et V. exhibuimus quae sunt rationales. Quoniam vero et irrationales plurimae ipsis affines sunt notae, eas quoque in unam cum his tabulam redigamus.

21 quae *(1)* sumtae *(2)* sunt *L*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\sqrt{1}&&&&&& \\
&&&&&\sqrt{a}&&\sqrt{r}&&&&& \\
&&&&\sqrt{a^2}&&\sqrt{ar}&&\sqrt{r^2}&&&& \\
&&&\sqrt{a^3}&&\sqrt{a^2r}&&\sqrt{ar^2}&&\sqrt{r^3}&&& \\
&&\sqrt{a^4}&&\sqrt{a^3r}&&\sqrt{a^2r^2}&&\sqrt{ar^3}&&\sqrt{r^4}&& \\
&\sqrt{a^5}&&\sqrt{a^4r}&&\sqrt{a^3r^2}&&\sqrt{a^2r^3}&&\sqrt{ar^4}&&\sqrt{r^5}& \\
\sqrt{a^6}&&\sqrt{a^5r}&&\sqrt{a^4r^2}&&\sqrt{a^3r^3}&&\sqrt{a^2r^4}&&\sqrt{ar^5}&&\sqrt{r^6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
&&&\frac{2}{2}&&& \\
&&*&&*&& \\
&\frac{2}{4}&&*&&\frac{2}{4}& \\
&*&*&&*&*& \\
\frac{2}{6}&&*&\frac{2}{12}&*&&\frac{2}{6} \\
&&*&&*&*&* \\
\frac{2}{8}&*&\frac{2}{24}&*&\frac{2}{24}&*&\frac{2}{8}
\end{array}$$

tab. VII. tab. VIII.

Tabula ergo I. interpolata habebimus tab. VII.: Cuius tabulae VII. termini extrahibiles reddunt tabulam I. Eodem modo tantum tabulae VI. terminis praefigi posset $\sqrt{\ }$. Huic tabulae VII. e regione ponamus tabulam VIII. quae areas figurarum completarum tabulae VII. contineat quae ex tab. II. iam habentur reliquis vacuis relictis: Cuius tabulae loca repleta coincidunt cum locis sive terminis tabulae II. Loca vero vacua ut suppleantur facilius operae pretium erit, quemadmodum tabula II. habet fontem, tabulam IV, ita tabulam VIII. reduci ad fontem, nempe tabulam IX, quae respondeat tabulae IV. ut tabula VIII. ipsi tabulae II. Quod ut fiat facilius, consideranda est ipsorum terminorum tabulae IV. origo. Constat autem aliunde numeros combinatorios fieri, hoc modo, nempe: Si consideres in ea series obliquas, erit prima $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. secunda vero $\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}$ tertia $\frac{1,2}{1,2}\ \frac{2,3}{1,2}\ \frac{3,4}{1,2}\ \frac{4,5}{1,2}$ etc. [quarta] $\frac{1,2,3}{1,2,3}\ \frac{2,3,4}{1,2,3}\ \frac{3,4,5}{1,2,3}\ \frac{4,5,6}{1,2,3}$ etc. Unde omnibus duplicatis ita stabit[:]

13 loca *(1)* notata *(2)* repleta *L* 17 f. nempe: *(1)* 1. 1. ex $\frac{1,1}{1}\ \frac{1,1}{1}$ | 1. 2. 1. *(2)* Si 18 $\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}$ ... tertia *erg. L* 19 tertia *L ändert Hrsg.*

8 tab. VII: *a. a. O.* § 16 u. die Quinta Tauola Triangolare S. 6–8; tab. VIII: *a. a. O.* § 18 S. 8.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{2}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \ast & & \ast & & & & & \\
 & & & & \frac{2}{2} & & \ast & & \frac{2}{2} & & & & \\
 & & & \ast & & \ast & & \ast & & \ast & & & \\
 & & \frac{2,4}{2,4} & & \ast & & \frac{4}{2} & & \ast & & \frac{2}{2} & & \\
 & \ast & & \ast & & \ast & & \ast & & \ast & & \ast & \\
\frac{2,4,6}{2,4,6} & & \ast & & \frac{4,6}{2,4} & & \ast & & \frac{6}{2} & & \ast & & \frac{2}{2}
\end{array}
$$

tab. IX.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{2}{2} & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & \Big| & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{2}{2} & \Big| & \ast & \Big| & \frac{2}{2} & & & & & \\
 & & & & 1 & \Big| & \frac{3}{2} & \Big| & \frac{3}{2} & \Big| & 1 & & & & \\
 & & & \frac{2,4}{2,4} & \Big| & \ast & \Big| & \frac{4}{2} & \Big| & \ast & \Big| & \frac{2}{2}\left(\frac{2,4}{2,4}\right) & & & \\
 & & 1 & \Big| & \frac{3,5}{2,4} & \Big| & \frac{5}{2} & \Big| & \frac{5}{2} & \Big| & \frac{3,5}{2,4} & \Big| & 1 & & \\
 & \frac{2,4,6}{2,4,6} & \Big| & \ast & \Big| & \frac{4,6}{2,4}\left(\frac{6}{2}\right) & \Big| & \ast & \Big| & \frac{4,6}{2,4}\left(\frac{6}{2}\right) & \Big| & \ast & \Big| & \frac{2}{2} & \\
1 & & \frac{3,5,7}{2,4,6} & & \frac{7}{2} & & \frac{5,7}{2,4} & & \frac{5,7}{2,4} & & \frac{7}{2} & & \frac{3,5,7}{2,4,6} & & 1
\end{array}
$$

tab. X.

Cuius tabulae IX. loca plena coincidunt cum locis tabulae IV. eoque modo expressa sunt, ut appareat interpolandi via et coepta interpolatione fiet tabula X. Ubi nota in tab. X. eandem fractionem aliquando bis expressam, pro duplici origine tum in loco in quo est, tum in reciproco.

8 tab. IX: *a. a. O.* § 21 S. 9. 17 tab. X: *a. a. O.* § 23 S. 9 f.

Denique ut loca vacua in tabulae X. serie transverse descendens in ordine secunda $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} * \frac{3,5,7}{2,4,6}$ etc. eiusque reciproca, item in serie transverse descendente in ordine quarta $1 * \frac{5}{2} * \frac{5,7}{2,4} *$ etc. eiusque reciproca, similiterque in caeteris parallelis, compleantur ideo in serie transverse descendente secunda $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} * \frac{3,5,7}{2,4,6} *$ considerandum terminos qui iam adsunt esse, 1^{mum} ad 3^{tium} ut 2 ad 3. seu ut 1 ad $\frac{3}{2}$. tertium ad quintum, ut 4 ad 5, seu ut $\frac{3}{2}$ ad $\frac{3,5}{2,4}$, quintum ad septimum ut 6 ad 7. Ut ergo omnes compleantur, numerorum sibi vicinorum rationes, quemadmodum fuit primus ad tertium ut 2 ad 3. ita facere necesse erit, a n t e - p r i m u m quendam imaginarium seu nullesimum (: nam nullesimus est ordinalis :), quem vocabimus c, ad secundum ut 1 ad 2 et secundum ad quartum, ut 3 ad 4. Tota ergo series interpolata ita stabit:

0	1	2	3	4	5	6	
c.	1.	$\frac{2}{1}c$.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{2,4}{1,3}c$.	$\frac{3,5}{2,4}$.	$\frac{2,4,6}{1,3,5}c$.	etc.

Iam quartus terminus huius seriei interpolatae, debet etiam esse primus sequentis interpolandae seu secundae transverse descendentis, quia ei ob reciprocam situationem aequipollet, ut ex tabulae X. inspectione patet. Ergo series quarta transverse descendens

---

743,21–744,1 *Zusatz zur Lesart s. S. 748 Z. 14–21*

743,21–744,1 reciproco. *(1)* Denique ut loca vacua in tabulae X. seriebus $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} *$ etc. et $1 * \frac{5}{2} * \frac{5,7}{2,4}$ etc. et parallelis earumque reciprocis, impleantur, ante 1. positam imaginando *(a)* b. ante $\frac{3}{2}$ ponemus $\frac{2}{1}$b. ante $\frac{3,5}{2,4}$ ponemus $\frac{2,4}{1,3}$b. *(b)* c. ante $\frac{3}{2}$ ponemus $\frac{2}{1}$ c. ante $\frac{3,5}{2,4}$ ponemus $\frac{2,4}{1,3}$ c. Similiter in altera serie pro $\frac{5}{2}$ interpolabitur $\frac{4}{1}$, pro $\frac{7}{4}$ fiet $\frac{6}{3}$ *(2)* Denique *L*   1 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L*   2 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L*   4 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L*   7 f. ad *(1)* secundum *(2)* tertium *L*   8 f. seu ... ordinalis :) *erg. L*   14 seu ... descendentis *erg. L*   15 series *(1)* secunda *(2)* quarta *L* interpolanda ita incipiet coepta interpolatione: $1 \quad \frac{2,4}{1,3}c \quad \frac{5}{2} \quad * \quad \frac{5,7}{2,4} \quad *$. Facile ergo compleri poterit, ut enim ex primo habeatur tertius, quintus, septimus, etc. faciendo 1^{mum} ad 3^{tium} ut 2 ad 5, tertium ad 5^{tum} ut 4 ad 7. 5^{tum} ad 7^{mum} ut 6 ad 9. Ita ex secundo habebuntur nullesimus[,] quartus, sextus, octavus etc. faciendo nullesimum ad 2^{dum}, ut 1 ad 4. secundum ad quartum, ut 3 ad 6. quartum ad sextum ut 5 ad 8. etc.

Et series haec transverse descendens quarta, ita stabit completa:

0	1	2	3	4	5	6

$\frac{2}{3}c. \quad 1. \quad \frac{2,4}{3,1}c. \quad \frac{5}{2}. \quad \frac{2,4,6}{3,1,3}c. \quad \frac{5,7}{2,4}.$ etc. sive pro $\frac{2}{3}c$ ponendo d. fiet d. 1. $\frac{4}{1}d.$ $\frac{5}{2}.$ $\frac{4,6}{1,3}d.$ $\frac{5,7}{2,4}.$ $\frac{4,6,8}{1,3,5}d.$ etc.

Sexta series transverse descendens $1 \quad * \quad \frac{7}{2}$ etc. eodem modo facile interpolabitur ex praecedentis, quia quartus praecedentis, et sextus antepraecedentis terminus coincidunt eius termino secundo. Ergo eius terminus secundus erit $\frac{4,6}{1,3}$. Porro in ea primus habetur ad tertium, ut 2 ad 7. tertius ad 5^{tum} ut 4 ad 9. 5^{tus} ad 7^{mum}, ut 6 ad 11. Eodem ergo modo erit nullesimus ad secundum, ut 1 ad 6. secundus ad quartum ut 3 ad 8. et ponendo nullesimum esse $e \sqcap \frac{4d}{3}$. erit series sexta transverse descendens interpolata: $e \quad 1 \quad \frac{6}{1}e \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6,8}{1,3}e \quad 7$.

1 coepta interpolatione *erg.* *L* 4 nullesimus *erg.* *L* 6 series *(1)* secunda *(2)* haec *L* 13 ad *(1)* secundum *(2)* tertium *L* 14 erit *(1)* secundus ad *(2)* nullesimus *L*

---

11 quartus praecedentis: Leibniz bezieht sich auf die 2., 4. und 6. Transversalfolge mit den zu interpolierenden Termen. Aus Symmetriegründen ist der 2. Term der 6. Folge gleich dem 6. Term der 2. Folge: $\frac{2,4,6}{1,3,5}c = \frac{4,6}{1,5}d$. Leibniz setzt ihn irrtümlich gleich dem 4. Term der 4. Folge $\frac{2,4,6}{3,1,3}c = \frac{4,6}{1,3}d$ und verfehlt so den Wert $e = \frac{4}{5}d$; die Formel für die 6. Folge ist aber korrekt.

[*Zusätze*]

[*Zu S. 738 Z. 21 – S. 739 Z. 4:*]

Videor tandem agnoscere rationem qua possit in toto pariter ac in singulis partibus haberi numerator simplex, erit ex. g. $a^3, \frac{1}{3} - \frac{2a}{4} + \frac{a^2}{5}$, si $a \sqcap 1$ dat $\frac{2}{3,4,5}$. Sed aliud remedium. Si ponamus esse r non $\sqcap 1 - a$ sed $\sqcap v - a$ ponendo v esse ultimam a; ipsa a semper variante; tunc enim ex. gr. r^4 erit $\sqcap v^4 - 4v^3a + 6v^2a^2 - 4va^3 + a^4$ et $\int \overline{r^4} \sqcap \frac{1v^5}{1} - \frac{4v^5}{2} + \frac{6v^5}{3} - \frac{4v^5}{4} + \frac{1v^5}{5}$. et $a^2r^2 \sqcap a^2, v^2 - 2va + a^2$. et $\int \overline{a^2r^2} \sqcap \frac{v^5}{3} - \left[\frac{2v^5}{4} + \frac{v^5}{5}\right] \sqcap \frac{2v^5}{3,4,5}$. et hoc iam pulcherrimum est maximique usus, si quid unquam, in geometria.

[*Zu S. 739 Z. 9 – S. 740 Z. 13:*]

$$\underbrace{\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}}\ \underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{cccccc} 6 & \underbrace{3 & 2} & 30 & 24 & 20 \\ & 12 & 8 & 6 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} +30 & +24 & +20 \\ -\ 6 & -\ 3 & -\ 2 \\ \hline 24 & 21 & 18 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 30 & 24 & 20 \\ \underline{12} & \underline{8} & \underline{6} \\ 18 & 16 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 12 & 8 & 6 \\ \underline{6} & \underline{3} & \underline{2} \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

Ergo differentiae eiusmodi semper arithmetici. Quid si inverso modo subtraha⟨mus⟩

$$\begin{array}{ccc} 30 & 24 & 20 \\ 2 & 3 & 6 \\ \hline 28 & 21 & 14 \end{array} \quad \text{sunt etiam arithmetici.}$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 24 & 12 & 8 & 6 & & & \\ & 60 & 40 & 30 & 24 & & \\ & & 120 & 90 & 72 & 60 & \end{array}$$

$1| - 3| + 3| - 1, \frown 24|12|8|6 \sqcap 24| - 36| + 24| - 6 \sqcap 6$

$1| - 3| + 3| - 1, \frown 60|40|30|24 \sqcap 60| - 120| + 90| - 24 \sqcap 6$

4 $\frac{2}{3,4,5}$. *(1)* et semper erit *(2)* Sed *L* 7 $\sqcap \frac{v^5}{3} - | \frac{v^5}{4} + \frac{v^5}{7}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{2v^5}{3,4,5}$. *L*

60	40	30	24
24	12	8	6
36	28	22	18
(18	14	11	9)
	4	3	2

Numeri 18. 14. 11. 9. a trigonalibus differunt octonario nam si auferas 8. fiet 10. 6. 3. 1. Hinc differentiae quinque harmonicorum redibunt ad pyramidales et plurium ad altiores. Hinc concluditur generaliter differentias has semper fore summabiles. Videamus iam an hinc duci possit [aliquid] ad summam seriei harmonicae, sit $\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}_{\odot}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6}$ $= ☽$

cuius seriei invenienda est summa.

$\frac{\odot}{6} \sqcap \frac{2,3,4,5+1,3,4,5+1,2,4,5\,[+1,2,3,5]\;+1,2,3,4}{1,2,3,4,5,6}$

et $☽ \sqcap \frac{3,4,5,6+2,4,5,6,+2,3,5,6\,[+2.3.4.6]\;+2,3,4,5}{1,2,3,4,5,6}$.

Iam $\frac{\odot}{6} - ☽$. haberi potest, differentiae enim respondentium ordine numeratorum dabunt numeros a pyramidalibus constanter differentes, adeoque summabiles. Ponamus ergo $\frac{\odot}{6}-$

746,18

(1) $\underbrace{\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$ 24 $\underbrace{12\ 8\ 6}$ 120 $\underbrace{40\ 30\ 24}$ 360 90 72 60

120	40	30	24
24	12	8	6
96	28	22	18
(48	14	11	9)
34	3	2	

120	40	30	24
6	8	12	24
114	32	18	0
82	14		

1 − 3 + 3 − 1   1| − 3| + 3| − 1| ⌢ 120|40|30|24| ⊓ 120| − 120| + 90| − 24| ⊓ 66 *(2)* $\frac{1}{1}$ *L*

48 − 42 + 33 − 9   9 aliquis *L ändert Hrsg.*   13 +1, 2, 3, 5 *erg. Hrsg.*   14 +2.3.4.6 *erg. Hrsg.*

16–748,1 $\frac{\odot}{6}$ − ☽ ⊓ *(1)* Ω *(2)* −Ω *(3)* Ω *L*

☽ $\sqcap \Omega$. Iam aliunde scimus esse $\odot -$ ☽ $\sqcap 1 - \frac{1}{6}$. Ergo ☽ $\sqcap \odot + \frac{1}{6} - 1$. Eadem ☽ $\sqcap \frac{\odot}{6}[-]\Omega$. Ergo $\frac{\odot}{6} - \Omega \sqcap \odot + \frac{1}{6} - 1$. Ergo $\odot[-]6\Omega \sqcap 6\odot + 1 - 6$. et $\frac{5 - 6\Omega}{[5]} \sqcap \odot \sqcap \frac{5}{6} - \Omega$. Tandem ergo viam reperimus per quam progressionis harmonicae numerorum reperiri potest summa. Habetur enim $\odot$ eodem modo et ☽.

Cum opus sit ad eam rem inventione numeri figurati altissimi gradus, v. g. ad inventionem summae pyramidalium opus est triangulo-triangularibus. Ergo ad summam numerorum harmonicorum quinque opus est triangulo-triangulari numero id est assurgente ad quadrato-quadratum. Et pro 100 harmonicis opus foret formula assurgente ad 99 gradus. Huic malo succurremus primum per logarithmos, nam quia numeri figurati fiunt ductu in se invicem continuorum hinc addemus tantum logarithmos numerorum continuorum: Imo datur compendium, inveniendi summas logarithmorum numerorum arithmetice crescentium, quo utemur.

[*Zur Lesart zu S. 743 Z. 21 – S. 744 Z. 1, nicht gestrichen:*]

Sed nondum video quomodo hinc appropinquationes pro partibus quoque, aut infinitae series, earumque reciprocae duci possint, cum non appareat, qualis in casu partium sit b. neque enim b. ad eandem potest attolli potentiam, neque enim in casu ubi $v \sqcap 1$ fieret b^5 aeq. b et ita in caeteris, neque tamen poterit credo pro b fieri: bv^4, vel bv^5 aliave. Imo forte poterit. Ut scilicet tota series horizontalis multiplicetur per v^5 vel per v^4. Sed nec hoc procedere arbitror, sequeretur enim omnes b, fore inter se, ut ipsas v. Quod non est. Forte aliquando hanc quoque difficultatem complanare licebit: Qua superata pulcherrimus interpolationum usus foret ad series.

1 ☽ $\sqcap \frac{\odot}{6}$ *(1)* $-$ *(2)* | + *L, ändert Hrsg.* | Ω *L* 2 $\odot$ *(1)* $-$ *(2)* | + *L, ändert Hrsg.* | 6Ω *L*
2 6 *L ändert Hrsg.*

58. QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI ET HYPERBOLAE
3. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 125. 1 Bl. 2°. 1 1/2 S. Datum und Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1412

3. Maii 1676.

Q u a d r a t u r a   a r i t h m e t i c a   c i r c u l i   e t   h y p e r b o l a e

[*Teil 1*]

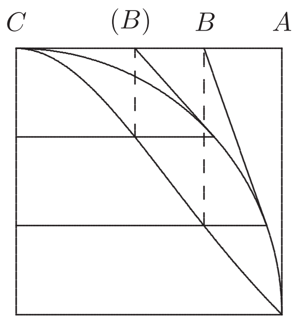
$x \sqcap \dfrac{y^2}{1+y^2} \sqcap y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + y^{10} - y^{12}$ etc. Ponamus $y \sqcap 1 - z$. fiet

$$
\begin{array}{lllll}
x \sqcap +1 & -1 & +1 & -1 & \text{etc. etc.} \\
\, -2z & +4z & -6z & +8z & \\
\, +1z^2 & -6z^2 & +15z^2 & -28z^2 & \\
 & +4z^3 & -20z^3 & +56z^3 & \\
 & -1z^4 & +15z^4 & -70z^4 & \\
 & & -6z^5 & +56z^5 & \\
 & & +1z^6 & -28z^6 & \\
 & & & +8z^7 & \\
 & & & -1z^8 &
\end{array}
\qquad
\text{vel}\, x \sqcap \left\{
\begin{array}{lrrl}
 & 0 & 0 & \text{etc.} \\
z, & +\,2 & 2 & \text{etc.} \\
z^2, & -\,5 & -\,13 & \\
z^3, & 4 & 36 & \\
 & -\,1 & -\,55 & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & &
\end{array}
\right.
$$

10 etc. etc. *(1)* Et *(2)* Et summando erit *(3)* vel *L*

~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~	1	~~1~~
1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	
~~1~~	3	~~6~~	10	~~15~~	21	~~28~~	36	~~45~~	55	~~66~~	78	~~91~~	105	~~120~~	136	
1	~~4~~	10	~~20~~	35	~~56~~	84	~~120~~	165	~~220~~	286	~~364~~	455	~~560~~	680	~~816~~	
1	5	15	35	70												
1	6	21	56	126												
1	7	28	84	210												
1	8	36	120	330												
1	9	45	165	495												
1	10	55	220	715												
1	11	66	286	1001												
1	12	78	364	1365												
1	13	91	455	1820												
1	14	105	560													
1	15	120														
1	16															
1																

$AC \sqcap 1.$
$AB \sqcap z.$
$CB \sqcap y.$



[*Fig. 1*]

21 *Fig. 1*: Die von Leibniz gezeichnete und hier wiedergegebene Figur entspricht nicht der Gleichung von S. 749 Z. 9, sondern $x = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$. Die Unstimmigkeit wirkt sich nicht weiter aus.

Porro assumto quodam numero infinito (numerus enim maximus omnino assumi non potest); poterit tam omnium z, quam omnium z^2, et z^3 etc. iniri summa, scilicet numerorum arithmeticorum secundas differentias aequales habentium, et tertias, et quartas etc. Talium enim numerorum ex dato ultimo, hoc loco infinito semper haberi poterit summa, adeoque habebitur expressio ipsius x ope potestatum tum a z tum a numero infinito; numerus autem infinitus non potest coincidere cum numero infinitesimarum ipsius z quia is variat, alia atque alia assumta z, nisi et infinitesimas proportione putes. Et hinc iam haberi potest modus analyticus expressiones eiusmodi, infinito numero utentes convertendi in alias in quibus nullus sit numerus infinitus. Nam quae numerum habent infinitum hoc modo, earum ne partes quidem tractabiles sunt. Si vero possemus fingere numerum infinitum constantem semper eundem esse cum infinitesimarum ipsius z numero; ipsas autem infinitesimas alias esse pro alia z arithmeticeque crescere, tunc numerus infinitus aequivalebit z, et pro eius quadrato scribi poterit z^2, et ita porro. Hoc si succedit pulchrum habebimus modum expressiones huiusmodi $y^2 - y^4 + y^6 - y^8$ etc. convertendi in alias. Ex quo plurima theoremata nova ducentur.

[*Teil 2*]

$y \sqcap b^l$. erit $l \sqcap \dfrac{y}{1} - \dfrac{y^2}{2b} + \dfrac{y^3}{3b^2} - \dfrac{y^4}{4b^3}$ etc. posito l. logarithmo. Porro $dl \sqcap \dfrac{b^2}{b+a}$. Unde in aequatione figurae logarithmicae $y \sqcap b^{\int \frac{b^2}{b+a}}$. nam $l \sqcap \int \dfrac{b^2}{b+a}$. Est autem a. quantitas variabilis, b. constans. $\int l \sqcap \dfrac{y^2}{1,2} - \dfrac{y^3}{2,3,b} + \dfrac{y^4}{3,4,b^2} - \dfrac{y^5}{4,5,b^3}$ etc.

Si generaliter indices serviunt ad quadraturas, ut a Wallisio ex inductione iudicari coeptum est, spes magna est posse omnes quadraturas exprimi ope talium serierum.

3 differentias *(1)*, aequales *(2)* nullas *(3)* arith *(4)* aequales *L* 10 f. fingere *(1)* alium numerum infinitum assumi *(2)* numerum *L* 19 f. etc. *(1)* Unde sequeretur posita y $\sqcap$ b. dari logarithmorum summa, adeoque et spatii eius. Si daretur *(a)* x $\sqcap \dfrac{e^3}{}$ *(b)* | $\varphi \sqcap \dfrac{e}{1} - \dfrac{e^3}{3b^2} + \dfrac{e^5}{5b^3} - \dfrac{e^7}{7b^5}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* Si *L*

20 Wallisio: *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478).

$x \sqcap y^z$. Ergo $z \sqcap \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2y} + \frac{x^3}{3y^2} - \frac{x^4}{4y^3}$ etc. Est aequatio ad paraboloeidem. Contra $x^{\frac{1}{z}} \sqcap y$. Ergo $\frac{1}{z} \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3}$ etc. et generaliter ex huiusmodi aequationibus extrahi potest radix, et inveniri valor ipsius y. vel x. ut patet. Nemo autem facile crederet talem aequationem esse ad paraboloeidem; forent ad hyperboloeidem, si v. g. pro x. ponatur $\frac{1}{x}$. aut pro y, $\frac{1}{y}$. Nec quisquam facile crederet: $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2y} + \frac{x^3}{3y^2} - \frac{x^4}{4y^3}$ etc. $\sqcap$ $\dfrac{1}{\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3} \text{ etc.}}$. Genus aequationis identicae mirabilis, identica autem est, quia nihil ex illa duci potest, semperque vera est, quaecunque sumantur x. et y. adeoque nihil novae determinationis assumitur, tali aequatione assumta. Et videndum an hinc sequatur idem esse verum, quomodocunque per saltus progrediamur. Videndum si dicamus e. g. $x \sqcap y^2 + cy + d$. an talis aequatio etiam sic exprimi possit, quasi logarithmo: $x \sqcap y^z$. Quod idem est ac: $\sqrt[2]{x + \frac{c^2}{4} - d} - \frac{c}{2} \sqcap y$. et fiet: $y^2 + cy + d \sqcap y^z$ vel $x \sqcap \overline{\sqrt[2]{x^2 + \frac{c^2}{4} - d} - \frac{c}{2}}^{\,z}$. Videndum saltem si sumatur esse: $x \sqcap y + d$. an posito $x \sqcap y^z$. et $y + d \sqcap y^z$. vel $x \sqcap \overline{x - d}^{\,z}$ possit z. quaeri instar logarithmi modo supra dicto. Quod dicere non ausim.

Experiundum calculo, an diversae hae inquirendi in ipsius z. valorem rationes consentiant. Item, quia z. debet considerari quasi certus quidam numerus ideo idem provenire debet sumtis quibuscunque x. et y. modo ponatur $x \sqcap y + d$.

Redeam ad superiorem aequationem: $\frac{1}{z} \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3}$ etc. Pro x. ponatur eius valor y^z, fiet: $\frac{y}{1} - \frac{y^{[2]-z}}{2} + \frac{y^{[3]-2z}}{3} + \frac{y^{[4]-3z}}{4}$ etc. $\sqcap \frac{1}{z}$. quae propositio semper vera esse debet, et identica, quaecunque sumatur y. et z. Nam si ex quadam aequatione ducatur alia, et ope unius aliqua tollatur litera ex alia, proveniens aequatio est identica.

---

18 *Nebenrechnung:* $y^{1-z} \sqcap \frac{1}{y^{z-1}}$

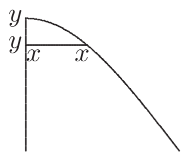
3 ut patet *erg. L* 14 f. consentiant. *(1)* Unde illa *(2)* Item *L* 18 1 *L ändert Hrsg. dreimal*

Et hoc est exemplum mirabilis cuiusdam summationis si z. per numerum explicetur. Videndum tamen, ne inde sequatur absurdum. Quo vitato pulchrae hinc consequentiae ducentur. Superest adhuc, ut alterutrum x. vel y. inveniamus pure ope z, exponente non nisi numeros continente.

[*Teil 3*]

$$x \sqcap y^2 - y^4 + y^6 - y^8$$

$$\int \overline{x} \sqcap \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} \text{ etc.}$$



[*Fig. 2*]

$$x \overset{(1)}{\sqcap} \frac{y^2}{1+y^2}. \quad \frac{y^2}{1+y^2} \overset{(2)}{\sqcap} y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + y^{10} - y^{12} \text{ etc.} \quad x + y^2x \overset{(3)}{\sqcap} y^2. \text{ seu}$$

$x \overset{(4)}{\sqcap} y^2 - y^2x$. et $y^2 \overset{(5)}{\sqcap} \dfrac{x}{1-x}$. Ergo pro aeq. 2. stabit

$$\frac{y^2}{1+y^2} \overset{(6)}{\sqcap} \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc.}$$

Unde ut obiter patet aequationem hanc

$$x \overset{(7)}{\sqcap} \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc.}$$

esse identicam quodammodo cum non possit esse determinata.

$$x \sqcap \frac{\dfrac{x}{1-x}}{1+\dfrac{x}{1-x}} \sqcap \frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1-x+x}{1-x}} \sqcap x.$$

$$y \sqcap \sqrt{\frac{x}{1-x}} \sqcap \sqrt{\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc.} \smile 1-x} \sqcap$$

12 Unde ... hanc *erg. L* 14 f. esse ... $\sqcap$ x *erg. L*

8 *Fig. 2*: Die Merkfigur gibt nicht die Kurve $x \sqcap \dfrac{y^2}{1+y^2}$ wieder.

$\dfrac{\sqrt{x - \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{x^3}{1-2x+x^2}\ \text{etc.}}}{1-x}$. Habetur autem summa omnium y aliunde ergo et summa haberi potest infinitarum. $\overline{\int\sqrt{x - \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{x^3}{1-2x+x^2}\ \text{etc.}}\ \smile 1-x}$. Novum ergo habemus hic exemplum summae infinitae.

arcus $\sqcap \dfrac{t}{1} - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^7}{7}$ etc. $\sqcap \int \overline{1 - t^2 + t^4 - t^6\,\text{etc.}}$ Ergo $\overline{d\,\mathrm{arc}} \sqcap 1 - t^2 + t^4 - t^6 \sqcap \dfrac{1}{1+t}$ et $t \sqcap \dfrac{1 - \overline{d\,\mathrm{arc}}}{\overline{d\,\mathrm{arc}}}$. arc $\sqcap \int \dfrac{1}{1+t}$. Ergo $\int \dfrac{1}{1+t} \sqcap \dfrac{1 - \overline{d\,\mathrm{arc}}}{\overline{d\,\mathrm{arc}}} - \dfrac{\overline{1 - \overline{d\,\mathrm{arc}}}\boxed{3}}{\overline{d\,\mathrm{arc}}^3} + \dfrac{\overline{1 - \overline{d\,\mathrm{arc}}}\boxed{5}}{\overline{d\,\mathrm{arc}}^5}$.

Idem est 2^z, $\boxed{2}$, et 4^z. Iam $2^z\,\boxed{2} \sqcap 2^{2z}$ ergo $4^z \sqcap 2^{2z}$. Et generaliter erit $bb^z \sqcap b^{2z}$ et $b, b^z \sqcap b^{z+1}$. Ex his variae haberi poterunt expressiones per infinitas series eodem redeuntes.

5 f. $+\dfrac{\overline{1 - \overline{d\,\mathrm{arc}}}\boxed{5}}{\overline{d\,\mathrm{arc}}^5}$. | $\sqcap \dfrac{1}{d\,\mathrm{arc}} - \dfrac{1}{\overline{d\,\mathrm{arc}}^3} + \dfrac{1}{\overline{d\,\mathrm{arc}}^5}$ *gestr.* |. Idem *L*

4 $\sqcap \dfrac{1}{1+t}$: Richtig wäre $\dfrac{1}{1+t^2}$; der Fehler beeinträchtigt die folgende Zeile, in deren abschließender Gleichung eine weitere Unstimmigkeit hinzukommt.

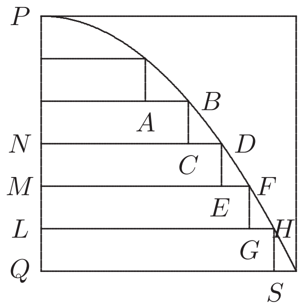
59. DE SUMMA SERIEI IN QUA NUMERATORES ARITHMETICI, NOMINATORES GEOMETRICI
24. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 1. 1 Zettel ca. 21,2 x 6,6 cm. 1 S. auf Bl. 1 r°. Unterkante geschwungen, Überschrift ergänzt. — Auf der Rückseite Fragment einer durch Zerschneiden verworfenen Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus. Druck in einem späteren Band der Reihe.
Cc 2, Nr. 1425 tlw.

24. Maii 1676.

Summa seriei in qua numeratores arithmetici, nominatores geometrici

Invenire summam seriei $\frac{1}{1}\quad\frac{2}{2}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{8}\quad\frac{5}{16}$ etc.



[*Fig. 1*]

13 *Fig. 1*: Leibniz verdeutlicht seine Überlegungen zur Summierung der Reihe anhand der Treppenfigur unter dem Kurvenbogen. Aus dem Text ergäbe sich eine Exponentialkurve. Leibniz zeichnet einen für ein allgemeines Kurvenstück stehenden Parabelbogen. Die zwei oberen Stufen der Treppenfigur hat Leibniz nachträglich ergänzt. Der Punkt *P* tritt daher im Text sowohl auf der Höhe von *B* wie als Endpunkt der Kurve auf.

Sint GH. EF. CD. AB. ipsae $\left\{\begin{array}{lllll} GH & EF & CD & AB & \text{etc.} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{array}\right.$ etc. earum summa HL.

Summae $\left\{\begin{array}{lllll} 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ HL & FM & DN & \text{etc.} & \end{array}\right.$ etc. summa summarum 4.

Ergo spatium $PLHBP \sqcap 4$. si $QL \sqcap LM \sqcap MN \sqcap NP$.

Sit $GH \sqcap LQ \sqcap LM$ etc. $\sqcap FM \sqcap 1$. et totum spatium $PQSHBP$ erit $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{16}$ etc. ipsae scilicet ductae $GH \sqcap 1$ in $[LQ] \sqcap 1$ et $EF \sqcap \frac{1}{2}$ in $MQ \sqcap 2$. et $CD \sqcap \frac{1}{4}$ in $NQ \sqcap 3$. etc.

At vero hoc idem spatium est, $PLHBP$ seu 4, $+LQSH \sqcap 2$. Ergo $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}$ etc. $\sqcap 6$.

3 PLHBP $\sqcap$ 4 *(1)* Si *(2)* Idem spatium componatur ductu ipsarum G *(3)* si *L* 5 LH *L ändert Hrsg.*

3 spatium $PLHBP$: Leibniz übersieht, daß die Ordinate LH allein nichts zur Fläche der Treppenfigur $PLGBP = 2$ hinzufügt, und stellt so in der Folge einen vermeintlichen Widerspruch fest.

60. SERIES CONVERGENTES SEU SUBSTITUTRICES
26. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 346–347. Bl. 346 ein Bl. 4°. 1 1/2 S. Bl. 346a ein Zettel ca 17,5 x 10 cm. Auf Bl. 346a r° 2 Zeilen quer geschrieben. Bl. 346a v° leer. Bl. 347 ca 1/3 Bl. 4°. Oberkante schräg abgeschnitten. 2 S. Textfolge Bl. 346 r° oben, 347 v°, 347 r°, 346 r° unten, 346 v° tlw. durch Kustoden gesichert. Datum und erste Überschrift auf Bl. 347 v° oben ergänzt. Zweite Überschrift auf Bl. 346a. Bl. 346a ursprünglich mit Siegellack an Bl. 346 und an Bl. 347 befestigt.
Cc 2, Nr. 1453

26 Iunii 1676

S e r i e s c o n v e r g e n t e s seu s u b s t i t u t r i c e s

S e r i e s c o n v e r g e n t e s et modus per illas inquirendi in aream ope numeri laterum polygoni

Aequatio inveniri potest, exprimens circuli magnitudinem, eaque valde simplex. In eam ingreditur numerus n. progressionis geometricae duplae quilibet: 1. 2. 4. 8. 16. etc. et tanto erit exactior, quanto hic numerus maior.

Hinc admiranda ducentur pro sectione anguli et trigonometria. Item pro aliis curvis et quadraturis omnibus.

---

11 *Darunter*: Adde huc Greg. a S. Vincentio de polygonis [regularibus] figurae inscribendis methodum generalem quae portiones aequales abscindant. Videndum an et fieri possint eiusmodi quae arcus aequales abscindant.

12 in *(1)* summas *(2)* summam *(3)* aream *L* 13 numeri *(1)* polygonorum *(2)* laterum *L* 14 exprimens *(1)* naturam circuli, *(2)* circuli *L* 15 n. *(1)* Erit valor *(2)* progressionis *L* 19 regularis *L ändert Hrsg.*

---

19 Greg. a S. Vincentio: vgl. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch IV, prop. CXCIX u. CC, S. 349 f.; Buch V, prop. CCLXXXVII, S. 489; Buch VI, prop. CVI, S. 585 [Marg.]. — Saint-Vincent bezeichnet einer Figur einbeschriebene Polygone als regulär, wenn die Seiten (abgesehen von der Basis) gleiche Segmente abschneiden.

Forte aliquando tolli poterit numerus n; et tunc id procedet pro illis scilicet curvis, in quibus dimensio in potestate.

Quaeritur an inter modos quibus quid eodem modo ex quibusdam quantitatibus componitur quo ex aliis, ut ex $a.b.$ quo ex a^2+b^2. sit etiam inventio maximi et minimi, sed non puto.

Absolvimus tandem et impossibilitatis demonstrationem in circuli quadratura.

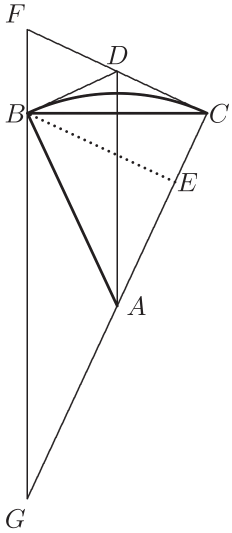
Si datur formula eadem operatione proveniens ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. datur sectoris cuiuslibet quadratura per demonstrata a Iac. Gregorio. Ergo hinc dabitur regula generalis inveniendi sectorem ex datis a. b. triangulo inscripto et trapezio circumscripto huius formulae interventu expressa: at regula generalis huiusmodi est impossibilis, ut demonstravi de circulo, et ad ellipsin atque hyperbolam applicari potest; ergo formula eadem operatione proveniens ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. est impossibilis, formula, inquam, analytica finita. Hinc iam demonstro novis plane artibus, ipsam sectoris circularis (eodemque modo elliptici et hyperbolici) impossibilem esse quadraturam. Nimirum quemadmodum Iac. Gregorius hoc problema solvit: ex data formula eadem operatione proveniente, invenire sectoris aream: ita ego contra: ex data sectoris area invenire formulam eadem operatione provenientem. Nam ut res concepta est a Gregorio in eo fuit eius

6 f. quadratura. *(1)* Sector eodem modo componitur ex a. b. quo quaeri *(2)* Si *L* 7 datur *(1)* quantit *(2)* formula *L* 7 f. datur *(1)* circu *(2)* sectoris *L* 8 quadratura | per demonstrata a Iac. Gregorio. *(1)* Hinc per *(2)* Ergo hinc *erg.* | dabiturque *ändert Hrsg.* | regula *L* 11 de ... potest *erg. L* 13 f. sectoris *(1)* illius *(2)* circularis *L* 15 Iac. *erg. L* 16 f. formulam *(1)* eodem modo compositam *(2)* eadem *L*

---

7 $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$: Richtig wäre $\dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; Leibniz verwendet den falschen Wert bis S. 761 Z. 5 sowie in N. 64 S. 800 Z. 15–18. 8 demonstrata a Iac. Gregorio: Vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Scholium nach prop. V, S. 15 f. 11 demonstravi de circulo: Vgl. Cc 2, Nr. 1102, zweite propositio und *LQK*, prop. LI, S. 128. 15 quemadmodum Iac. Gregorius ... solvit: s. o. Erläuterung zu Z. 8, hier Prop. XI, S. 25–28 [Marg.].

demonstratio imperfecta; et neque Hugenium neque alios convincere potuit. Aliud est enim de quantitatibus aliud de formulis loqui: et potest quantitas eodem modo componi ex diversis, verbi gratia possibile est fortasse aliquam reperiri operationem, per quam eodem modo proveniat numerus 3 ex 4 et 6 quo ex 9 et 13, sed quis illam divinabit. Imo videtur nullus numerus esse, qui non forte eodem modo ex duobus paribus aliorum provenire possit, saltem per analyses quasdam transcendentes. Re igitur altius repetita, deprehendi, si sit quantitas aliqua a duabus dependens, sive iis determinatis determinata, sive ex illis datis calculabilis; posse formulam analyticam exprimi, qua ex iis componatur, eamque non variam vagamque sed certam constantem et unicam.



[*Fig. 1*]

1 potuit *(1)*, ut si numerus 3 *(a)* eodem mo *(b)* eadem oper *(2)*. Aliud *L* 6 igitur *(1)* profundius *(2)* altius *L*

1 neque Hugenium neque alios: Zum Streit vgl. *GT*, S. 51–53 und C. J. Scriba, *Gregory's converging double sequence*, 1983. Mit alios dürfte Leibniz neben Wallis auch sich selbst gemeint haben; vgl. Cc 2, Nr. 1102 Scholium zur zweiten propositio. — Den Zeitgenossen zugänglich waren die Rezensionen in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 33 vom 16./26. März 1667/1668 S. 640–644 und im *Journal des Sçavans* vom 2. Juli 1668 S. 361–368, die Stellungnahme von Huygens, *a. a. O.* vom 12. November 1668 S. 437–444, von Gregory in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 37 vom 13./23. Juli 1668 S. 732–735 und Nr. 44 vom 15./25. Februar 1668/1669 S. 882–886 sowie in den *Exercitationes Geometricae*, 1668, Praefatio u. S. 1–8 [Marg.].

Sit ergo reperta quantitas aequalis sectori, seu sectoris alicuius quadratura, ea utique determina⟨ta⟩ erit lineis quibus sector determinatur, ut radio et sinu, vel radio et chorda; vel radio et sagitta vel tangente quae omnia eodem recidunt. Ponatur esse determinata radio et tangente semiarcus seu circumscripta sive inscripta, erit exprimibilis eius valor per formulam (vel aequationem,) quam non alia ingreditur litera, quam r. et t. Sit illa aequatio verbi gratia z (sector) $\sqcap r^2 + bt^2 + frt + hr$. ubi duae tantum literae r. et t. at b. f. h. numeri qualescunque. Notabilis haec distinctio literarum lineas significantium a literis numeros significantibus.

Porro trapezium circumscriptum $ABDC$ aequatur radio in DC, quia angulus ACD rectus ergo erit rt. Ex data t. ipsa CE, est $x \sqcap \dfrac{2rt^2}{r^2+t^2}$. Sit G oppositum diametri punctum et GBF ducatur, erit $CF \sqcap 2t$. et $GC \sqcap 2r$. et $EG \sqcap 2r - x \sqcap 2r - \dfrac{2rt^2}{r^2+t^2} \sqcap \dfrac{2r^3}{r^2+t^2}$. et fiet: FC ad CG, seu DC ad AC, seu t. ad r. ut BE ad EG, seu ut BE ad $\dfrac{2r^3}{r^2+t^2}$. Ergo $BE \sqcap \dfrac{2r^2t}{r^2+t^2}$. Ergo triangulum $ABC \sqcap \dfrac{BE \frown r}{2}$. seu $\dfrac{r^3t}{r^2+t^2}$. Quemadmodum trapezium circumscriptum rt. sit $rt \sqcap b$. et $\dfrac{r^3t}{r^2+t^2} \sqcap a$. Nempe a. triangulum, b. trapezium; erit $a \sqcap \dfrac{br^2}{r^2+t^2}$. Ope harum duarum aequationum quaeramus r. et t. ex a. et b. quod fieri posse patet. Erit $t \sqcap \dfrac{b}{r}$. et $a \sqcap \dfrac{br^2}{r^2 + \dfrac{b^2}{r^2}} \sqcap \dfrac{br^4}{r^4+b^2}$. et reducendo: $r^4a + b^2a \sqcap br^4$. et $r^4 \sqcap \dfrac{b^2a}{b-a}$. sive $r \sqcap \sqrt[4]{\dfrac{b^2a}{b-a}}$. adeoque $t \sqcap b\sqrt[4]{\dfrac{b-a}{b^2a}}$. Quoniam ergo ex datis a. b. reperimus r. t. et ex datis r. t. calculo habuimus quantitatem sectoris ex hypothesi, habebimus etiam ex datis a. b. Ergo formulam habebimus analyticam eodem modo productam ex a. b. quo ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Sed iam video non hinc sequi, quod eadem formula serviat pro

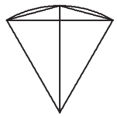
3 vel tangente *erg.* *L* 4 et *(1)* chorda *(2)* tangente *L* 8 f. significantibus. *(1)* Porro triangulum aequatur radio *(2)* Porro *L* 19 modo *(1)* compositam *(2)* productam *L* 20 $\dfrac{2\mathrm{ab}}{\mathrm{a}+\sqrt{\mathrm{ab}}}$. *(1)* Iam si formula ista sit pure analytica. *(2)* Sed *L*

quolibet alio sectore. Imo iam video id hinc sequi. Sufficit enim nos generaliter habere formulam eodem modo productam ex a. et b. quo ex duabus sequentibus, qualis ista est quam reperimus. Ut exacta sit ratiocinatio nostra. Reperta vel data area sectoris habetur valor eius expressus formula non continente alias literas quam a. b. ut ostendi. Duo sequentia polygona sint c ($\sqcap \sqrt{ab}$) et d ($\sqcap \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$). Poterit ex c. et d. etiam calculo reperiri idem sector quia similiter determinata omnia: eadem plane calculandi methodo. Quaeritur ergo, si ponamus v. g. esse sectorem $a^2 + b^2 + ma + nb$. an necesse sit idem provenire, si substituatur c. d. in locum a. b. Sed iam video id non esse necesse, nisi sciam quomodo isti numeri m. n. sint deducti, seu inventi. Itaque si quis mihi exhibeat quadraturam sectoris, non potero eum hac methodo refutare. Video tamen remedium. Demonstrabitur scilicet, me saltem eum refutare posse, si sciam quomodo inventa sit quadratura, seu posse demonstrare, quod impossibile sit, ut sciam quomodo sit inventa; tunc enim ubi id apparebit, nullo modo isti numeri particulares intrabunt, ita ut in iis ullo modo lateat virtualiter a. et b. Quod si ergo in iis nullo modo latet iam a. et b. tunc verum erit me in locum a. et b. substituere posse c. et d. et erit formula eodem modo producta, inventa. Eadem autem formula semel reperta serviet mihi pro aliis omnibus sectoribus quod demonstratum est esse absurdum.

Caeterum una adhuc est difficultas: Possitne fieri ut formula reperiatur eodem modo composita ex polygonis duobus, et tamen ex ea data non possit reperiri sector. Ut si formula ista non possit accomodari ad casum aequalitatis. Quemadmodum reperi radium esse quantitatem eodem modo compositam ex quolibet trapezio cum suo triangulo, ergo est enim $r \sqcap \sqrt[4]{\dfrac{b^2a}{b-a}}$. posito trapezio b. triangulo a. Sed si novissime ea sint aequalia, et infinite parva, patet mira ratione omnia evanescere. Unde tamen forte deberet duci lux ⟨quaedam⟩ analytica. Et vero hinc incidit mihi in mentem an non et calculo inveniri possit radium e s s e e o d e m m o d o compositum ex polygonis inscripto et circumscripto quolibet: Quod ita indagabimus: Sumamus generaliter polygonum quodlibet regulare inscriptum, et circumscriptum. Unumquodque eorum determinatum est ex suo ambitu, et fulcro. Quae omnia ad duas reduci possunt literas, quod quidem ea faciendum est

8 a. b. *(1)* Sed . . . necesse, quia isti numeri *(2)* Sed *L* 9 deducti, *(1)* ex *(2)* seu *L* 13 intrabunt, *(1)* neque in *(2)* ita *L* 25 ex *(1)* polygono inscripto sumto *(2)* polygonis *L* 28 et | radio *gestr.* | vel *streicht Hrsg.* | fulcro *L* 28 literas, *(1)* radium, et alium. *(2)* quod *L*

arte, ut non ingrediatur numerus laterum polygoni, et ut nihilo minus possit area eius ex eiusmodi literis haberi, ut si sumamus ambitum non vero fulcrum.



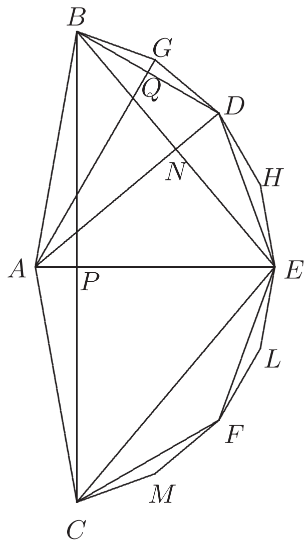
[*Fig. 2*]

Ut regula quaedam facienda inveniendi aream polygoni ex ambitu in proxime inferiorem ambitum, aliaque id genus. Denique res ita instituenda, ut ex dato polygono inscripto et circumscripto, nulla mentione numeri laterum generaliter inveniri possit radius circuli. Est autem res determinata, quia in eodem circulo, non possunt duo esse polygona inscriptum et circumscriptum eodem modo. Res ita instituetur: Sunto polygona duo unum inscriptum a. alterum circumscriptum b. Ex iis quaeritur radius. Ponatur numerus laterum esse n. radius r. tangens semiarcus, seu circumscripta t. Hinc caetera calculare licebit. Scilicet hinc calculabimus aream polygoni inscripti, pariter et circumscripti, verum ita duas tantum habebimus aequationes, cum opus sit tribus, unum ergo adiciendum est, ut exempli causa quantitas primi trianguli vel trapezii in ordine ad radium; ita duae tantum erunt incognitae, numerus laterum et radius. Verum sciendum est generaliter ex numero laterum et primo polygono quodlibet sequens non eodem modo posse componi, nisi per logarithmos, seu per expressionem transcendentem. Itaque non nisi per expressionem aliquam transcendentem radius inveniri potest ex datis a. b. quibuslibet posito primo dato. Qualiscunque sit, inveniatur. Nimirum numero invento per aequationem, tollatur ille, quoniam duae sunt aequationes duaeque incognitae, donec tandem sit aequatio in qua sola $\underline{r}$. incognita expressa ope $\underline{a}$. $\underline{b}$. Ponendo iam inverso modo r. cognitam, sed a. b. aequales et incognitas, eius ope invenientur a. vel b. inter se aequales seu sector. Hoc pulcherrimum. Habemus ergo $\underline{r}$. quantitatem eodem modo compositam ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. sed non ideo formulam quae non sit transcendens. Caeterum eligi possunt

4 in *(1)* fulcra *(2)* proxime *L* 8 instituetur: *(1)* Sumatur *(2)* Sunto *L* 10 n. *(1)* Hinc habebitur *(2)* radius r. *(a)* fulcr *(b)* tangens *L* 13 quantitas *(1)* omnium *(2)* primi *L* 17 datis *(1)* a. b. (supposito *(2)* a. b. *L* 18 inveniatur *(1)*; eadem aequatio dabit quaesitum sectorem ⟨prae⟩ *(2)*. Nimirum *L* 22 ergo $\underline{r}$. *erg. L*

modi convergendi, ut res fiat quam simplicissima, et ad solos si placeat logarithmos redeat, ut scilicet inveniendae sint tantum mediae proportionales. Numerus infinitus, n. eliminatus erit.

Hinc ergo apparet subtilissimum licet Gregorium rem non recte satis percepisse, quod quantitatem formulae confudit. Scilicet credidit data quantitate haberi formulam. At ego ipsi quantitatem dabo eodem modo compositam. Quae quantitas est radius. Sed nihil inde. Aliud videndum an non ex datis $\underbrace{a.\ b.}$ $\underbrace{c.\ d.}$ seu duobus proximis polygonorum paribus inveniri possit radius. Hoc fieri poterit sine istis logarithmis. Hinc si habeamus modum generalem quo radius componitur ex duobus paribus, quo ex duobus aliis paribus: at hinc etiam poterit inveniri sectoris area. Nam in ultimis omnia quatuor a se non differunt. Eodem modo sufficit ex tribus polygonis inscriptis tantum inveniri radium. Nec opus est seriebus convergentibus ullo modo.



[*Fig. 3*]

7 seu *(1)* polygonis inscripto et circumscripto vicinis sibi, ut *(2)* duobus *L*

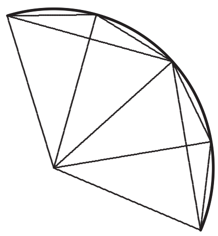
4 Gregorium: s. o. Erl. zu S. 758 Z. 15 und S. 759 Z. 1.

Arcui BEC inscriptum triangulum ABC. Quadrangulum $ABEC \sqcap a^2$. Sexangulum $ABDEFC \sqcap b^2$ etc. ($\underbrace{2+1}_{3}$ $\underbrace{2+2}_{4}$ $\underbrace{2+4}_{6}$ $\underbrace{2+8}_{10}$ $\underbrace{2+16}_{18}$). Decangulum [$ABGDHELFMC$] $\sqcap c^2$.

Triangulum ABD aequale $\dfrac{AD \text{ radio}}{2}$ in BN semichordam praecedentis polygoni. Ergo ipsum $ABDE$ aequale radio in BN et $ABDEFC$, aequale radio in chordam polygoni praecedentis. Et generalis ex his oritur regula, polygonum sequens aequari radio in dimidium ambitum polygoni praecedentis. Sit polygonum $ABEC$ [$\sqcap$] a^2. Dividatur per radium r. fiet $\dfrac{a^2}{r}$. polygoni praecedentis ambitus dimidius (ambitus demtis duobus radiis), BP. Ergo $\dfrac{2a^2}{r}$. eius ambitus $\sqcap$ BC. Sit polygoni praecedentis numerus laterum n. Dividendo per n. fiet $\dfrac{2a^2}{rn}$. latus unum polygoni praecedentis ut BC, et BP eius [semichorda] erit $\dfrac{a^2}{nr}$. Iam ex data BP investigemus BN. Ipsam BP vocemus π. et AB vocemus r. Erit $AP \sqcap \sqrt{r^2-\pi^2}$. et $PE \sqcap r - \sqrt{r^2-\pi^2}$. cuius quadr. additum ad quad. π. dabit quad. BE. Ergo $r^2 - 2r\sqrt{r^2-\pi^2} + r^2 \quad - \pi^2 + \pi^2 \sqcap \overline{BE}^2$. et $BN \sqcap \dfrac{\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2-\pi^2}}}{2}$. $\sqcap \sqrt{\dfrac{r^2 - r\sqrt{r^2-\pi^2}}{2}}$. et pro π. ponendo eius valorem $\dfrac{a^2}{nr}$. fiet $BN \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2 - r\sqrt{r^2 - \dfrac{a^4}{n^2r^2}}}{2}}$. $BN \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2 - \dfrac{1}{n}\sqrt{r^4n^2 - a^4}}{2}}$. Hinc iam polygoni

1 a^2. *(1)* Hexangulu *(2)* Sexangulum *L* 2–4 Decangulum | ABGDHELFM *ändert Hrsg.*| $\sqcap$ c^2. *(1)* Triangulum elementare voco *(a)*, cuius ⟨multi⟩ *(b)* id ex quorum pluribus similibus et aequalibus in circulo polygonum componitur; ut triangulum ABE pro quadrangulo, ABD pro sexangulo ABG pro decangulo. *(aa)* Polygonum *(bb)* Triangulum *(aaa)* sequens *(bbb)* elementare aequatur *(2)* Triangulum *L* 7 $\sqcap$ *erg. Hrsg.* 8 f. (ambitus ... radiis) *erg. L* 9 polygoni *(1)* a^2 *(2)* praecedentis *L* 11 chorda *L ändert Hrsg.* 12 Erit *(1)* NP $\sqcap \sqrt{\mathrm{r}^2-\pi^2}$. et DN $\sqcap \mathrm{r} - \sqrt{\mathrm{r}^2-\pi^2}$. *(2)* AP *L* 12 f. $\sqrt{\mathrm{r}^2-\pi^2}$. *(1)* et *(2)* cuius quadr. *(a)* sublatum a *(b)* additum *L* 15 $\sqrt{\dfrac{\mathrm{r}^2 - \dfrac{1}{\mathrm{n}}\sqrt{\mathrm{r}^4\mathrm{n}^2 - \mathrm{a}^4}}{2}}$. *(1)* Eius duplum BE seu 2 BN multiplicetur *(2)* Hinc *L*

$ABDEFC$ ambitum quaeremus. Nempe BN ducatur in numerum laterum polygoni $[ABEC]$ qui est duplus numeri laterum polygoni praecedentis ABC seu duplus numeri n. Ergo BN ducatur in $2n$. numerum laterum polygoni $ABDEFC$, fiet dimidius ambitus, seu dimidium ipsius $[ABDEFC]$, quod ductum in r. dabit aream polygoni $ABDEFC \sqcap r\sqrt{2n^2r^2 - 2n\sqrt{r^4n^2 - a^4}} \overset{\odot}{\sqcap} b^2$. Et ita area polygoni tertii, $ABDEFC \sqcap b^2$, habebitur ex radio r, numero n. laterum polygoni primi ABC, et a^2. area polygoni secundi, $[ABEC]$. Ergo eodem modo pro polygonis ABC. $[ABEC]$. $ABDEFC$. ponendo $[ABEC]$. $ABDEFC$. $[ABGDHELFMC]$. tertii area, c^2, ex praecedentium duorum, primi numero, $2n$, medii area $b^2 \sqcap r\sqrt{2n^2r^2 - 2n\sqrt{r^4n^2 - a^4}}$. habebitur. Ergo in aeq. ☉ pro b^2. ponendo c^2, pro a^2. ponendo b^2, fiet: $r\sqrt{8n^2[r^2] - 4n\sqrt{4r^4n^2 - b^4}} \overset{☽}{\sqcap} c^2$. Ope alterius aequationum ☉ et ☽ tollatur incognita n. In residua sola restabit quantitas incognita r. et habebitur aequatio seu formula secundum quam radius componitur ex a^2. b^2. c^2. sive ex areis trium polygonorum quorumcunque. Habetur ergo formula eodem modo composita ex tribus polygonis datis, quo ex tribus polygonis proxime sequentibus. Iam calculavit Gregorius in serie A. B. C. D. E. etc. Z. polygonorum sectori inscriptorum, primo posito a^2. secundo b^2. tertium fore $\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



[*Fig. 4*]

2 BEC *L ändert Hrsg.* 4 dimidium *(1)* recta⟨rum⟩ *(2)* ipsius | BDEFC *ändert Hrsg.* |, quod *L* 5 b^2. *(1)* Et eodem plane modo *(2)* Et *L* 7 BDEF *L ändert Hrsg. dreimal* 8 BGDHELFGMC *L ändert Hrsg.* 10 b^2, *(1)* vel eius valorem, sive pro a^4. ponendo $2r^4n^2 - 2nr^2\sqrt{r^4n^2 - a^4}$ *(2)* fiet *L* 10 r^2 *erg. Hrsg.* 13 ergo *(1)* | quantitas *streicht Hrsg.* | *(2)* formula *L* 14 Iam *(1)* si polygonorum *(2)* calculavit *L* 15 Z. *(1)* si *(2)* polygonorum *L*

14 f. calculavit Gregorius: vgl. J. Gregory, *Vera quadratura circuli et hyperbolae*, 1668, Scholium nach prop. V, S. 15.

Ergo quantitas habebitur eodem modo composita ex $a^2.\ b^2.\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ quo componitur ex $b^2.\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \dfrac{2\ \boxed{6}\sqrt{\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}}}{b^2+\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$ seu ex $A.\ B.\ C.$ quo ex $B.\ C.\ D.$ aut $C.\ D.\ E.$ Ergo et quantitas habebitur eodem modo composita ex $Z.\ Z.\ Z.$ quo ex $A.\ B.\ C.$ Unde sequitur inveniri posse ipsam $Z.$ Idque d u p l i c i e x p r i n c i p i o : U n o [,] quod illa quantitas ex $Z.\ Z.\ Z.$ eodem modo composita iam cognita est (: Ubi tamen hoc manifestum est obstaculum, quod tunc sector ex solo determinaretur radio, quod absurdum et impossibile foret: nullae enim supererunt literae, nisi tria ultima polygona aequalia (seu in ultimis ipsa $Z.$) ex aeq. ☽ et ⊙ et litera $r.$ non ergo possunt poni aequales. Cui difficultati nullum aliud remedium video, quam non posse forte literam $n.$ tolli ex aequationibus ⊙ et ☽ ope alterius, sed relinqui forte identicas aliaque id genus obstacula subtilia debent esse a natura parata :). A l t e r o , quod aequando inter se quantitatem eodem modo compositam ex $A.\ B.\ C.$ quo ex $Z.\ Z.\ Z.$ invenietur $Z.$ (: Sed necesse est idem obstaculum reperiri, scilicet ut litera $n.$ non possit tolli, aut ut nihil possit reperiri nisi identicum, ponendo tres ultimas, seu $a^2.\ b^2.\ c^2.$ in aeq. ⊙, ☽ aequales[:]) Interim hinc admiranda ducimus multa. P r i m o quantitatem invenire eodem modo compositam ex eiusmodi quantitatibus, modo sciamus ex qua curva sit ducta. (: Unde contra si curvam nesciamus, deturque seriei terminatio aliunde poterit hinc inveniri quantitas eodem [modo] composita, seu quasi latus rectum; et curvae forsan aequatio: haec utilia, ad methodum tangentium inversam :) S e c u n d o habebimus semper aequationem egregiam cuius ope possit inveniri valor polygoni valde remoti, ope tantum numeri $n.$ et primorum $A.\ B.\ C.$ nempe ita ut error sit minor quam differentia eius ab alio proximo, semperque idem erit calculus, mutato tantum numero $n.$ quod est admirabile, et in hoc genere summum. Neque enim mente fingi potest appropinquatio perfectior. Reperietur

2 aut C. D. E. *erg. L* 7 nisi *(1)* a^2. b^2. c^2. aequales et r. seu a. et r. *(2)* tria *L* 8 aequales. *(1)* Unde *(2)* Cui *L* 11 natura | a *streicht Hrsg.* | parata *L* 16 ducta. *(1)* A l t e r a m *(2)* (: Unde *L* 18 modo *erg. Hrsg.* 21 A. B. C. *(1)* errori *(2)* et ipsam *(3)* nempe *L*

765,16 tertium fore $\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}$: Richtig wäre $\sqrt{\dfrac{2b^6}{a^2+b^2}}$; der Fehler pflanzt sich fort bis Z. 2, wo bei der Ermittlung des dritten Terms ein weiterer Fehler hinzukommt.

scilicet aequatio simplicissima, pro area sectoris, in quam ingreditur numerus n. progressionis duplae, tanto exactior, quanto numerus maior; sine ulla alia mutatione. Hinc sectio anguli et rationis pulcherrima.

3 *Darunter*: Εὕρηκα

2 alia *erg. L*

61. DE AREIS ET CURVIS PER SERIES EXPRIMENDIS
28./29. Juni 1676 – 29. November 1678/[nach dem 29. November 1678]

Die beiden Teilstücke stehen in engem inhaltlichen und äußeren Zusammenhang. Sie wurden von Leibniz ursprünglich auf je ein Bl. 2° mit gleichem Wasserzeichenbild geschrieben und zuerst auf den 29. bzw. den 27., dann auf den 28. bzw. 29. Juni 1676 datiert. Unter den Haupttext von N. 61_1 schrieb Leibniz *Quadratura ex summis ordinatarum* (= Cc 2, Nr. 1449, Druck in einem späteren Band der Reihe) an, das er später aus dem Blatt herausschnitt; der am rechten Rand zunächst noch zusammenhängende Rest wurde getrennt (= LH 35 XII 1 Bl. 24 u. Bl. 25). Der ursprünglich unter Cc 2, Nr. 1449 geschriebene Zusatz 1 (= S. 772 Z. 2–8) stammt möglicherweise erst aus Hannoverscher Zeit; eine Ergänzung dazu (vgl. S. 772 Z. 8) ist erst nach dem auf den 29. November 1678 datierten Zusatz 2 (S. 773 Z. 2–7) entstanden. Leibniz schrieb letzteren in die Lücke zwischen dem Haupttext und Cc 2, Nr. 1449 sowie unter den Zusatz 1. Zusatz 2 enthält einen Verweis auf N. 61_2; nach Tinte und Duktus dürfte der Zusatz 1 von N. 61_2 (= S. 778 Z. 9 – S. 780 Z. 6) zur selben Zeit entstanden sein. Nach der Abfassung von Zusatz 2 zu N. 61_2 (= S. 780 Z. 8 – S. 781 Z. 5) bemerkte Leibniz einen Fehler im Haupttext von N. 61_1, markierte ihn am Rande des Blattes, korrigierte punktuell im Text und strich den Zusatz 2 zu N. 61_2. Zuletzt schrieb er den Zusatz 3 zu N. 61_2 (= S. 781 Z. 7 – S. 782 Z. 9) auf den freigebliebenen Rest des ersten Blattes unter die Zusätze zu N. 61_1.

61_1. DE FIGURARUM AREIS PER INFINITAS SERIES EXPRIMENDIS
28. Juni 1676 – 29. November 1678

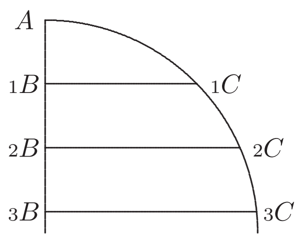
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 24–25. Bl. 24: 1 Bl. ca 4°. 2 S. — Bl. 25: 1 Bl. ca 4°. 10 Zeilen auf Bl. 25 r°. oben. Darunter Zusatz 3 von N. 61_2. Bl. 25 v° leer. — Bl. 24 u. 25 bildeten ursprünglich mit LH 35 XIII 1 Bl. 433 (Cc 2, Nr. 1449), einem Zettel von max. 21,5 x 5,5 cm, ein vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1458, 1459 C tlw.

28. Iun. 1676.

De figurarum areis per infinitas series exprimendis regula generalis.

Inveni methodum generalem cuius ope obtineri semper poterit figura rationalis datae homologa; adeoque expressio curvae propositae per seriem infinitam.

25 *(1)* 29. *(2)* 28. *L* 26 De *(1)* curvarum *(2)* figurarum *L* 27 Inveni | tandem *gestr.* | methodum *L* 27 f. poterit *(1)* series rati *(2)* figura *L*



[*Fig. 1*]

Quae ut intelligatur sit curva $_1C_2C_3C$. Axis $A_1B_2B_3B$. Ordinatae, $y \sqcap {}_1B_1C$, vel $_2B_2C$, vel $_3B_3C$. Et abscissae sint $x \sqcap A_1B$, vel A_2B, vel A_3B. Aequatio curvae quaelibet, ut $2ax - x^2 \overset{(1)}{\sqcap} y^2$. Area figurae: $\int \overline{yd\bar{x}}$. Sumatur 1° alia litera quaelibet, z[,] eique talis tribuatur relatio, ut $yd\bar{x}$. sit quantitas rationalis quod fiet si tum y, tum x, sint rationales ex data z. Ut exempli causa, ponatur $x \overset{(2)}{\sqcap} \dfrac{2az^2}{a^2+z^2}$. eumque valorem substituendo in aequatione 1, $\dfrac{4a^2z^2}{a^2+z^2} - \dfrac{4a^2z^4}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(3)}{\sqcap} y^2$. et reducendo:

$$\frac{4a^4z^2\boxed{+4a^2z^4}\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(4)}{\sqcap} y^2. \text{ et } \frac{2a^2z}{a^2+z^2} \overset{(5)}{\sqcap} y. \text{ Iam } d\bar{x} \text{ ita investigabitur:}$$

$$d\bar{x} \overset{(6)}{\sqcap} \ddagger \frac{2az^2}{a^2+z} \ddagger \frac{\boxed{2az^2}+4a\beta z\boxed{+2a\beta^2}}{\boxed{a^2+z^2}+2\beta z\boxed{+\beta^2}} \overset{(7)}{\sqcap} \frac{\boxed{+4\beta az^3}\ddagger 4a^3\beta z\boxed{\ddagger 4\beta az^3}}{a^4+2a^2z^2+z^4}. \text{ eritque}$$

$\ddagger \overset{(8)}{\sqcap} -$ et $\ddagger \overset{(9)}{\sqcap} +$ et $d\bar{x} \overset{(9)}{\sqcap} \dfrac{4a^3\beta z}{a^4+2a^2z^2+z^4}$. et ex 9. et 5. erit $yd\bar{x} \sqcap a^4\beta, \boxed{3}\, \dfrac{z}{a^2+z^2}$ seu $yd\bar{x} \sqcap \dfrac{a^4\beta z^3}{a^6+3a^4z^2+3a^2z^4+z^6}$. quae est figura rationalis, ad quam summa sinuum reducitur.

---

17 *Zur ersetzten Lesart, am Rande:* Error calculi

6 tribuatur *(1)* valor *(2)* relatio *L* 6 f. quod . . . data z *erg. L* 8 f. substituendo *(1)* seriei *(2)* in *L* 9 f. reducendo: *(1)* $\dfrac{\boxed{4a^2z^2}+4a^2z^4\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(4)}{\sqcap} y^2$ et $\dfrac{2az^2}{a^2+z^2} \overset{(5)}{\sqcap} y$ *(2)* $\dfrac{4a^4z^2\boxed{+4a^2z^4}\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4}$ *L*

---

12 $d\bar{x} \overset{(9)}{\sqcap}$: Zählung doppelt; Leibniz bezieht sich im folgendem auf diese Gleichung. 15 Error calculi: Leibniz bemerkt den Fehler erst nach der Abfassung von Zusatz 2 zu N. 61_2 (vgl. die Erl. zu S. 780 Z. 9) und korrigiert nur punktuell. Der falsche Wert geht in Z. 12 in die Berechnung von $yd\bar{x}$ ein.

Caeterum saepe idem poterit obtineri compendiosius, si neque y, neque x, adeoque nec $d\overline{x}$ sint rationales; sed tamen factum ex ipsis $yd\overline{x}$ sit quantitas rationalis. Quod contingere poterit, si per eam quantitatem irrationalem una dividitur, per quam altera multiplicatur. Porro quod diximus de resolutione figurae in parallelogramma per ordinatas, locum habet etiam de eius resolutione per convergentes in triangula, aut truncos triangulum residuos; aliaque id genus.

Caeterum si modo ab initio posito, tam $d\overline{x}$, quam y, sive tam x, quam y rationales quaerimus, tunc problema de areis curvarum per series infinitas exprimendis redit ad problemata Diophantea; et illud generale: Datam aequationem rationaliter explicare, ut sit aequatio ad curvam conicam: $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \dagger \dfrac{a}{q}x^2} \dagger \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Ergo $\dfrac{a^2}{2ax \dagger \dfrac{a}{q}x^2} \dagger \dfrac{a}{q} + 1$. aequanda quadrato seu $\dfrac{z^2}{a^2}$. Sit $\dfrac{z}{a} \sqcap \dfrac{a}{x} + \sqrt{\dagger \dfrac{a}{q} + 1}$. fiet: $\dfrac{a^2}{2ax \dagger \dfrac{a}{q}x^2}\ \boxed{\dagger \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{2[a]}{x}\sqrt{\dagger \dfrac{a}{q} + 1},\ \boxed{\dagger \dfrac{a}{q} + 1}$. Sed sic res ut video nondum absoluta, procedamus rectius et scribamus: ☿ $\dfrac{\sqrt{a^2 2ax \dagger a^2\dfrac{a}{q}x^2, \overline{\overline{\dagger \dfrac{a}{q} + 1}, 4a^2x^2 \dagger 4\dfrac{a}{q}x^4 + \dfrac{a^2}{q^2}x^4}}}{2ax \dagger \dfrac{a}{q}x^2} \sqcap \dfrac{z}{a}$ ubi formulata [numeratoris] aequanda quadrato forte utiliter poterit prior semiabsoluta: $\dfrac{a^2}{2a \dagger \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{a^2}{x} + 2[a]\sqrt{\dagger \dfrac{a}{q} + 1}$. Imo video ne hoc quidem sic sufficere[,] debet enim non definite, seu in casu particulari, sed indefinite reddi rationalis. Praeterea non nisi duae restare debent literae indeterminatae in una aequatione. Itaque tertia assumta quantitate ω, explicanda per eam x, ita ut possit extrahi radix ex prima formula seu valore ipsius z, ut scribatur:

6 f. genus. *(1)* Tota ergo res eo redit, data aequati *(2)* Caeterum si *(a)* vulgari ratione *(b)* modo *L* 10 curvam *(1)* ellipseos *(2)* conicam *L* 12 a *erg. Hrsg.* 13 f. nominatoris *L ändert Hrsg.* 15 a *erg. Hrsg.*

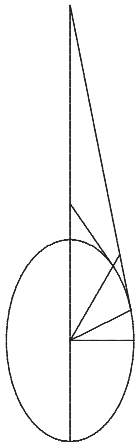
$\frac{a^2}{2ax \dagger \frac{a}{q}x^2}\,\boxed{\dagger\frac{a}{q}+1} \sqcap \omega^2 + 2\omega\sqrt{\dagger\frac{a}{q}+\frac{1}{1}}\,\boxed{\dagger\frac{a}{q}+1}$. $\dagger\frac{a}{q}+1$. vocemus γ. et $\omega \sqcap$ $\frac{v}{2a\dagger\frac{a}{q}x}$ fiet: $\frac{a^2}{2ax\dagger\frac{a}{q}x^2} \sqcap \frac{v^2+2\gamma v\overline{2a\dagger\frac{a}{q}x}}{\boxed{2}\,\overline{2a\dagger\frac{a}{q}x}}$. seu $\frac{a^2}{x} \sqcap \frac{v^2+2\gamma v2a\dagger 2\gamma v\frac{a}{q}x}{2a\dagger\frac{a}{q}x}$: $2a^3 \dagger$ $\frac{a^3}{q}x \sqcap v^2x+4\gamma vax \dagger 2\gamma\frac{a}{q}x^2$. sive $x^2\,\underset{\text{☽}}{\boxed{\begin{array}{l}\dagger\, 2q\,v\\ \dagger\,\frac{q}{2\gamma a}v^2\ \bullet\\ -\frac{a^2}{2\gamma}\ \bullet\end{array}}}\,x+\frac{\text{☽}^2}{4} \sqcap \frac{\text{☽}^2}{4}+2a^3$. Sed ita ex $\frac{\text{☽}^2}{4}+2a^3$ deberet radix extrahi posse, ubi x^2 ascendit ad quadratoquadratum, adeoque res prorsus ut ab initio unde redordiri possemus a formula ☿. Sed id nunc non opus, sufficit methodum tenere. Imo ope formulae ☿ res multo simplicior reddi potest. Scribamus $2ax\dagger\frac{a}{q}x^2 \sqcap \xi$. fiet $\frac{\sqrt{\xi+\gamma\xi^2}}{\xi} \sqcap \frac{z}{a}$. Extrahenda est radix ex $\xi+\gamma\xi^2 \sqcap \boxed{2}\,\overline{1+\gamma\xi}\varphi^2$. et $\xi \sqcap \varphi^2+\gamma\xi\varphi^2$. Aliter $\cancel{\xi}+\gamma\xi^{\cancel{2}} \sqcap \psi^2\xi^{\cancel{2}}$ seu $1+\gamma\xi \sqcap \psi^2\xi$. sed non est his nunc immorandum. Sufficit methodum tenere, ut tantum ad inventionem seriei rationalis pro curva, solutio problematis Diophantaei supersit.

3–7 $+2a^3$ *(1)* potest *(2)* deberet *L* 7 res *(1)* difficilior quam *(2)* prorsus *L* 12 pro curva *erg. L*

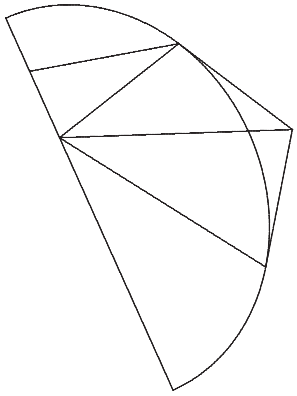
---

3 $\dagger 2\gamma\frac{a}{q}x^2$: Leibniz vergißt in diesem Term den Faktor v; der Fehler geht in die anschließende Umformung der quadratischen Gleichung ein, in der auch der Term $+2a^3$ noch umgeformt werden müßte.

[*Zusatz 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$\frac{a^2}{2ax \pm \frac{a}{q}x^2}\ \boxed{\underbrace{\pm\frac{a}{q}+1}_{\gamma}} \sqcap \omega^2 + 2\omega\sqrt{\gamma}\,\boxed{+\gamma}$ sive $2ax \pm \frac{a}{q}x^2, \frown\ \omega^2 + 2\omega\sqrt{\gamma} \sqcap a^2$. Pro x sumatur $\frac{q}{2} \pm y$ pro $2ax \pm \frac{a}{q}x^2$, fiet $+\frac{2aq}{2} \pm 2ay,, \pm \frac{a}{q}\ \frac{q^2}{4} + ay \pm \frac{a}{q}y^2$. $x \sqcap y + c$. fiet $2ay + 2ac \pm \frac{a}{q}y^2 \pm \frac{2a}{q}yc + c^2$. sit $\cancel{2a}\cancel{y} \sqcap \pm\frac{\cancel{2a}}{q}c\cancel{y}$ seu $c \sqcap \pm q$. fiet $2ax \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap q^2 \pm 2aq \pm \frac{a}{q}y^2 \sqcap$ [*bricht ab*]

Sit $\omega \sqcap \frac{v}{x}$. fiet: $\frac{a^2}{2ax \pm \frac{a}{q}xx}$ *aequ.* $\frac{v^2 + 2v\sqrt{\gamma}}{x^2}$ seu $x \sqcap \frac{2avv + 4av\sqrt{\gamma}}{a^2 \pm \frac{a}{q}vv \pm \frac{2a}{q}v\sqrt{\gamma}}$ et $d\overline{\omega}$ *aequ.* $\frac{vd\overline{x} - xd\overline{v}}{xx}$ et pro x item pro $d\overline{x}$ substituendo valorem habetur $xd\overline{\omega}$ per v rationaliter.

7 *(1)* yy $\sqcap$ *(a)* z^2 *(b)* $v^2 + a^2b^2$. Ergo $2yd\overline{y} \sqcap 2vd\overline{v}$. Ergo $d\overline{y} \sqcap \frac{2vd\overline{v}}{\langle - \rangle^2 + b^2}$ *(2)* Sit *L*   8 et ... rationaliter *erg L*

[*Zusatz 2*]

29. Novemb. 1678.

Res non difficulter absolvitur hoc modo: $\text{ǂ}\frac{a}{q}+1$ sit *aequ.* m et fiet: $\frac{z^2}{a^2}m^2$ *aequ.* $\frac{a^2}{2ax\,\text{ǂ}\,\frac{a}{q}x^2}$. $(\text{ǂ})\frac{z^2}{a^2}(\text{ǂ})m, e$ *aequ.* $\frac{a}{x}$, et fiet: $\text{ǂ}\frac{z}{a}\overline{(\text{ǂ})m,}\smile e$ *aequ.* $\frac{a}{2a\,\text{ǂ}\,\frac{a}{q}x}+1$. Res sic non procedit quia incognita in nominatore, ideo sic procedemus: $z^2 2ax\,\text{ǂ}\,z^2\frac{a}{q}x^2 - m^2 2ax\,\text{ǂ}\,m^2\frac{a}{q}x^2$ *aequ.* a^2. Ponatur [*bricht ab*]

Vide 29. Iun. 1676. ubi pro curva conica series rationalis quaeritur.

5 in *(1)* numeratore *(2)* nominatore, ideo *(a)* semper pro z scribamus $\frac{\mathrm{q}}{\langle - \rangle}$ et $\frac{1}{\langle - \rangle}$ aequ. x^2 *(b)* sic *L*

7 Vide: N. 61₂.

61_2. PRO CURVA CONICA SERIES RATIONALIS QUAERENDA
29. Juni 1676 / [am und nach dem 29. November 1678]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 25, 29. Bl. 25: 1 Bl. ca. 4°. 1/2 S. auf Bl. 25 r° unten, darüber 10 Z. von N. 61_1 (= S. 772 Z. 1–8 und S. 773 Z. 5–7). Bl. 25 v° leer. — Bl. 29: 1 Bl. 2°. 2 S. Haupttext und Zusätze 1 u. 2 auf Bl. 29. Zusatz 3 auf Bl. 25 r°. Datum u. Überschrift auf Bl. 29 r° oben ergänzt.
Cc 2, Nr. 1459 A–B, C tlw.

29. Iun. 1676.

P r o   c u r v a   c o n i c a   s e r i e s   r a t i o n a l i s   q u a e r e n d a

$$\sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}}_{\text{☽}} + 1 \ddagger \frac{a}{q}} \sqcap \frac{z}{a}.\ \text{seu}\ a^4 + 2a^3x \ddagger \frac{a^3}{q}x^2,\ \ddagger 2a^3x + \frac{a^4}{q^2}x^2 \sqcap 2z^2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2z^2.$$

Determinando ad tangentes: $2a^3t \ddagger \frac{2a^3}{q}xt \ddagger 2a^3t + \frac{2a^4}{q^2}xt - 2z^2at \ddagger \frac{2a}{q}xtz^2 \sqcap 4z^2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2z^2$ eritque $t \sqcap \dfrac{4z^2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2z^2}{\text{☿}\ 2a^3 \ddagger \frac{2a^3}{q}x \ddagger 2a^3 + \frac{2a^4}{q^2}x - 2z^2a \ddagger \frac{2a}{q}xz^2}$. Et pro z^2. ponendo

---

9 *Daneben:* NB. sub finem solutio vera.

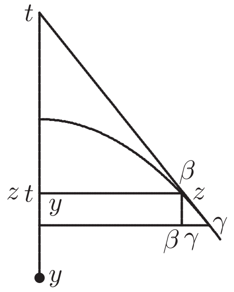
8 *(1)* Pro c *(2)* 27. *(3)* 29. *L*

---

14 sub finem: Gemeint ist wohl ursprünglich der gestrichene Zusatz 2, sinngemäß Zusatz 3.

10–775,1 $\ddagger 2a^3x$: Richtig wäre $\ddagger \frac{2a^4}{q}x$; dieser und ein weiterer Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Berechnung der Subtangente t, die Leibniz in S. 775 Z. 1 abbricht.

$$\frac{\odot\ a^4+2a^3x \ddagger \dfrac{a^3}{q}x^2 \ddagger \dfrac{2a^3}{x}+\dfrac{a^4x^2}{q^2}}{2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2} \quad \text{fiet } t \sqcap \frac{2 \frown \odot}{2a^3 \ddagger \dfrac{2a^3}{q}x \ddagger 2a^3+\dfrac{2a^4}{q}x} \quad [\textit{bricht ab}]$$



[*Fig. 1*]

$\dfrac{\gamma}{\beta} \sqcap \dfrac{z}{t}$ et $\gamma \sqcap \dfrac{\beta z}{t}$ et $\gamma z \sqcap \dfrac{[\beta]z^2}{t \sqcap \dfrac{☽ 2z^2}{☿}} \sqcap \dfrac{[\beta]☿}{2\,☽}$. Unde hic rationalis figura cuius haberi potest summa.

$2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2$. Sit $x \sqcap y+b$ fiet $2ay+2ab, \ddagger \dfrac{a}{q}y^2 \ddagger \dfrac{2a}{q}yb \ddagger \dfrac{a}{q}b^2$. et $\cancel{2ay} \ddagger \dfrac{\cancel{2a}b}{q}\cancel{y} \sqcap 0$. Ergo $b \sqcap \ddagger q$ et $x \sqcap y \ddagger q$ et $2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap \boxed{2ay} \ddagger 2aq \ddagger \dfrac{a}{q}y^2 \boxed{\overline{\ddagger \dfrac{a}{q} \frown \ddagger 2qy}} \ddagger \dfrac{a}{q}q^2$ et fiet $\ddagger aq \ddagger \dfrac{a}{q}y^2$. et fiet $\dfrac{a^2}{\ddagger aq \ddagger \dfrac{a}{q}y^2}+1 \ddagger \dfrac{a}{q} \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$. seu $\boxed{a^4} \ddagger a^3q \ddagger \dfrac{a^3}{q}y^2 \boxed{-a^4}+\dfrac{a^4}{q^2}y^2 \sqcap \ddagger aqz^2 \ddagger \dfrac{a}{q}y^2z^2$ et $y^2 \sqcap \dfrac{\ddagger aqz^2 \ddagger a^3q}{\ddagger \dfrac{a^3}{q}+\dfrac{a^4}{q^2} \ddagger \dfrac{a}{q}z^2}$. Ergo dividendo per $\dfrac{aq}{\frac{a}{q}} \sqcap q^2$ debet $\dfrac{\ddagger z^2 \ddagger a^2}{\underbrace{\ddagger a^2+\dfrac{a^3}{q} \ddagger z^2}_{(\ddagger)b^2}} \sqcap \dfrac{\ddagger z^2 \ddagger a^2}{(\ddagger)b^2 \ddagger z^2}$ aequari quadrato. Invertendo sufficit $\dfrac{\ddagger a^2+\dfrac{a^3}{q} \ddagger z^2}{\ddagger z^2 \ddagger a^2}$ aequari quadrato, seu: $\ddagger a^4 \ddagger z^4 \ddagger \dfrac{a^3}{q} \ddagger \dfrac{a^5}{q}$ aequari quadrato.

2 γ *L ändert Hrsg. zweimal*

7–10 $y^2 \sqcap \dfrac{\ddagger aqz^2 \ddagger a^3q}{\ddagger \dfrac{a^3}{q}+\dfrac{a^4}{q^2} \ddagger \dfrac{a}{q}z^2}$: Im letzten Term des Nenners unterläuft Leibniz ein Vorzeichenfehler, der das Ergebnis in Z. 10 beeinträchtigt.

$\dfrac{a^2}{+\dfrac{a}{q}-\dfrac{a}{q}y^2}+1-\dfrac{a}{q} \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$ aequatio ipsarum z. quae homogeneae sunt curvae conicae.

Aequatio ad sectionem conicam $aq-\dfrac{a}{q}y^2 \sqcap v^2$. Compendii causa $1-\dfrac{a}{q}$ vocemus $\dfrac{\theta}{a}$. fiet

$\boxed{\dfrac{a^2}{aq-\dfrac{a}{q}y^2}} + \dfrac{\theta}{a} \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$ aequatio curvae conicae. Unde et $\dfrac{qa}{q^2-y^2} \sqcap \dfrac{z^2-\theta a}{a^2}$. Ergo

$\dfrac{qa}{q^2-y^2} + \dfrac{\theta}{a} \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$

$z^2-\theta a, \frown q^2-y^2 \sqcap qa^3$ aequatio generalis figurae quae curvae conicae homogenea est. $z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}, q+y, q-y \sqcap qa^3$. [Ponatur $q+y \sqcap \dfrac{\omega a^2}{z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}}$ fiet $a^2\omega, q-y \sqcap qa^3$ et $q-y \sqcap \dfrac{qa^{\cancel{3}}}{\cancel{a^2}\omega}$. Ergo $2q \sqcap \dfrac{qa}{\omega}+\dfrac{\omega a^2}{z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}}$.] $2q \sqcap \dfrac{qa, z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}+\omega^2a^2}{z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}, \omega}$ seu $qaz^2-qa\theta a+\omega^2a^2 \sqcap 2q\omega z^2-2q\omega\theta a$ ☽.

Ponatur $az \sqcap ce+dv+fa$ et $\omega \sqcap ge+hv+la$ fiet

$\dfrac{q}{a},,, \overline{c^2e^2+2cdev+2cfae,+d^2v^2+2dfav+f^2a^2},, -qa\theta a,,$

$+ [a^2,]\ g^2e^2+2ghev+2glae+h^2v^2+2hlav+l^2a^2$

$\sqcap$

1 f. conicae. *(1)* | q $\sqcap$ ∓Q. *streicht Hrsg.* | Aequatio ad curvam conicam $2ax \mp \dfrac{a}{Q}x^2 \sqcap$ *(2)* Aequatio *L* 3 conicae *(1)* seu $qa+q^2-y^2-a^2-\dfrac{a^2}{q^2}y^2$ *(2)* . Unde *L* 5 $\frown q^2-y^2 \sqcap$ *(1)* quadrato *(2)* qa^3 aequatio *(a)* ad curvam conicam *(b)* generalis *L* 5 f. est. *(1)* Fingamus *(2)* Sit $q+y \sqcap \dfrac{\omega a}{z+\sqrt{\theta a}}$ et fiet $y \sqcap \dfrac{\omega a}{z+\theta a\ (!)}-q$ et $q-y \sqcap 2q-\dfrac{\omega a}{z+\theta a\ (!)}$ et pro $z^2-\theta a \frown q^2-y^2 \sqcap qa^3$. fiet: $z\sqrt{\theta a}, \frown 2q\omega-\dfrac{\omega^2 a}{z+\sqrt{\theta a}} \sqcap qa^3$ *(3)* $z+\sqrt{\theta a}$ *L* 6 f. Ponatur ... $\dfrac{\omega a^2}{z+\sqrt{\theta a}, z-\sqrt{\theta a}}$. *gestr. L, erg. Hrsg.* 11 a^2, *erg. Hrsg.*

$$\begin{array}{lllllllll}
\left[\frac{2q}{a^2},\right] & c^2g\,e^3 & +2cdg\,e^2v & +2cfag\,e^2 & +d^2g\,\ v^2e & +2dfag\,\ ve & +f^2a^2g\,\ e & +d^2h\,v^3 & +2dhfa\,v^2 \\
& & +\,c^2h & +\,lac^2 & +2cdh & +2cfah & & & +\,lad^2\ \ .. \\
& & & & & +2lacd & +2la^2cf\ . & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\quad +\,f^2a^2hv+f^2a^3l \\
\quad +2dfla^2 \\
-2q\theta[a],\ \overline{ge+hv+la}
\end{array}$$

Ubi habemus: v^3. e^3. v^2e. e^2v. e^2. v^2. v. e. ... Tollendi ergo termini e^3. e^2v. e^2. Pro e^3 tollenda: $c^2g \sqcap 0$. Pro e^2v, tollenda erit $2cdg + c^2h \sqcap 0$. Quorum utrumque non potest praestari rectius quam ponendo $c \sqcap 0$. Sed e^2. video hac eadem methodo non posse tolli simul enim c et g fierent $\sqcap 0$. et evanesceret e nec nisi una indeterminata v, intrat aequationem.

$a^2z^2 - \theta a^3 \frown a^2q^2 - a^2y^2 \sqcap qa^7$. Pone $az \sqcap ce + dv + fa$. et $ay \sqcap ge + hv + la$. erit: $qa^7 \sqcap c^2e^2 + 2cdev + 2cfae + d^2v^2 + 2dfav + f^2a^2, -\theta a^3,, \frown a^2q^2, +g^2e^2 + 2ghev + 2glae + h^2v^2 + 2hlav + l^2a^2$. Video potuisse etiam denominatores dari ipsis az, et ay. in quos intrassent ipsae e. et v, nec ideo ad altiores terminos ascendissemus, habuissemusque alteram tantum arbitrariam, adeoque libertatem destruendi magnam, at in aequatione ☽ potuissemus quidem etiam maiorem habere numerum arbitrariarum, licet altius non ascendendo, sed ea cautione, ut idem sit denominator ipsarum az. et aw. Nimirum aequatio $qaz^2 + \omega^2a^2 + 2q\theta a\omega \sqcap 2q\omega z^2 + qa^2\theta$. Pro z ponatur $\dfrac{a\varphi}{\psi}$. pro ω $\dfrac{a\lambda}{\psi}$. Unde fiet: $qa^3\varphi^2\psi + a^4\lambda^2\psi + 2q\theta a^2\lambda\psi^2 \sqcap 2qa^3\lambda\varphi^2 + qa^2\theta\psi^3$. $a\lambda \sqcap ce + dv + fa$. $a\varphi \sqcap ge+hv+la$. $a\psi \sqcap me+nv+ar$. Nuspiam ascendetur ultra v^3. e^3. v^2e. e^2v. v^2. e^2. ve. v. e. Quod si ergo desideramus e puram (nam par est ratio, cum eodem modo valores formentur ex e. quam v. et si unum impossibile, erit et alterum) tollenda e^3, e^2v, e^2. Excerpamus e^3. explicando saltem animo terminos quibus opus: $qg^2me^3 + ac^2me^3 + \dfrac{2q\theta}{a}m^2ce^3 \sqcap 2qg^2ce^3 + \dfrac{q\theta}{a}m^3e^3$. Ergo $aqg^2m + a^2c^2m + 2q\theta m^2c \sqcap 2aqg^2c + q\theta m^3$. Et pro e^2v, tollenda fiet aequatio $+qg^2n + q2ghm, +ac^2n + a2cdm, + \dfrac{2q\theta}{a}m^2d + \dfrac{4q\theta}{a}mnc \sqcap 2qg^2d + 4qghc + \dfrac{3q\theta}{a}m^2n$.

1 $\frac{2q}{a^2}$, *erg. Hrsg.* 6 a *erg. Hrsg.* 10 una *(1)* incogni *(2)* indeterminata *L*

Denique pro e^2 tollenda fiet: $qg^2ra+[q2glam]+ac^2ar+a2cfam+\dfrac{2q\theta}{a}m^2fa+\dfrac{4q\theta}{a}marc \sqcap 2qg^2fa+4qglac+[\dfrac{q\theta}{a}3m^2ar]$. Ponendo $m.$ et $c \sqcap 0$ satisfiet aeq. 1. Unde pro aeq. 2: $qg^2n \sqcap 2qg^2d$ seu $n \sqcap 2d$; et ex aeq. 3. $qg^2ra \sqcap 2qg^2fa$ seu $ra \sqcap 2fa$ caeterae arbitrariae, et fieri possent $h.$ et $l \sqcap 0$.

Posuimus $a\lambda \sqcap ce+dv+fa$. $a\varphi \sqcap ge+hv+la$. $a\psi \sqcap me+nv+ar$. $m \sqcap c \sqcap h \sqcap l \sqcap 0$. $n \sqcap 2d$. $ar \sqcap 2fa$. erit $a\lambda \sqcap dv+fa$. $a\varphi \sqcap ge$. $a\psi \sqcap 2dv+2fa$. $\dfrac{\omega}{a} \sqcap \dfrac{a\lambda}{a\psi}$ $[\sqcap]$ $\dfrac{dv+fa}{2dv+2fa} \sqcap \dfrac{1}{2}$ quod absurdum est. Ita enim ipsa ω fieret constans, non ergo sic licet.

[*Zusatz 1*]

Omnia pagina praecedenti huc reducta erant: $\dfrac{qa}{q^2-y^2}$ *aequ.* $\dfrac{z^2-\theta a}{a^2}$.

$$\left.\begin{matrix} +a^3q \\ +\theta aq^2 \end{matrix}\right\} \textit{aequ. } q^2z^2+\theta ay^2-y^2z^2$$

---

10 *Unter aequ.: m*

18 f. *Zur ersetzten Stufe (2) der Lesart, gestrichen:*

$a\lambda \sqcap dv+fa$ $\quad a^2\lambda^2 \sqcap d^2v^2+2dfav+f^2a^2$
$a\varphi \sqcap ge+2fa$ $\quad a^2\varphi^2 \sqcap g^2e^2+4gfae+4f^2a^2$
$a\varphi \sqcap 2dv$ [*bricht ab*] $\quad a^3\lambda g^2 \sqcap g^2de^2v+4gfadev+4f^2a^2dv+g^2fae^2+4gf^2a^2e+4f^3a^3$

1 q2glac *L ändert Hrsg.* 2 $\frac{q\theta}{a}3m^2e^2ar$ *L ändert Hrsg.* 4 f. $l \sqcap 0$. *(1)* $\frac{z}{a} \sqcap \frac{ge+hv}{2dv+2fa}$ et $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{dv+fa}{2dv+2fa}$. $a\lambda \sqcap dv+fa$. $a\varphi \sqcap ge+2fa$. $2dv+2fa \sqcap a\psi$ *(2)* | $qa^4\varphi^2\psi+a^5\lambda^2\psi+2a^3q\theta\lambda\psi^2 \sqcap 2qa^4\lambda\varphi^2+qa^2\theta\psi^3$. *streicht Hrsg.* | $qa2dv\overline{\boxed{g^2e^2}+4gfae+4f^2a^2}+a^22dv\overline{d^2v^2+2dfav+f^2a^2}+2q\theta 4d^2v^2\,\overline{dv+fa} \sqcap 2ga\,\overline{\boxed{g^2de^2v}4gfadev+4f^2a^2dv+g^2fae^2+4gf^2a^2e+4f^3a^3}$ *(3)* Inven *(4)* Posuimus *L* 6 $\sqcap$ *erg. Hrsg*
9 f. $\frac{z^2-\theta a}{a^2}$. *(1)* Loco $\frac{z^2}{a^2}$ ponatur $\frac{b^2}{\omega^2}$ et fiet: $\frac{z}{a}$ aequ. $\frac{b}{\omega}$ et scribemus *(a)* $\frac{z^2}{b^2}$ *(b)* $\frac{b^2}{\omega^2}+$ *(3)* Loco $\frac{z^2-\theta a}{a^2}$ ponatur *(4)* Sit q^2-y^2 aequ. $\frac{1}{e^2}$ seu *(5)* $+a^3q$ *L*

z *aequ.* $ce + dv + f$. y *aequ.* $ge + hv + k$. fiet:
$q^2 z^2$ *aequ.* $q^2, \overline{c^2e^2 + d^2v^2 + 2cdev + 2cfe + 2dfv + f^2}$
θay^2 *aequ.* $\theta a, \overline{g^2e^2 + h^2v^2 + 2ghev + 2gke + 2hkv + k^2}$
addatur valor ipsius y, et quadretur atque auferatur, summa comparetur cum aequatione ex rationali excitata.

$$q^2z^2 + \theta ay^2 - y^2z^2 \begin{array}{l} -a^3q \\ -\theta aq^2 \end{array} \text{ aequ. } 0. \quad z \text{ aequ. } \frac{de}{v} \text{ et } y \text{ aequ. } \frac{dv}{e}, \text{ fiet}$$

$$q^2\frac{d^2e^2}{v^2} + \frac{\theta ad^2v^2}{c^2} \begin{array}{l} -a^3q \\ -\theta aq^2 \end{array} \text{ aequ. } d^4. \text{ Unde ut extrahi possit radix, fiet:}$$

$$\frac{qde}{v} + \sqrt{\theta a}, \frac{dv}{e} \begin{array}{l} -2q\sqrt{\theta a}d^2 \text{ aequ. } d^2 \\ -a^3q \\ -\theta aq^2 \end{array}$$

$q^2z^2 + \theta ay^2 - y^2z^2$ *aequ.* m. Scribatur z^2 *aequ.* $ce^2 + dv^2 + r$. et y^2 *aequ.* $fe^2 + gv^2 + h$.

$$\begin{array}{llllll} \text{fiet} \quad q^2c\,e^2 & +\ q^2d\,v^2 & -cfe^4 - dgv^4 & -cg\,e^2v^2 & \boxed{\begin{array}{ll} -hc\,e^2 & -hd\,v^2 \\ -rf & -rg \end{array}} & -hr \text{ aequ. } 0 \\ +\theta af & +\ \theta ag & & -df & & -m \\ -\ hc & -\ hd & & & & [+q^2r] \\ -\ rf & -\ rg & & & & [+\theta ah] \end{array}$$

---

6 *Darunter:* Imo hoc non licet, quia sic ex duabus incognitis fit una, non ponitur yz *aequ.* constanti.

1 *(1)* Pone z aequ. $y\omega + f$ fiet $\begin{array}{l} +a^3q \\ +\theta aq^2 \end{array}$ aequ. $q^2y^2w^2 + 2q^2yf + q^2f^2 + \theta ay^2, -z^2y^2w - 2z^2yf + z^2f^2$ *(2)* Loco z^2 scribe $\mathfrak{z}$ loco y^2 scribe v fiet $a^3q + \theta aq^2$ aeq. $q\mathfrak{z} + \theta av - v\mathfrak{z}$, fiat $\mathfrak{z}$ aequ. $e + f$ et v aequ. $h + l$. et habebimus $a^3q + \theta aq^2$ aequ. $qe + qf + \theta ah + \theta al - eh - le - fh - fl$ fiant $a^3q + \theta aq^2$ aequ. $qf + \theta al - fl$. et *(a)* restabit qe *(b)* fiat: h aequ. e et *(aa)* faciamus *(bb)* fiet: $q + \theta av - el$. et restabit $qe + eah - eh - le - fh$ aequ. 0 *(3)* Scribatur compendii ergo $a^3q + \theta aq^2$ aequ. m et fiet: $mz + ny$ *(4)* z *L* 16 $+q^2r$ *erg. Hrsg.* 17 $+\theta ah$ *erg. Hrsg.*

778,9 pagina praecedenti: s. o. S. 775 Z. 7–10. 778,11 m: In Z. 13 setzt Leibniz die rechte Seite der Formel gleich m.

At aequ. $le^2 + nv^2 + p$ ducenda in $\beta e^2 + \gamma v^2 + \delta$, fiet: aequatio comparanda priori quod fieri potest et habebimus aequationem $le^2 + nv^2 + p$. inventis $l.n.p.$ item aliis literis, inde pro e^2 et v^2 restituemus y^2 et z^2 ope aequationum purarum quas habemus et res omnis facile absoluta habebitur. Multisque aliis modis in potestate est.

Tantum utile erat huiusmodi comparationes iam generaliter fuisse institutas ne opus sit calculo.

[*Zusatz 2, gestrichen*]

Aliter: $\frac{zz}{aa} \overset{(1)}{\textit{aequ.}} \frac{a^2}{aq - \frac{a}{q}yy} \boxed{+1 - \frac{a}{q}}$ ponatur $\overset{(2)}{\textit{aequ.}} \frac{vv}{\sqrt{aq \pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}\,\boxed{2}} + \frac{2v\sqrt{1 - \frac{a}{q}}}{\sqrt{aq \pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}}$ $\boxed{+1 - \frac{a}{q}}$ ergo fiet: $\frac{aa}{\sqrt{aq \mp y\sqrt{\frac{a}{q}}}} \overset{(3)}{\textit{aequ.}} \frac{aa}{\sqrt{aq \pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}} + 2v\sqrt{1 - \frac{a}{q}}$. Unde in aequ. (4) habetur valor ipsius y rationaliter per v. Iam quia ex valore 2. ipsius $\frac{zz}{aa}$ extrahi potest radix quadratica, fiet: $\frac{z}{a} \overset{(5)}{\textit{aequ.}} \frac{v}{\sqrt{aq \pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}} + \sqrt{1 - \frac{a}{q}}$ et pro y. substituendo valorem ex aequ. 4. habebitur in aequ. 5 ipsa z. rationaliter per v. Sed necesse est $\frac{a}{q}$ esse quantitatem

---

8–781,5 *Zum gestrichenen Zusatz, nicht gestrichen:* $\frac{a^2}{aq - \frac{a}{q}yy} + 1 - \frac{a}{q}$ revocentur ad unum denominatorem. Is variis modis divelli poterit in duos prout prius arbitrarie compositam fractionem multiplicaverimus.

9 *Zu* aequ. (4): Error.

9 in aequ. (4) *erg. L*

---

9 in aequ. (4): Gemeint ist die Gleichung (4) in N. 61$_1$; vgl. die Erl. zu S. 769 Z. 9 f.

affirmativam et minorem quam 1. sin minus poterunt quaedam mutari, ut res tamen succedat.

Loco aequ. 1. quaerimus valorem ipſius yy. fiet: $zzaq - \frac{a}{q}zzyy$ *aequ.* $\cancel{a^4} + a^3q - \frac{a^3}{q}yy - \cancel{a^4} + \frac{a^4}{qq}yy$. Ergo $\frac{b}{c}yy$ *aequ.* $\dfrac{bzzaq - ba^3q}{\frac{a}{q}zz - \frac{a^3}{q} + \frac{a^4}{qq}}$ *aequ.* $d + e$ ubi etiam variari potest in modo resolvendi in terminos duos.

[*Zusatz 3*]

$$\frac{\boxed{a^2} + aq\boxed{-aa} - \frac{a}{q}yy + \frac{a^2}{q^2}yy}{ay - \frac{a}{q}yy} \textit{ aequ. } \frac{zz}{aa} \textit{ aequ. } \frac{a^2q^2 - 2a^2yy + \frac{a^2}{q^2}y^4 + \frac{a^3}{q}yy - \frac{a^3}{q^3}y^4 \odot}{\boxed{2}\,\overline{aq - \frac{a}{q}yy}}.$$

Ut ergo numerator fiat quadratus ponatur y *aequ.* $\dfrac{b^3 + 3c^2v + dvv}{e^2 + 2ev + vv}\ \dfrac{\text{☽}}{\text{♀}^2}$. Sit compendio

$$\begin{array}{lll}
-2a^2 + \frac{a^3}{q} & \textit{aequ.} & r^2 \text{ et } \frac{a^2}{q^2} - \frac{a^3}{q^3} \textit{ aequ. } \frac{s}{a} \text{ fiet:} \\
\odot\,[\text{♀}^8\,] & \textit{aequ.} & a^2q^2\text{♀}^8 + r^2\,\text{☽}^2\text{♀}^4 + \frac{s}{a}\,\text{☽}^4. \\
\text{☽}^2 & \textit{aequ.} & b^6 + 2b^3c^2v + 2b^3dvv + c^4v^2 + 2c^2dv^3 + d^2v^4. \\
\text{☽}^4 & \textit{aequ.} & b^{12} + 4b^9c^2v + 4b^9dvv + 2b^6c^4v^2 + 4b^6c^2dv^3 + 2b^6d^2v^4, + \\
 & & 4b^6c^4v^2 + 8b^6c^2dv^3 + 4b^3c^6v^3 + 8b^3c^4dv^4 + 4b^3c^2d^2v^5, + \\
 & & 4b^6d^2v^4 + 4b^3c^4dv^4 + c^8v^4 + [8]b^3c^2d^2v^5 + [4]c^6dv^5 + 4b^3d^3v^6 + \\
 & & 2c^4d^2v^6, +4c^4d^2v^6 + 4c^2d^3v^7 + d^4v^8. \\
\text{♀}^4 & \textit{aequ.} & e^4 + 4e^3v + 6e^2v^2 + 4ev^3 + v^4. \text{ et} \\
\text{♀}^8 & \textit{aequ.} & e^8 + 8e^7v + 28e^6v^2 + 56e^5v^3 + 70e^4v^4 + 56e^3v^5 + 28e^2v^6 + \\
 & & 8ev^7 + v^8.
\end{array}$$

10 ♀^{8} *erg. Hrsg.* 14 4 *L ändert Hrsg.* 14 2 *L ändert Hrsg.*

Quibus substitutis debet ⊙ comparari cum quadrato ipsius: $f+gv+hvv+kv^3+lv^4$, seu cum

$$\begin{array}{llllllll} f^2+2fgv & +2fhvv & +2fkv^3 & +2flv^4 & & & & \\ & +\ ggvv & +2ghv^3 & +2gkv^4 & +2glv^5 & & & \\ & & & +\ hhv^4 & +2hkv^5 & +2hlv^6 & & \\ & & & & & +\ kkv^6 & +2klv^7 & \\ & & & & & & & +l^2v^8. \end{array}$$

Sed hinc apparet terminos comparandos esse novem, arbitrarios vero tantum 8 quod non sufficit. Ergo ascendendum ad v^4, sed tunc rursus 17 termini comparandi et 16 arbitrarii tantum.

8 v^4, *(1)* seu faciendae *(2)* sed *L*

62. EXTRACTIO RADICUM PER INFINITAM SERIEM
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 102–103. 1 Bog. 2°. 4 S. Randbrechung außen ca 5 cm. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1468

E x t r a c t i o r a d i c. p e r i n f i n i t a m s e r i e m

Data aequatione aliqua ut $y^3 + by^2 + c^2y + d^3 \sqcap 0$ invenire valorem ipsius y saltem per infinitam seriem, res maximi foret momenti, posset enim ita omnis aequatio resolvi per solam tabulam logarithmorum.

Ut si fieret $y \sqcap \begin{array}{lll} +\dfrac{b}{1} & -\dfrac{b^2}{2} & +b^3 \\ & -c & +c^4 \\ & & +d^3 \end{array}$ etc. in infinitum certo modo; utique fieret numeri b^3, c^4. aliaeque id genus ab his numeris, qui cogniti supponuntur altissimae potestates sine multiplicatione per solos logarithmos inveniri possunt. Mihi diu super eo negotio successu irrito meditanti, praeclara tandem analytica incidit via.

Nimirum opus esse, ut duae habeantur aequationes, quarum una saltem infinita sit, eandem habentes incognitam. Tametsi enim reapse sint identicae, id tamen non potest apparere; et tum minime, cum pro arbitrio finimus. Necesse est autem aequationem infinitam esse talem, ut, potentiae ipsius y sint decrescentes, unitate nimirum assumta longe maiore quam y (: quanquam videndum sit, an non res eodem modo succedat, etsi non decrescant :). Habitis iam duabus aequationibus eandem includentibus incognitam; (tametsi identicas) quarum alterutra (vel etiam utraque) sit infinita. Excerpamus finitam ex

6 Inventum mense Iunio 1676. Haec aliter longe melius iam habuimus.

14 possunt. *(1)* Videndum autem *(2)* Mihi *L* 16 aequationes, *(1)* una infinita, altera *(2)* quarum *L* 17 non | statim *gestr.* | potest *L* 20 quam y *erg. L* 22 infinita. *(1)* Eius ope *(2)* Excerpamus *(a)* inde *(b)* finitam *L*

23 aliter: Andere Methoden, Wurzeln in Reihen zu entwickeln, behandelt Leibniz in N. 32, 33, 38_{15} S. 518 Z. 6 – S. 523 Z. 18, sowie in *Schediasma de extractione radicum*, dat. September 1674, *LSB* VII, 1 N. 125.

infinita, subsistendo alicubi, cum error futurus sit exiguus. Et ita habebimus duas finitas aequationes, vel potius determinationes, aut saltem aequationem et determinationem; unam includentes incognitam, et earum ope ex altera alterius potentias tollemus, et habebimus denique determinationem, quae ipsam incognitam pure contineat seu habebimus valorem ipsius y. purum prope verum. Quem notemus. Et resumta aequatione infinita, ex ea rursus determinationem excerpamus priore propiorem, magisque exactam. Hanc rursus finitae aequationi coniungendo, et ope duarum aequationum vel aequationis et determinationis omnes praeter infimam dignitates tollendo, habebitur rursus determinatio nova, seu propior adhuc valor ipsius y.

Et ita porro in infinitum propiores semper ac propiores habebuntur determinationes, quarum novissima sed quae scribi nequit ipsi y. perfecte aequabitur; tametsi autem omnes scribi non possint, series tamen earum ac progressio apparebit, quod sufficit. Habita iam hac determinationum progressione, locentur illae ordine, et quaerantur earum differentiae, series differentiarum in infinitum aequabitur perfecte quantitati incognitae quaesitae.

Habemus ergo valorem ipsius y. purum infinitum.

Superest tantum, ut modos explicemus quibus data aequatione aliqua finita possit aliqua inveniri infinita ipsi identica: Tales autem modi sunt infiniti. Illum primo, qui cogitandi materiam dedit, explicabo. Versabar in logarithmorum meditatione, cogitabamque aequatione in analogias resoluta, an non possit res absolvi per logarithmos. Ostendit sese via quaedam, sed quam velut nimis operosam omisi; interea videbam, quid consequeretur, si pro logarithmis eorum valores ex supposita hyberbolae quadratura inventi, adhiberentur.

Sit aequatio: $y^3+by^2+c^2y \sqcap d^3$. Haec variis utique modis resolvi potest in analogiam, sed nos uno simplicissimo utamur, qui talis est: $\dfrac{y^2+by+c^2}{d^2} \overset{(1)}{\sqcap} \dfrac{d}{y}$. Iam logarithmus ab y^2+by+c^2 sit λ. Logarithmus ab y sit l. Logarithmus a d sit $l\overline{d}$. et logarithmus a: d^2, erit $2\,l\overline{d}$. Ex aequationis vi necesse est esse: $\lambda - 2\,l\overline{d} \sqcap l\overline{d} - l$ vel $\lambda + l \overset{(2)}{\sqcap} 3\,l\overline{d}$. ubi $l\overline{d}$ cum sit logarithmus cognitae quantitatis d, potest pro cognito haberi. Incognitae autem huius aequationis sunt $\underline{\lambda}$ et $\underline{l}$.

4 denique *erg.* *L* 4 quae *(1)* valorem ipsius y *(2)* ipsam *L* 4 contineat *(1)*. *(a)* Hanc determinationem notemus. Et iam *(aa)* reassumtis duabus *(bb)* reassumta prima aequatione infinita ex ea *(b)* Ha *(2)* seu *L* 10 f. determinationes, *(1)* quarum differentiae *(2)* quarum novissima *(a)* ipsi *(b)* sed *L* 24 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{y}}$. *(1)* id est *(2)* Iam *L* 26 $\mathrm{l}\overline{\mathrm{d}} - \mathrm{l}$ *(1)* ipse autem *(2)* vel *L*

Generaliter autem ex hyperbolae quadratura constat, quantitate aliqua existente A, logarithmum eius assumta quaedam unitate constante, (maiore quam A,) fore $\frac{A}{1} - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4}$ etc. Ergo huius ope valores ipsarum λ et l inveniemus: nam quia l est logarithmus ab y. erit $l \overset{(3)}{\sqcap} \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}$ etc. et eodem modo λ erit $\overset{(4)}{\sqcap}\ \frac{y^2+by+c^2}{1} - \frac{\boxed{2}\overline{y^2+by+c^2}}{2} + \frac{\boxed{3}\overline{y^2+by+c^2}}{3}$, etc. Modo ut dixi unitas assumta sit maior, quam y. item maior quam y^2+by+c^2. Hos valores literarum λ et l inventos in aeq. 3. et 4. inserendo in aeq. 2. habebitur aequatio in qua y assurgit ad dimensiones infinitas, fiet enim:

$$\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \text{ etc. } + \frac{y^2+by+c^2}{1} - \frac{\boxed{2}\overline{y^2+by+c^2}}{2} + \frac{\boxed{3}\overline{y^2+by+c^2}}{3} \text{ etc.}$$

$\overset{(5)}{\sqcap}\ 3l\overline{d}$. Digeratur illa in ordinem, secundum potentiarum gradus ab infimis incipiendo, apparebit nihilominus progressio in infinitum. Compendii autem causa aequationem hanc semel digestam ita scribemus: $e - fy + gy^2 - hy^3$ etc. ita ut numeri 1. 2. 3. 4. pro quantitatibus sive literis quales calculus daret, habeantur, et fiet aequatio aequivalens ipsi 5: $e - fy + gy^2 - hy^3$ etc. $\overset{(6)}{\sqcap}\ 3l\overline{d}$.

Habemus ergo aequationes duas alteram finitam ab initio propositam; $y^3 + by^2 + c^2y \overset{(7)}{\sqcap}\ d^3$. alteram infinitam 5 vel 6. Quae tamen duae aequationes plane coincidunt, tametsi ea congruentia infiniti larva tecta, menti humanae, nisi re ad origines revocata, clare apparere non possit. Necesse est tamen coincidere, sive idem inventum iri, sive per priorem sive per posteriorem inveniatur y, quia ipsa 6, ipsius 7. vel 1. non nisi consequentia est, nec quicquam extrinsecus est assumtum. Unde si ope unius y. perfecte ex altera tolleretur, quod tentari non inutile foret, et fieri utique est, saltem observato in

2 eius *(1)* fore: *(2)* assumta *L* 2 constante, (| multo *gestr.* | maiore *L* 5 sit | multo *gestr.* | maior *L* 6 valores | ipsarum *gestr.* | literarum *L* 12 scribemus: *(1)* ey − fy^2 + gy^3 − hy^4 *(2)* e − fy + gy^2 − hy^3 *L* 13–15 aequatio | aequivalens ipsi 5 *erg.* | : *(1)* ey − fy^2 + gy^3 − hy^4 *(2)* e − fy + gy^2 − hy^3 etc. $\overset{(6)}{\sqcap}$ *(a)* 3l$\overline{\text{d}}$. Nam 3, quippe verum numerum, ut a numeris literas valentibus, distinguatur, parenthesi includo. Aequatio autem data *(aa)* est *(aaa)* huic novae infinitae *(bbb)* 1, *(bb)* 1, est *(b)* 3l$\overline{\text{d}}$. | aequivalens ipsi *erg. u. gestr.* | Habemus *L* 20 si *(1)* posset ope unius y tolli ex altera *(2)* ope *L* 21 foret, *(1)* tametsi en *(2)* pro *(3)* et *L*

infinitum progressu, fieret aequatio plane identica, quippe non nisi inter cognitas quantitates. Aequationes autem identicas invenire seu quae sint inter cognitas quantitates idem est quod invenire compendia sive summas, ut alibi animadverti. Quare nec ista inquisitio suo fructu careret. Sed nos ad nostram regrediemur.

Habitis duabus aequationibus finitis eandem incognitam includentibus constat semper valorem illius incognitae posse inveniri pure. Sed in infinitis, singulari opus est arte, quam generatim ab initio expositam nunc exemplo declarabo: Ac primum ex aequatione 6. possumus excerpere determinationes, easque tanto magis exactas, quanto longius progredimur. Ponamus nunc facilitatis causa, rem ita comparatam esse, ut sit e maior vera y, et $e - fy$ minor vera y; $e - fy + gy^2$ maior vera, et ita porro alternando in infinitum. Nam praeterquam quod id fortasse semper certis artibus obtineri potest; poterit simile quiddam praestari, tametsi id non succederet, hoc modo. Quoniam enim literae $e.\,f.\,g.$ etc. aliaeque infinitae in paucas tantum, nempe $b.\,c.\,d.$ resolvuntur; et posteriores potentias harum trium constantium continent, quae potentiae (posita unitate ipsis $b.\,c.\,d.\,y.\,y^2 + by + c^2.$ maiore) sunt semper decrescentes, hinc determinationes ita excerpi scribique poterunt formulae; quarum prima sit maior vera; prima demta secunda minor, prima demta secunda addita tertia maior, tametsi illae formulae non sint unius tantum potestatis ipsius y, sed plures semper tamen finitas, contineant.

Nos vero ut dixi facilitatis causa et in exemplum ponamus esse: e maiorem quam y; at $e - fy$ minorem quam y; et $e - fy + gy^2$, maiorem: erit prima determinatio haec: $e \sqcap y$. seu determinatio $y \overset{(8)}{\sqcap} e$. Aequatio haec: $y^3 + by^2 + c^2y \overset{(7)}{\sqcap} d^3$. Ubi in aequatione pro y^3 et y^2, substituendo determinationem fiet $e^3 + be^2 + c^2y \sqcap d^3$, et $y \overset{(9)}{\sqcap} \dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$.

2 seu ... sint *erg.* *L* 5 Habitis | ergo *gestr.* | duabus *L* 7 quam *(1)* paulo ante *(2)* generatim *L* 8 excerpere *(1)* partem quae sit maior vera *(2)* determinationem, eamque tanto magis exactam *(3)* determinationes *L* 9 sit *(1)* ey maior vera, ey $-$ fy^2 *(a)* maio *(b)* minor vera; ey $-$ fy^2 + gy^3 *(2)* e maior *L* 11 Nam *(1)* etsi id non *(2)* praeterquam *L* 13 f. posteriores *(1)* priorum, *(2)* potentias *L* 16 secunda *(1)*, tertia *(2)* minor *L* 19 esse: *(1)* ey maiorem quam y; ut ey $-$ fy^2 minorem quam y; et ey $-$ fy^2 + gy^3 *(2)* e maiorem *L* 21 seu ... y $\overset{(8)}{\sqcap}$ e *erg.* *L*

3 alibi: N. 48. 21 $y \overset{(8)}{\sqcap} e$: Die Ungleichung (8) fügt Leibniz erst nach der Numerierung der Gleichung (7) in den Text ein.

Rursus ex infinita excerpendo: $e - fy \sqcap y$ fiet: $y \overset{(10)}{\sqcap} \dfrac{e}{1+f}$ et $y^2 \sqcap \dfrac{e^2}{1+2f+f^2}$ et $y^3 \sqcap \dfrac{e^3}{1+3f+3f^2+f^3}$. Quos valores ipsarum y^2. et y^3. inserendo in aeq. 7. fiet:

$$\frac{e^3}{1+3f+3f^2+f^3} + \frac{be^2}{1+2f+f^2} + c^2y \sqcap d^3 \text{ et } y \overset{(11)}{\sqcap} d^3 - \frac{be^2}{\boxed{2}\,\overline{\overline{1+f}}} - \frac{e^3}{\boxed{3}\,\overline{\overline{1+f}}}.$$

Rursus excerpendo: $e - fy + gy^2 \overset{\text{☿}}{\sqcap} y$ vel $ey - fy^2 + gy^3 \sqcap y^2$, et pro aeq. 7. scribendo $gy^3 + gby^2 + gc^2y \sqcap gd^3$ fiet: aequationem determinationi coniungendo: $ey - fy^2 \boxed{+gy^3} + gd^3 \sqcap y^2 \boxed{+gy^3} + gby^2 + gc^2y$. Unde $y^2 \sqcap \underbrace{gd^3 + \begin{array}{l} e \\ -gc^2 \end{array} y \smile 1+gb+f}_{\odot}$ et $y^2 \sqcap \underbrace{\begin{array}{l} +1 \\ +f \end{array} y - e \smile g}_{☽}$.

Ergo $\odot$ maior quam y^2, erit etiam maior quam id quod est minus quam y^2, nempe maior quam ☽. Ergo fiet: $gd^3 + \begin{array}{l} e \\ -gc^2 \end{array} y \smile 1+gb+f \sqcap \begin{array}{l} +1 \\ +f \end{array} y - e \smile g$. Unde rursus haberi poterit valor ipsius y. prope verus: ut si $1+f$ vocemus h, et $e-g^2c$ vocemus m. fiet $\dfrac{gd^3+my}{h+gb} \sqcap \dfrac{hy-e}{g}$, sive $g^2d^3 + gmy \sqcap \begin{array}{l} +h^2 \\ +gbh \end{array} y \begin{array}{l} -eh \\ -gbe \end{array}$. et $y \overset{(12)}{\sqcap} \dfrac{eh+gbe+g^2d^3}{gbh+h^2-gm}$.

Et ita porro in infinitum continuando semper habebuntur determinationes magis magisque exactae seu valores maiores minoresque veris in infinitum. Atque hic duo examinanda sunt, primum an ex una determinatione artis ut ☿ atque aequatione ut 7. inter se iunctis, una tantum determinatio pura nempe 12. proditura sit etsi aliis atque aliis modis in potentiis altioribus ipsius y. ope huius coniunctionis tollendis procedas. Quod si varia vario tractandi modo provenire possunt, examinandum [quid] sit simplicissimum; deinde videndum, an semper certa sit determinationis ratio, per $\sqcap$ vel $\sqcap$, ut quemadmodum ex excerpta $e \sqcap y$ ex aequatione 7. prodiit determinatio $y \sqcap \ldots$ ita in determinatione

1 ex infinita *erg. L* 10 fiet: *(1)* semper *(2)* y *(3)* gd^3 *L* 16 valores *(1)* maioresque veris infiniti *(2)* magis magisque proposi *(3)* maiores *L* 17 artis ut ☿ *erg. L* 18 pura *(1)* prodeat, etsi variis modis in poten *(2)* nempe *L* 20 possunt, *(1)* examinandus quis *(2)* examinandum | quis *ändert Hrsg.* | sit *L* 21 semper *(1)* si determinatio sit per $\sqcap$ *(2)* assumta sit per $\sqcap$ etiam certo modo ut in *(3)* certa *L*

☿ excerpendo $1 - fy + gy^2 \sqcap y$. debent fieri $y \sqcap \dfrac{eh\,\text{etc.}}{gbh\,\text{etc.}}$ et in 12. sive an valor ille in 12. sit affirmativus.

Quae omnia discutienda sunt ut appareat an determinationes purae iusto maiores ac minores se sequantur alternis; uti excerptae non purae maiores minoresque veris se alternis sequuntur.

Illud vero cavendum inprimis ut sequentes sint semper praecedentibus accuratiores, alioqui nihil ageretur. Porro quoniam haec sublatio ad altiores potentias haud dubie calculum valde attolleret, ideo forte posset in locum aequationis 7. uti duabus primis determinationibus ex ea factis quarum una est $y \sqcap \dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$ et $y \sqcap d^3 - \dfrac{be^2}{\boxed{2}\overline{1+f}} - \dfrac{e^3}{\boxed{3}\overline{1+f}}$. Atque ita habebuntur facillimo negotio determinationes magis magisque accedentes in infinitum; in excerptis pro y. hos valores substituendo verum quoniam non est certum, ultimam harum infinitarum determinationum aequari incognitae; ideo istud quidem compendium non est aptum ad rem nostram.

Inventis iam determinationibus earumque progressione excedentes separatim; deficientes separatim, ordine collocemus; modo magis magisque accedant verae, et ultimae, veram quantitatem attingant. Nunquam autem, credo, excerptae adhibendae, sed semper ex illis et aequatione factae:

Valores veris

minores	maiores
$\dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$	$d^3 - \dfrac{be^2}{\boxed{2}\overline{1+f}} - \dfrac{e^3}{\boxed{3}\overline{1+f}}$
$\dfrac{eh + gbe + g^2d^3}{gbh + h^2 - gm}$	etc.
etc.	etc.

y

4 se *(1)* ordine sequantur; *(2)* sequantur *L* 5 f. sequuntur. *(1)* Ponamus *(2)* Inventis iam determinationibus earumque progressione; *(a)* erit *(b)* eas *(c)* ex *(d)* excedentes separatim, ac deficientes separatim ordine collocemus; modo quo ordine inveniuntur magis magisque *(3)* Illud *L* 7 ageretur. *(1)* Poterit etia *(2)* Porro *L* 8 f. determinationibus *(1)* nempe *(a)* y $\sqcap$ *(b)* y $\sqcap$ e. et *(aa)* y $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{d}^3-}{}$ *(bb)* y $\sqcap$ *(cc)* y $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{f}}$. Una *(2)* ex *L* 11 in excerptis ... substituendo *erg. L* 16 attingant. *(1)* Et hinc iam *(2)* Ponamus ita stare: *(3)* Nunquam autem |, credo, *erg.*| excerptae *L*

Ubi notandum haec series etsi conveniant in novissima, tamen in eo differre a Gregorianis, quod ipsi necessarium est, ut eodem modo componantur duae tertiae ex duabus secundis, quo duae secundae ex duabus primis. Nobis vero nulla hoc loco cura huiusmodi compositionum, quaerimus enim tantum series infinitas rationales cognitas incognitae aequales. Nullus tamen dubito quin plerumque etiam Gregorianus componendi modus ad alias contemplationes utilis, accedere possit.

Nunc ut ostendam, quomodo hinc inveniri possit valor infinitus incognitae, idque duobus semper modis. Nempe sive iusto minorum:

Series crescentium A B C D E etc.

y

Series decrescentium א ב ג V W etc.

Hinc duas ducemus series infinitas ipsi y aequales.

Series crescentium A B C D E etc. y

Differentiae β γ δ η etc.

erit y *aeq*: $A+\beta+\gamma+\delta+\eta$ etc.

Series decrescentium: א ב ג V W etc. y

Differentiae: θ ψ μ ξ

et א $\sqcap\ \theta+\psi+\mu+\xi+y$, et fiet y *aeq.* א $-\,\theta-\psi-\mu-\xi$ etc.

Rem ergo succedere nullum dubium est, idque infinitis modis: Tantum de simplicissimis rationibus cogitandum.

Tum, quoad modum inveniendae aequationis infinitae, tum quoad modum, inde eliciendarum determinationum.

---

1 Si in aequatione infinita inventa non reperiatur alternis + et −; tunc non nisi semel series in quaesitam incognitam desinens habetur, quod nobis sufficit, neque enim convergentibus opus habemus.

7 possit *(1)* series *(2)* valor *L* 8 Nempe *(1)* sint series crescentium in infinitum *(2)* sit *(3)* sive *L* 20 f. cogitandum. *(1)* Et si quidem per logarithmos procedere placeat: forte non erit inutile resolvere *(2)* Tum *L* 22–790,1 determinationum *(1)*, quoad modum *(2)*. *(a)* Quoad modum *(b)* Ad inveniendam aequationem infinitam procedere possumus vel per logarithmos; *(c)* Aequationem *L* 23 aequatione *erg.* *L*

---

1 f. Gregorianis: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Def. 9 S. 10 [Marg.].

A e q u a t i o n e m   i n f i n i t a m , vel iam habemus, vel quaerimus: iam h a b e m u s ut in problematis tetragonisticis de quibus postea. Q u a e r i m u s in aequationibus resolvendis, vel ordinatis rationalibus curvarum inveniendis: quod fit radice ex aequatione curvae naturam explicante, per seriem infinitam extracta. I n v e n i e m u s vel per logarithmos, vel sine logarithmis. P e r   l o g a r i t h m o s , tum quo dixi modo, tum vero fortasse meliore, si aequatio data resoluta sit in analogias simplices, ut si sit $\dfrac{y+b}{y+c} \sqcap \dfrac{y+e}{y+f}$. Analogia facta ex aequatione. Et videtur quaevis aequatio data resolvi posse in eiusmodi analogias, quotcunque sit graduum, nam idem erit ac si dicas: $y+b,\ y+f,, \sqcap\ y+c, y+e$. Nec video quid prohibeat generaliter scribi: $1y+b, 2y+c$, $3y+d$,, etc. $\sqcap$ $4y+e, 5y+f, 6y+g$ etc. continuando quantum satis est, pro gradu resolvendae aequationis, inde ducendo in se invicem, poterit aequatio inde proveniens ordinari, et cum data eiusdem gradus conferri.

Et hac methodo quaevis aequatio data optime resolvetur in analogias. Iam logarithmus ab $y+b$. erit $\dfrac{y+b}{1} - \dfrac{y^2+2by+b^2}{2}, + \dfrac{y^3+3y^2b+3yb^2+b^3}{3}$ etc. eodemque modo logarithmus ab $y+f$. tantum pro b. ponendo f. Unde postea logarithmi illi plures ordine additi aut subtracti aequationem dabunt novam eamque infinitam. S i n e   l o g a r i t h m i s videtur aequatio infinita ex data fieri posse dividendo, ut si sit

---

9 f. NB. 1. 2. 3. numeri sunt hic pro literis.

---

1 f. quaerimus: iam *(1)* inf *(2)* h a b e m u s *(a)* tunc au *(b)* ut *L* 2 f. in *(1)* problematis *(2)* aequationibus *L* 3 inveniendis: *(1)* nam ex hac aequatione *(2)* quod fit radice *(a)* infin *(b)* ex *L* 6 vero *(1)* simplicior *(2)* fortasse *L*

17–791,2 sit *(1)* | aequatio *streicht Hrsg.* | divisor $\dfrac{y^2+by+c^2 ⨍ y}{y+v}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\boxed{y^2}$ *L*

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{llll}
\boxed{y^2} & \boxed{+by} & \boxed{+c^2} & \\
\hline
y & \begin{matrix}+b\\-v\end{matrix} & \dfrac{+c^2-bv-v^2}{y} & \dfrac{-c^2+bv^2+v^3}{y^2} \\
\hline
\end{array}
\left\{\begin{array}{l} +c^2v \\ -bv^3 \\ \dfrac{+v^4}{y^3} \end{array}\right. \text{etc.} \\
\quad\boxed{y+v} \\
\boxed{-y^2}\ \boxed{-vy} \\
\qquad\boxed{y+v} \\
\quad\boxed{\begin{matrix}-by\\+vy\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-bv\\-v^2\end{matrix}} \\
\qquad\quad\boxed{y+v} \\
\qquad\quad\boxed{\dfrac{-c^2+bv^2+v^3}{y}} \\
\qquad\qquad\quad\boxed{y\ +\ v}
\end{array}$$

1–11 *Randbemerkungen*:

Nota non tota aequatio sed una tantum pars sic dividi debet.

Alium etiam appropinquandi modum excogitavi. Aequatio v. g. y^2+by+c^2, multiplicetur verbi gratia per y, fiet: $y^3+by^2+c^2y$. Explicetur y per $x+e$, fiet aequatio alia, quae forte utilius dividetur tentando quam prima, praesertim cum tunc tam e, quam dividens $x+v$, sit arbitraria.

14 *(1)* Alium mihi modum proposueram ut si aequatio $\mathrm{y}^2+\mathrm{by}+\mathrm{c}^2 \sqcap 0$. dividatur per $\mathrm{y}+1$. vel aliam et restat fractio *(a)* haec negli *(b)* affirma *(2)* Alium *L* 14 excogitavi. *(1)* Dividatur aequatio per aliquam quantitatem et notetur fractio. Et rursus per aliam; *(2)* Aequatio *L*

---

8 $-v^2$: Richtig wäre $+v^2$. Der Vorzeichenfehler sowie ein weiterer Flüchtigkeitsfehler — der erste Term im Zähler des Bruches Z. 10 müßte c^2v lauten — beeinträchtigen das Ergebnis der Division, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

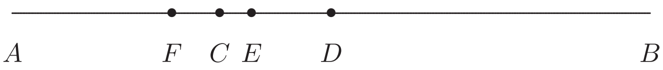
Sed haec dividendi ratio habet difficultates multas ob causas, nam si v non est iam una ex radicibus divisione in infinitum quidem producta, procedit, si vero est una [ex] radicibus, ipsamet incognita est adeoque inutilis. Remedium vero succurrit: Sit aequatio: $y^2 - c^2 \sqcap by$, poterit scribi: $y - c \sqcap \dfrac{by}{c+y}$ et dividendo fiet: $y - c \sqcap \dfrac{by}{c} - \dfrac{by^2}{c^2} + \dfrac{by^3}{c^3} - \dfrac{by^4}{c^4}$ etc. in infinitum, modo sit c maior quam y seu modo series sit decrescens: et haec videtur simplicissima ratio esse aequationem propositam finitam convertendi in infinitam. Ex qua determinationes eliciendo, easque cum ipsa aequatione coniungendo valores puri invenientur appropinquantes; quorum differentiae dabunt seriem infinitam.

Ex generali invento: Quod data serie infinita appropinquantium ad differentiam infinite parvam, habetur etiam series infinita aequalis, nimirum series differentiarum: ista pendent omnia. Unde iam olim notavi etiam ex Wallisii invento inveniri posse seriem aequalem circulo ex dato radio; et contra radium ex data circumferentia, sed illud incommodum in Wallisii methodo, quod non datur applicatio commoda ad partes.

Incidit hic alius appropinquandi modus, quem experiri operae pretium est. Dividatur aequatio proposita $y^2 + by + c^2 \sqcap 0$. per quantitatem $y - v$ arbitrariam, fiet fractio, quae alia atque alia erit, prout explicabitur v. Explicetur v, pro arbitrio, ut per 1. erit fractio vel quantitas affirmativa vel negativa, si affirmativa, erit minor iusto divisor; sin sit negativa, erit maior iusto (+ vel contra pro signis +). Qualiscunque sit sumatur alia ipsius v. explicatio, tunc ut fractio sit contraria, cum antea fuerit negativa, nunc fiat affirmativa, et tunc consistet radix intra duos valores ipsius v. Et ita porro sumendo aliquem medium inter hos duos valorem novum, iterum dividemus, eodemque modo experiemur. Et ut certae cuidam regulae hanc appropinquationem attingemus, poterimus semper differentiam inter duas inter quas consistitur novissime bisecare; vel etiam trisecare. Sed naturalior est bisectio.

1 ratio *(1)* mihi displicet *(2)* habet *L* 2 ex *erg. Hrsg.* 3 f. aequatio: *(1)* $\mathrm{y}^2 - \mathrm{byc}^2 \sqcap \mathrm{c}^2$ poterit scribi: $\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{c}^2}{}$ *(2)* $\mathrm{y}^2 - \mathrm{c}^2 \sqcap \mathrm{by}$, poterit scribi: *(a)* $\mathrm{y} + \mathrm{c} \sqcap \dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{y} - \mathrm{c}}$ *(b)* $\mathrm{y} - \mathrm{c} \sqcap$ *(aa)* $\dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{y} + \mathrm{c}}$ *(bb)* $\dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{c} + \mathrm{y}}$ *L* 7 puri *erg. L* 10 differentiarum: *(1)* Varios alios modos dari posse arbitror *(2)* ista *L* 16 Explicetur v, *(1)* primum ita, ut fra *(2)* pro *L* 18 sit *(1)* quaeratur alius di *(2)* sumatur *L* 19 tunc *(1)* vel ex fract *(2)* ut *L* 23 bisecare *(1)*. *(a)* Poterit *(b)* Posset aliud etiam eligi sed ingen *(2)*; vel *L*

11 olim notavi: nicht ermittelt; ähnlich N. 69; ex Wallisii invento: *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191 S. 178–182 (*WO* I S. 467–469).



[*Fig. 1*]

Est tamen hoc in eo incommodum, quod ita bisecando AD differentiam inter duos valores ad inveniendum punctum C, aliquando eveniet, ut ipsum C incognitum punctum transsiliamus. Nempe bisecando ipsam AB, in D, transsiliemus C, quaesitum et postea non amplius inter D et B, ut in prioribus forte fiebat, sed inter A et D consistet quaesitum, ubi rursus bisecando [AD] in F, consistet punctum C, adhuc inter F et D. Sed rursus FD bisecando in E, contrarium iterum eveniet nec erit punctum C inter E et D, sed inter F et E.

Cumque ista methodus non fere nisi in numeris procedat, nec constanti quadam ratione progrediatur; nec denique sit revera appropinquans ad distantiam infinite parvam; ac denique plane non serviat ad aequationes illas in quibus ipsae pro cognitis assumtae sunt indefinitae, ut fit in aequationibus curvarum; ideo ad nostrum scopum nihil servit. Et redeundum est ad viam illam sane pulcherrimam, hic apertam, ut praeter datam aequationem adhuc alia, infinita, inveniatur.

Aequatio $a^2 - x^2 \overset{\odot}{\sqcap} y^2$. seu $a - x \sqcap \dfrac{y^2}{a+x}$ fietque:

$$a - x \overset{\rightmoon}{\sqcap} \frac{y^2}{a} - \frac{y^2x}{a^2} + \frac{y^2x^2}{a^2} - \frac{y^2x^3}{a^4} + \frac{y^2x^4}{a^5} \text{ etc. vel } x \sqcap a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} \text{ etc.}$$

Ponendum est autem esse a maiorem quam x. nam si minor foret, possemus nihilominus idem praestare, ita aliter dividendo, y^2 non per $a + x$ sed per $x + a$, ut semper sit a in summo, x in imo. Hinc patet esse

$$x \overset{(1)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} \qquad x \overset{(2)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3}$$

$$x \overset{(3)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} - \frac{y^2x^4}{a^5}$$

3 punctum C, *(1)* et mox *(2)* aliquando *L* 4 transsiliamus *(1)*; cum sat *(2)*. Nempe bisecando *(a)* in C, *(b)* ipsam *L* 6 AC *L ändert Hrsg.*

15 Aequatio: vgl. N. 48 S. 679 Z. 10.

$$x \overset{\boxed{1}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2 x}{a^2} \qquad x \overset{\boxed{2}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4}$$

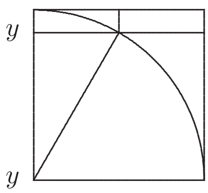
$$x \overset{\boxed{3}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} - \frac{y^2x^4}{a^5} + \frac{y^2x^5}{a^6}$$

Ubi ex $\odot$ et (1) fiet $\underset{a^2 - y^2}{x^2} \sqcap ax - \dfrac{y^2x}{a}$. et $x \sqcap a$. Ex (2) et $\odot$ fiet $x \sqcap a - \dfrac{y^2}{a} + \dfrac{y^2x}{a^2}$ $\llcorner\dfrac{-y^2a^2+y^4}{a^3}\lrcorner$, vel $x \sqcap \dfrac{a - \dfrac{y^2}{a},,\llcorner\dfrac{-y^2a^2+y^4}{a^3}\lrcorner}{[1] - \dfrac{y^2}{[a^2]}}$ vel $\dfrac{a^4 - y^2a^2,, - a^2y^2 + y^4 \smile a^3}{a^2 - y^2, \smile [a^2]}$, et divi-

---

793,15–20 *Nebenbetrachtungen*:

793, 15



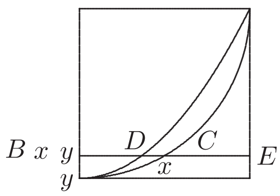
$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \sqcap \frac{1}{4} \text{ seu } \frac{3}{4} \sqcap \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{3}{(4)} \sqcap \frac{\sqrt{3}}{(2)}$$

$$\frac{3}{2} \sqcap \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \sqcap 2$$

793, 20



BC seu $x \sqcap BE$
BC seu $x \sqcap BD$

3 Ubi *(1)* antequam ill *(2)* lo *(3)* ex *(a)* 1 et $\odot$ fiet: *(b)* (1) fiet *(4)* ex $|\odot$ et *erg.*$|$ (1) fiet *L*
5 a *L ändert Hrsg. dreimal*

dendo per $a^2 - y^2$, fiet $\dfrac{a^2 - y^2}{a}$. Ergo $x \sqcap a - \dfrac{y^2}{a}$. (Credibile non alias habitum iri determinationes puras ex excerptis excedentibus quam ex deficientibus, saltem hic.)

Ex (3) et $\odot$ fiet: $\dfrac{a^2x - y^2x}{a},, + \llcorner \dfrac{y^2}{a^4} \frown a^2 - y^2 \lrcorner x,,, \sqcap \dfrac{a^2 - y^2}{a},, - \dfrac{y^2}{a^3} \llcorner \overline{a^2 - y^2}^{\,2} \lrcorner,, - \dfrac{y^2}{a^5}$ $\llcorner \overline{a^2 - y^2}^{\,4} \lrcorner$ et $ax \frown a^2 - y^2 \sqcap a^4 - y^2\overline{a^2 - y^2} - \dfrac{y^2\overline{a^2 - y^2}^{\,3}}{a^5}$ etc. Et ita porro.

$\dfrac{2}{1 + y^2} \sqcap 2 - 2y^2 + 2y^4 - 2y^6 + 2y^8$ etc. Iam $\dfrac{2}{2 + y^2 - 1} \sqcap 1 \; \dfrac{-y^2 + 1}{2} + \dfrac{\overline{y^2 - 1}^{\,[2]}}{4}$

$\dfrac{a}{b + c} \sqcap \dfrac{a}{b} - \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ac^2}{b^3} - \dfrac{ac^3}{b^4}$ etc. vel $\dfrac{1}{b + c} \sqcap \dfrac{1}{b} - \dfrac{c}{b^2} + \dfrac{c^2}{b^3} - \dfrac{c^3}{b^4}$ etc.

Ergo $\dfrac{2y^2}{1 + y^2} \sqcap 2y^2 - 2y^4 + 2y^6 - 2y^8$ etc.

$\dfrac{2y^2}{2, +y^2 - 1} \sqcap \dfrac{2y^2}{2} - \dfrac{2y^2, y^2 - 1}{4} + \dfrac{2y^2, \overline{y^2 - 1}^{\,2}}{8} - \dfrac{2y^2, \overline{y^2 - 1}^{\,3}}{16}$ et

$\omega \overset{\odot}{\sqcap}$ omn. $\dfrac{\cancel{2}y^2}{1 + y^2} \sqcap \dfrac{\cancel{2}y^3}{3} - \dfrac{\cancel{2}y^5}{5} + \dfrac{\cancel{2}y^7}{7} - \dfrac{\cancel{2}y^9}{9}$.

---

6 *Nebenrechnung*:
$$\frac{a}{b+c} \sqcap \frac{a}{b} - \frac{\frac{ac}{b}}{b+c}$$
$$- \frac{ac}{b^2} + \frac{\frac{ac^2}{b^2}}{b+c}$$
$$+ \frac{ac^2}{b^3} - \frac{\frac{ac^3}{b^3}}{b+c}$$

1 f. (Credibile ... hic.) *erg. L* 5 4 *L ändert Hrsg.* 9 $\omega \overset{\odot}{\sqcap}$ *(1)* s$^{\text{umma}}$ *(2)* omn. *L*

---

3 f. fiet: Die folgende Ungleichung weist im Ansatz mehrere Fehler auf und wird nicht konsequent umgeformt. Richtig gerechnet würde sich $ax\,(a^2 - y^2) > (a^2 - y^2)^2$ ergeben.

Et quia etiam $\frac{2y^2}{2+y^2-1}$ seu $\frac{\cancel{2}y^2}{1+y^2}$ est $\sqcap$ $\frac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}}, -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \llcorner \frac{y^4-y^2}{4} \lrcorner + \frac{y^6-2y^4+y^2}{8}$ $+\frac{y^8-3y^6+3y^4+y^2}{16}$ etc. fiet rursus $\int \frac{y^2}{1+y^2} \sqcap \omega \sqcap$ ☽ $\frac{\frac{y^3}{3}}{2} - \frac{\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}}{4} + \frac{\frac{y^7}{7}-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^3}{3}}{8}$ $-\frac{\frac{y^9}{9}-\frac{3y^7}{7}+\frac{3y^5}{5}-\frac{y^3}{3}}{16}$ etc.

Habemus ergo duos ipsius ω valores infinitos; et possemus habere adhuc plures. Porro ope harum duarum aequationum $\odot$ et ☽ valorem ipsius ω exhibentium poterit vicissim ipsa y. inveniri ex data ω. Quod ita fiet: Si duas diversarum aequationum infinitarum determinationes, ordine assumtas coniungamus, eo tantum observato, ut ex una excerpatur valor iusto maior, ex altera valor iusto minor, ita enim semper obtineri poterit valor purus; iusto maior vel iusto minor, semperque accedetur magis magisque ad verum, et seriei finis in ipsam quantitatem desinet.

Sit in exemplum $\omega \sqcap b - cy + dy^2 - ey^3$ etc. et rursus $\omega \sqcap ny - py^2 + qy^3 - ry^4$ etc. erit $\omega \sqcap b - cy$. et $\omega \sqcap ny$. et $y \sqcap \frac{\omega}{n}$, itemque $y \sqcap \frac{\omega - b}{c}$.

Rursus $\omega \sqcap b - cy + dy^2$. et $\omega \sqcap ny - py^2$. fietque $y^2 \sqcap \frac{ny-\omega}{p}$ et $y^2 \sqcap \frac{\omega-b+cy}{d}$. Ergo $\frac{\omega-b+cy}{d} \sqcap \frac{ny-\omega}{p}$. seu $\omega p - bp + cyp \sqcap dny - d\omega$. et fiet $y \sqcap \frac{p\omega + d\omega - bp}{dn - cp}$ quem valorem certis modis in duabus valoris y^2, determinationibus inserendo duae possent haberi determinationes purae, sufficit tamen haec una. Et ita continue pergendo.

Incidit hic compendium egregium in tollendis potestatibus excerptarum determinationum; quod alioqui difficile admodum et molestum. Compendium autem in ea consistit: ut ubique valorem purum prope verum proxime praecedentem, nunc excedentem nunc

4 ergo *(1)* duas aequationes infinitas *(2)* duos *L* 4 f. Porro *(1)* duae aequationes ipsius *(2)* ope *L* 6 fiet: *(1)* Si *(a)* fiunt d *(b)* ex una *(c)* unam ex aequat *(d)* ex qualibet aequatione unam excerpamus *(aa)* aequat *(bb)* determinationem, semper a minus *(2)* Si *(3)* Si ex duabus aequationibus duas semper determinationes conferamus *(4)* Si *L* 7 coniungamus, *(1)* primam maius *(2)* eo *L* 10 f. desinet. *(1)* | Sit *streicht Hrsg.* | $\omega \sqcap$ by *(a)* + *(b)* $-cy^2 + dy$ *(2)* Sit *L* 15 in *(1)* aequatione *(2)* aequationibus *(3)* duabus *L* 16 haberi *(1)* aeq *(2)* determinationes *L* 16 f. pergendo. *(1)* Ut iam in usu unius aequatio *(2)* Incidit *L* 19 ubique *(1)* determinationem proxime praecedentem *(2)* pr *(3)* valorem *(a)* prope *(b)* purum *L*

deficientem substituamus, ita enim nihilominus ultima determinatio desinet in quantitatem quaesitam. [Imo error est, ita enim omnes errores a primo ad ultimum usque in unum confundentur. Coeptae ergo viae est insistendum.]

2 f. [Imo . . . insistendum]: Die erste eckige Klammer stammt von Leibniz, die zweite ist vom Herausgeber ergänzt.

63. DE SERIEBUS CONVERGENTIBUS
[Juni 1676?]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 II 1 Bl. 179. 1 Ausschnitt ca 20,5 x 1,8 cm. 2 1/2 Z. auf Bl. 179 r°. Bl. 179 v° leer. — An der unteren Schnittkante Reste fremden Textes.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden; mit den konvergenten Folgen von J. Gregory befaßt sich Leibniz gehäuft im Juni 1676.

Si fingatur valor sectoris seu p o l y g o n o r u m s e r i e i c o n v e r g e n t i s in numeris dari, nemo mortalium scire potest, an non eodem modo componatur ex terminis convergentibus. Ideo ne ad κριτήριον quidem servit.

8 p o l y g o n o r u m *erg. L*

64. SERIES CONVERGENTES DUAE

[Juni? 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 311. 1 Bl. 2°. Ca 3/5 S. auf Bl. 311 v°. Von dem Blatt ist oben ein Streifen von ca 3 cm abgeschnitten worden. Auf Bl. 311 r° stehen zusätzlich Cc 2, Nr. 1456 (Druck in einem späteren Band der Reihe) und *De angulo contactus*, *LSB* VII, 1 N. 32.
Cc 2, Nr. 1455

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt. Mit den konvergenten Folgen von Gregory befaßt sich Leibniz gehäuft im Juni 1676.

$$\begin{array}{llllll} a. & & & b. & & \\ A & \sqcap & \dfrac{2ab}{a+b.} & B & \sqcap & \dfrac{a+b}{2}. \\ (A) & \sqcap & \dfrac{2AB}{A+B}. & (B) & \sqcap & \dfrac{A+B}{2}. \end{array}$$

S e r i e s   c o n v e r g e n t e s duae una a. A. (A) etc. altera b. B. (B) etc. Factum ex ipsis semper est ab. Nam $AB \sqcap ab$. et $(A)(B) \sqcap AB$. ergo $(A)(B) \sqcap ab$. Haec series est convergens seu differentia inter duos terminos tandem minor quavis quantitate data: Nam refert eam Gregorius in responso ad Hugenium *Transact.* Iul. 1668. et summam invenit. Sit ultimus terminus unius convergentium z, alterius etiam z, erit $z^2 \sqcap ab$. et $z \sqcap \sqrt{ab}$.

Similiter quandocunque quantitas habetur eodem modo composita ex terminis primis a. b. quo ex secundis A. B., inveniri potest terminus ultimus. Ego id addo, si esset una tantum series a. A. (A). et quantitas daretur eodem modo composita ex a. et A. quo ex A. et (A). haberetur etiam terminatio. Quia in seriebus replicatis suppono terminos ultimum penultimum et antepenultimum differre quantitate minore quam quae

18 f. $\sqrt{}$ab. *(1)* Eodem modo *(2)* Similiter *L*   22 seriebus *(1)* convergentibus *(2)* replicatis *L*

16 Gregorius: J. Gregory, *Answer to the animadversions of Mr. Hugenius*, *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 37 vom 13./23. Juli 1668 S. 733.

assignari possit, nempe differentiam terminorum a. A. (A). etc. tandem fieri minorem qualibet assignabili quantitate. Serierum replicatarum consideratio longe maioris est usus quam convergentium[,] patet ex illis quae duxi aliquando ex methodo tangentium inversa. Potest adiungi convergentia, cum consideramus duas curvas hoc modo expressas, serie replicata, se intersecare alicubi. Quaeratur hoc modo punctum intersectionis. Observo series convergentes Gregorianas plerasque omnes hoc habere, ut si ponantur a. b. aequales sint et A. B. aequales. Si $a \sqcap b$. erit

$$\begin{array}{cc} a & a \\ \\ \dfrac{2a^2}{a+a} & \dfrac{a+a}{2} \end{array} \quad \text{seu} \quad \begin{array}{cc} a & a \\ \\ a & a \end{array}.$$

Videndum an idem semper in caeteris, non puto esse necesse.

Porro ex regula de compositione simili; exhibente terminationem, videtur semper aequatio transcendens inveniri posse, ut Gregorius exprimit hoc modo seriem pro circulo et hyperbola convergentem. a. triangulum, b. trapezium,

$$\begin{array}{cc} a & b \\ A \sqcap \sqrt{ab} & \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}} \sqcap B \end{array}$$

finis seriei sector, termini seu membra polygona inscripta et circumscripta, quaeritur quantitas eodem modo composita ex a. b. quo ex A. B. Sit verbi gratia $a^\omega + b \sqcap A^\omega + B$. fiet aequatio haec: $a^\omega + b \overset{(1)}{\sqcap} \overline{\sqrt{ab}}^{\,\omega} + \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Cuius aequationis ope si inveniatur ω. poterit etiam ultimus terminus seriei, seu sector inveniri, nam inventa ω. utique erit nota $a^\omega + b$. Sit sector ignotus z. erit $z^\omega + z \sqcap \underbrace{a^\omega + b}_{\text{cognitae}}$. Adeoque inventa ω. habebitur et z. quod erat faciendum. Ecce ergo analyseos genus pro circulo et hyperbola. Porro: hinc videtur sequi ex data circuli quadratura, dari et quadraturam hyperbolae; eodem enim prorsus

2 quantitate *(1)* Observo series eiusm *(2)* Serierum *L* 12 ut *(1)* invenit *(2)* Gregorius *L* 14+16 trapezium, *(1)* terminus *(2)* finis *L* 17 composita ex *(1)* utroque, *(a)* trans *(b)* sit *(2)* a. b. *L* 21 erat *(1)* demonstrandum *(2)* faciendum *L* 22 circuli *(1)* et hyperbol *(2)* quadratura, *L*

3 duxi aliquando: vgl. N. 39. 12 Gregorius exprimit: Vgl. J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Scholium zu prop. V, S. 15. 15 $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$: Richtig wäre $\dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; vgl. die Erl. zu S. 758 Z. 7.

modo componitur sector circularis quo hyperbolicus. Saltem illud certum, eandem z. aliter inveniri posse, in hyperbola ex eo quod scimus logarithmos simpliciter ad eam rem servire. Sed ut verum fatear non video quomodo hinc sequatur eodem modo componi in circulo. Potuissemus aliter assumere infinitis modis. Sit v. g.

$a^{\omega\nu} + b^{\nu} + r \sqcap \sqrt{ab}^{\,\omega\nu} + B^{\nu} + r.$

Et talia possunt fieri infinitis modis. Et divelli posset etiam talis aequatio in duas.

Tota difficultas in his absolvendis in eo est, ut datis $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e$. inveniamus ω. Hoc ita tento dividamus e. in duas: $e - y$. et $+\,y$. fiatque: $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e - y + y$. et dividatur in duas: $a^{\omega} \sqcap e - y$. et $A^{\omega} \sqcap y$. Sed iam video id, si y. incognita esse inutile.

$x^2 + y^2 \sqcap \varphi$. Quaeritur relatio ad 2. Si aequatio $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e$. reduci potest ad aequationem $b^{\omega} \sqcap e$. poterit quadratura circuli reduci ad quadraturam hyperbolae; et aliae omnes.

Si $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap b$. *donne* $C^{\omega} \sqcap d$. sitque rursus aliunde $e^{\omega} \sqcap f$. et ω. et f. inveniri possunt ex quad. hyp. Poterunt omnes quadraturae solvi per quadraturam hyperbolae.

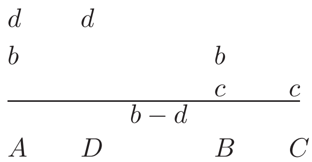
2 hyperbola *(1)*, et generaliter quidem ope *(2)* ex *L* 3 servire. *(1)* Quod si fiat ope ipsarum, a. b. *(2)* Sed ut *(a)* mirum video *(b)* verum *L* 4 circulo. *(1)* Caeterum aequatio 1. poterit dividi in duas, hoc modo: *(2)* Potuissemus *L* 12 f. omnes. *(1)* Imo hinc sequetur aliquam hyperbolae portionem posse quadrari, seu aliquem logarithmum posse inveniri; si scilicet series convergens sit summabilis aliunde, hac tamen methodo reduci poterit ad duas eiusmodi aequationes ubi bis idem logarithmus in diversis, unde, si hae reducibiles ad unam *(2)* Si *L* 13 $e^{\omega} \sqcap f$. *(1)* quadratura *(2)* et *L*

65. THEOREMA ANALYTICUM DE MAXIMIS ET MINIMIS
[April – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 15. 1 Streifen 20,7 x 4,7 cm. Unterkante stark geschwungen. 2 S. — Auf LH 4 V 10 Bl. 63 v° Teil der Stufe *(1)* der Lesart zu S. 803 Z. 4. Auf Bl. 63 r° *Extensio interminata*, *LSB* VI, 3 N. 66. Die beiden Streifen bildeten ursprünglich zwei zusammenhängende Teile eines Blattes. Vor dem Zerschneiden schrieb Leibniz den Text der Rückseite darunter noch einmal an, danach strich er die so entstandenen Fragmente durch.
Cc 2, Nr. 1139, 00 tlw.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Monate April bis Juli 1676 belegt.

Theorema analyticum pulcherrimum d e m a x i m i s e t m i n i m i s:



$AD \sqcap d$. $AC \sqcap b+c$. Sit $\underset{b}{AB}$ ad $\underset{c}{BC}$ ut z. ad v. erit $b^z c^v \sqcap d^z, \overline{b+c-d}^{\,\underline{v}}$ si modo supponatur d. differre a b. et esse minor quam $b+c$. Ergo $\dfrac{b}{d}^{\underline{z}} \sqcap \dfrac{b+c-d}{c}^{\underline{v}}$. Ergo $\dfrac{b^z-d^z}{d^z} \sqcap \dfrac{b-d}{c}^{\underline{v}}$ quoniam a posteriore nimium aufero. Ergo divisis omnibus per $b-d$ si ponatur $b \sqcap d$ erit:

16 AD ... b + c. *Am Rande erg. L* 18 quoniam ... aufero *erg. L* 19 si ... b ⊓ d *erg. L*

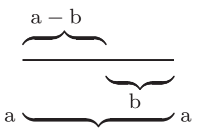
11 Theorema: M. Ricci, *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*, 1668 [Marg.], Problema primum S. 9; vgl. *LQK*, prop. XV S. 56–58.

$$\frac{b^{z-1}+b^{z-2}d^1+b^{z-3}d^2 \text{ etc}\ldots\ b^1d^{z-2}+d^{z-1}\odot}{d^z} \sqcap \frac{b^{v-1}+b^{v-2}d^1 \text{ etc.} + b^1d^{v-2}+d^{v-1}\text{☽}}{c^v}$$

et $\dfrac{\odot}{\text{☽}} \sqcap \dfrac{d^z}{c^v}$.

Nota termini componentes $\odot$ pariter et componentes ☽ sunt progressionis geometricae. Et haec redibit ad theorema Slusianum, qui in *Miscellaneis* cap. [4.] ita ait: Notum est (ait Slusius) in serie trium arithmetice proportionalium maximam ad mediam habere minorem rationem quam habet media ad minimam. Ideo quadratum mediae esse maius facto sub extremis, sed non aeque nota est propositio universalis $A\ \overset{r}{b}\ c\ D\ \overset{q}{e}\ F$ arithmetice crescentes. A minima. Numerus excessus inter A et D est r. inter D et F est q. Aio fore $\dfrac{A^{\underline{[r]}}}{D} \sqcap \dfrac{D^{\underline{q}}}{F}$.

2 f. $\sqcap \dfrac{\mathrm{d^z}}{\mathrm{c^v}}$. *(1)* Si b. non poneretur maior d. idem contingeret tamen ab altera *(a)* parte *(b)* parte, versus C seu pro b. *(aa)* substi *(bb)* semper intelligenda ea quae maior pon *(2)* Nota *L* 4 Miscellaneis | cap. 9. *erg L, ändert Hrsg.* | ita ait: *(1)* Notum est | ait Slusius *erg.* | in serie trium arithmetice proportionalium maximam ad mediam minorem habere rationem quam habet media ad minimam. Ideo quadratum mediae maius esse facto sub extremis, sed non aeque nota est *(a)* ut *(b)* propositio universalis A $\overset{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}$ c D $\overset{\mathrm{q}}{\mathrm{e}}$ F arithmetice crescentes. A minima. Numerus excessum inter A et D esto r. inter D et F esto q. Aio fore $\dfrac{\mathrm{A}^{\underline{\mathrm{z}}}}{\mathrm{D}} \sqcap \dfrac{\mathrm{D}^{\underline{\mathrm{q}}}}{\mathrm{F}}$. Unde etiam demonstrat *(aa)* esse *(bb)* si magnitudo quaelibet dividatur in ratione numeri ad numerum fore productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes sunt iidem numeri, erit omnium similium maximum. Sive postremum de maximo producto etiam sic enuntio



$\mathrm{b^b}, \overline{\mathrm{b-a}}^{\,b-a} \sqcap \mathrm{c^b}, \overline{\mathrm{a-c}}^{\,b-a}$ *(2)* Notum *L* 9 $\underline{\mathrm{z}}$ *L ändert Hrsg.*

---

1 ☽: Der richtige Wert von ☽ ist $\sum_{k=0}^{v-1} \binom{v-1}{k}\ b^{v-1-k}\ (-d)^k$. 3 Nota: vgl. M. Ricci, *a. a. O.*, Corollarium S. 8 f. 4–804,3 theorema Slusianum: *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 114–117. — Bereits 1673 hat Leibniz eine englische Übersetzung des Theorems aus der Besprechung in den *Philosophical Transactions* IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 906 kennengelernt (s. Cc 2, Nr. 500).

Unde etiam demonstrat si magnitudo quaelibet dividatur in ratione numeri ad numerum fore productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes iidem numeri, omnium [similium] maximum.

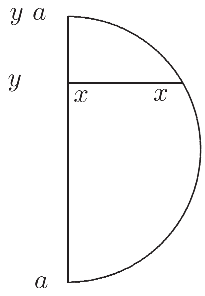
Hoc postremum etiam ita enuntio: $$a\,\underbrace{\overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{a-b}\underbrace{\hphantom{xxxx}}_{\mathrm{b}}}\,a \qquad b^b, \overline{b-a}^{\,b-a} \sqcap c^b, \overline{a-c}^{\,b-a}$$

3 possibilium *L ändert Hrsg.*

66. DE SERIE AD CIRCULUM PER DETERMINATIONES
[März – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 122. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 122 r°. Bl. 122 v° leer. Cc 2, Nr. 1207

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt.



$x^2 \sqcap ax - y^2$ seu $x^2 \sqcap x - y^2$.

[*Fig. 1*]

In circulo $ax - x^2 \sqcap y^2$. a. diameter. x. sinus versus. y. rectus. Hinc $x \sqcap \dfrac{y^2}{a-x}$. et dividendo:

6 seu $x^2 \sqcap x - y^2$ *erg. L*

7 *Fig. 1*: Leibniz verwechselt bei der Beschriftung der Figur x und y; der Irrtum beeinträchtigt die Überlegung S. 807 Z. 14 – S. 808 Z. 2.

$$x \sqcap \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} \;\Big|\; + \frac{y^2x^2}{a^3} \;\Big|\; + \frac{y^2x^3}{a^4} \;\Big|\; + \frac{y^2x^4}{a^5} \;\Big|\; + \frac{y^2x^5}{a^6} \;\Big|\; + \frac{y^2x^6}{a^7}$$

$$x \sqcap y^2 + y^2x$$

$$x \sqcap y^2 + y^2x \;\Big|\; \underbrace{+ y^2x^2}$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 2y^2x - y^4 \qquad \underbrace{+ y^2x^3}$$

$$\underbrace{y^2x^2} - y^4x$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 3y^2x - 2y^4 \qquad \underbrace{+ y^2x^4}$$

$$\underbrace{y^2x^2} - 2y^4x + y^6$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 4y^2x - 3y^4 + y^6 \qquad \underbrace{+y^2x^5}$$

$$\underbrace{y^2x^3}\; \underbrace{-2x^2y^4} + y^6x$$

$$+y^2x - y^4 - y^4x - 2y^4x + 2y^6$$

$$x \sqcap y^2 + 5y^2x - 4y^4 + 3y^6 - 2y^4x \qquad \underbrace{+y^2x^6}$$

$$\underbrace{y^2x^3}\; \underbrace{-3y^4x^2} + 3y^6x - y^8$$

$$y^2x - y^4 - y^4x - 3y^4x + 3y^6$$

8–14 Leibniz übernimmt absichtlich nicht alle bei der Umformung auftretenden Terme in die folgenden Zeilen, wie aus S. 808 Z. 4 ersichtlich ist.

Ponamus $a \sqcap 1$.

$x \sqcap y^2$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} 1$
$x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-y^2}{1}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 1y^4}{1-2y^2}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-2y^2}{1-y^2}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 2y^4}{1-3y^2}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-3y^2}{1-2y^2}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 3y^4 + 1y^6}{1-4y^2+2y^4}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-4y^2+2y^4}{1-3y^2+1y^4}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 4y^4 + 3y^6}{1-5y^2+2y^4}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-5y^2+2y^4}{1-4y^2+3y^4}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 5y^4 + 6y^6 - 1y^8}{1-6y^2+5y^4-3y^6}$	$1 - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{1-6y^2+5y^4-3y^6}{1-5y^2+6y^4-1y^6}$

[*Zusätze*]

[*Zu S. 806 Z. 2:*]

Notanda ac solvenda difficultas; cum dicitur:

$x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} y^2 + y^2x$, seu $x - y^2x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} y^2$. seu $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{y^2}{1-y^2}$ potuisse et dici:

$y^2x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} x - y^2$. et $y^2x - x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} -y^2$. et $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{y^2}{1-y^2}$.

Ne ergo contraria simul concludantur, considerandum hoc est, quia scimus $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} y^2 + y^2x$, tunc si y et x sint minores unitate fore $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} y^2x$. Ergo $x - y^2x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} y^2$. et $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{y^2}{1-y^2}$. Posteriore autem modo ratiocinari non licet, nec detrahere, nisi quod constet esse minus.

2–8 *Darunter:* $\boxed{\text{Semper } x \text{ in } 1 - x_{[,]} \sqcap y^2}$

2–8 In der Vorlage stehen die Z. 2–8 neben S. 806 Z. 1–14. 13–808,2 $x \mathrel{\sqcap\!\!\!\rceil} \dfrac{y^2}{1-y^2}$: Leibniz übersieht, daß sich durch den Vorzeichenwechsel die Ungleichung umkehrt. Beim folgenden Versuch, die vermeintliche Schwierigkeit zu beheben, wird er durch die falsche Beschriftung der Figur irritiert.

Posset tamen sumi $y \sqcap 1$. modo x sit minor, et tunc omnia fient contraria x, autem necessario maior, alioqui tota series infinita non esset vera.

[*Zu S. 806 Z. 6–16:*]

Forte re recte expensa additiones et negationes alternantur. Videndum et cuinam ex duabus aequationis radicibus satisfiat. Videtur quin etiam appropinquationes, (ac per consequens ex appropinquationibus series[)] in meris integris obtineri posse. Si tali scilicet modo misceantur quantitates, sive aequationes et determinationes, ut divisio fieri possit, residuis semper commode suppletis, poterunt scilicet ascribi aequationes in certas quantitates aut formulas ductae, aliaque id genus. Sed cavendum ne pro quaesitis radicibus alias immisceamus.

[*Zu S. 807 Z. 2–8 :*]

Ex his iam satis apparet quomodo sine ulteriore calculo propiores semper ac propiores ipsius x valores inveniri possunt.

13 possunt. | Quarum differentiae ipsi x *streicht Hrsg.* | *L*

67. SERIES DIFFERENTIARUM GENERALIS
[März – August 1676]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 VIII 30 Bl. 146. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 146 r°. Bl. 146 v° leer. Überschrift von Leibniz ergänzt. Cc 2, Nr. 1513

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt.

Series differentiarum generalis

[*Tschirnhaus*]

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{n}{t} & \frac{o}{u} & \frac{p}{w} & \frac{q}{x} & \frac{r}{y} & \frac{s}{z} & & \frac{s}{z} \sqcap 0 \\
\frac{nu-ot}{ut} & \frac{wo-pu}{wu} & \frac{px-qw}{wx} & \frac{qy-rx}{xy} & \frac{zr-sy}{yz} & & & \\
\frac{1}{f} & \frac{1}{g} & \frac{1}{h} & \frac{1}{i} & \frac{1}{k} & & &
\end{array}$$

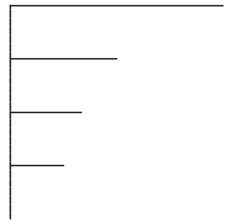
$$\begin{array}{llll}
un-ot \sqcap 1 & ut \sqcap f & t \sqcap \frac{f}{u} & t \sqcap \frac{fw}{g} \\
n \sqcap \frac{ot+1}{u} & t \sqcap \frac{f}{u} & & \\
n \sqcap \frac{of+u}{uu} & t \sqcap \frac{f}{u} & & t \sqcap \frac{fhk \text{ etc. in inf.}}{gi \text{ etc. in } z} \\
o \sqcap \frac{pg+w}{ww} & u \sqcap \frac{g}{w} & & \\
p \sqcap \frac{gh+x}{xx} & w \sqcap \frac{h}{x} & & \\
q \sqcap \frac{ri+y}{yy} & x \sqcap \frac{i}{y} & &
\end{array}$$

7 *(1)* Quadratura per series differentiarum *(2)* S e r i e s *L*

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{lcccccc}
r & y & z & \omega & ♉ & & \\
p & a & b & c & d & e & f \\
q & & g & h & i & k & l \\
s & & & m & n & s & t \\
t & & & & v & w & x \\
v & & & & & & \\
w & & & & & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$



[*Fig. 1*]

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \qquad\qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20}$$

$$\frac{3}{2} \;\Big|\; \frac{11}{6} \;\Big|\; \frac{50}{24} \qquad\qquad\qquad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{s}{z} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\ldots}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{fghik \text{ in } s + fghiz + ghikz + hikfz + ikfgz + kfghz}{fghikz} \qquad t \sqcap \frac{fhk \text{ etc.}}{gil \text{ etc. in } z}$$

$$n \sqcap \frac{fghik \text{ in } s \text{ etc.} + \text{omnibus productis una dimensione minoribus in } z}{gg\,ii\,ll \text{ in infinitum in } zz}$$

$$n \sqcap \frac{ot+1}{\cancel{u}} \qquad \frac{f}{\cancel{u}} \qquad n \sqcap \frac{ot+u}{u\cancel{u}} \qquad t \sqcap \frac{f}{\cancel{u}}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{ot+1}{f} \qquad\qquad \left[\frac{n}{t}\right] \sqcap \frac{of+u}{fu}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{ot}{f} + \frac{1}{f} \qquad\qquad \left[\frac{n}{t}\right] \sqcap \frac{o}{u} + \frac{1}{f}$$

16 f. n *T ändert Hrsg. zweimal*

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{f+g}{fg} + 1 \quad [\textit{bricht ab}] \quad \frac{f}{fghik} \quad [\textit{bricht ab}]$$

[*Leibniz, Schrägzeile von Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

$$f\ldots \underbrace{b\,\boxed{\underbrace{cd}}} \qquad \underbrace{t \quad o}$$

$$a \sqcap f. \qquad p\ \ a\ \ \sqcap\ \ \underbrace{\underbrace{b\ \ c\ \ d\ \ e}\ \ldots}\ \ a\ \ldots\ a\ \ldots\ p$$

$$a\ \ \ldots\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\boxed{\frac{1}{1}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{5}}$$

1 *Nebenrechnung, Tschirnhaus:* $\frac{f\ g\ h\ i}{fgh}$ $fg\ \ gh\ \ [hf]$

13 hg *T ändert Hrsg.*

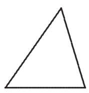
[*Tschirnhaus*]

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \frac{1}{0} \quad 0 \\ \frac{1}{0} & 1 + 0 \\ \hline & \frac{1}{0} + 1 \end{array}$$

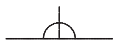
$$y \quad y+1 \quad y+2 \quad y+3$$

$$\begin{array}{llll} a+b & ab+ab+bc & bc & bbcc \\ & ab & b+c & \\ & & \underline{b+c} & \\ & & bb+bc & \\ & 64 & \quad +bc+cc & \end{array}$$

[*Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext*]
[*Leibniz oder Tschirnhaus*]



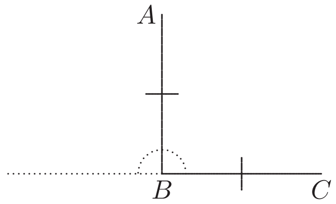
[*Fig. 2*]



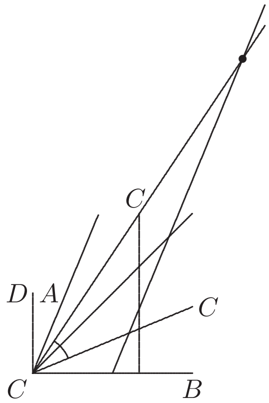
[*Fig. 3*]

2–4 Tschirnhaus rechnet im Schema rechts von unten nach oben und schreibt das Ergebnis links auf den Strich.

[*Tschirnhaus, quer zur Schreibrichtung*]



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

68. DE SUMMIS SERIERUM GENERALISSIMA
August 1676

Die beiden Teilstücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang. Auf zwei Seiten eines Bogens haben Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs Aufzeichnungen notiert. Vermutlich unmittelbar danach hat Leibniz den Inhalt weiter ausgearbeitet und schließlich eine gemeinsame Überschrift (= Z. 12 f.) und das Datum (= S. 818 Z. 10) ergänzt.

68_1. NOTAE

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 VIII 30 Bl. 144 bis 145. 1 Bog. 2°. 2 S. auf B. 144 r° u. 145 v°. Textfolge Bl. 145 v°, Bl. 144 r°. Überschrift von Leibniz auf Bl. 144 r° ergänzt. Auf dem Rest des Bogens N. 68_2.
Cc 2, Nr. 1512

D e s u m m i s s e r i e r u m g e n e r a l i s s i m a i t e m u t r u m t e r m i n o r u m r a t i o n a l i u m s u m m a e p o s s i n t e s s e i r r a t i o n a l e s

[*Teil 1*]

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \qquad y - x \sqcap 1 \qquad xy \sqcap a$$

$$\frac{y-x}{xy} + \frac{z-y}{yz} + \frac{t-z}{tz} \qquad x \sqcap y - 1 \qquad yy - y \sqcap a$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \qquad x \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \qquad y \sqcap +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \qquad y \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b} \qquad z \sqcap +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b}$$

$$a \qquad z \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b} \sqcap \sqrt{\frac{1}{4} + a} + \frac{1}{2} \qquad \frac{bb - 2ab + aa - 2b + \cancel{2a} + 1}{\cancel{4}} \sqcap \frac{1 + 2\cancel{4}a}{\cancel{4}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}+b} \quad \wp \quad \sqrt{\frac{1}{4}+a}+1 \qquad\qquad bb \wp 2ab+2b-aa+2a$$

$$\cancel{\frac{1}{4}}+b \quad \wp \quad \cancel{\frac{1}{4}}+a+2\sqrt{\frac{1}{4}+a}+1 \qquad\qquad b \wp a+1+\sqrt{4a+1}$$

$$\frac{b-a-1}{2} \quad \wp \quad \sqrt{\frac{1}{4}+a} \qquad\qquad c \wp b+1+\sqrt{4b+1}$$

$$\frac{f}{x}+\frac{f}{y}+\frac{f}{z}+\frac{f}{t} \qquad\qquad \frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}$$

$$\frac{f}{x}\quad \frac{g}{y}\quad \frac{f}{z}\quad \frac{g}{t}\quad \frac{f}{u}$$

$$\frac{f}{x}\quad \frac{g}{y}\quad \frac{f}{z}\quad \frac{i}{t}\quad \frac{f}{u} \qquad\qquad \frac{1}{2} \quad \begin{array}{cccccc} 1 & x & 1 & xx & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array} \qquad\qquad x \wp x-\cancel{xx} \mid \cancel{xx}-\cancel{x^3} \mid \cancel{x^3}-\cancel{x^4} \mid$$

$$\frac{1}{3} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

[*Tschirnhaus, auf der Gegenseite*]

$$\frac{1}{a}\quad \frac{1}{b}\quad \frac{1}{c}$$

[*Leibniz*]

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Formula unde per comparationem seriei datae summa inveniri potest. $\frac{fy-xg}{xy} \sqcap \frac{1}{a}$. $fy-xg \sqcap 1$. $x \sqcap \frac{fy-1}{g}$. $x \sqcap \frac{a}{y}$. $y^2-y \sqcap \frac{ga}{f}$.

---

2 f. *Zahlenbeispiele, Tschirnhaus:*
zu $\sqrt{4a+1}:3$ *zu* $\sqrt{4b+1}:5$

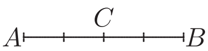
12 $\sqcap \frac{1}{\mathrm{a}}$. | xy $\sqcap$ fay − xag. x $\sqcap \frac{\mathrm{fay}}{\mathrm{y+ag}}$ *gestr.* | fy − xg $\sqcap$ 1 *L* 12 y^2- *(1)* yf *(2)* y $\sqcap \frac{\mathrm{ga}}{\mathrm{f}}$ *L*

---

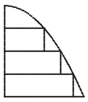
6 Zur linken Folge: vgl. N. 68₂ S. 818 Z. 17 f. 11 f. Leibniz nimmt diesen Ansatz in Teil 1 von N. 68₂ wieder auf; $y^2-y \sqcap \frac{ga}{f}$: Richtig wäre $y^2-\frac{y}{f} \sqcap \frac{ga}{f}$. Leibniz führt die Rechnung auf S. 818 Z. 13 nochmals durch, wobei ihm ein anderer Flüchtigkeitsfehler unterläuft. 14 3 … 5: Wie auf S. 814 Z. 18–20, linke Spalte, angedeutet wählt Tschirnhaus $a=2, b=6$ und berechnet die Wurzeln.

[*Teil 2*]

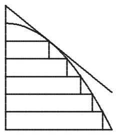
[*Tschirnhaus oder Leibniz*]



[*Fig. 1, Tschirnhaus*]

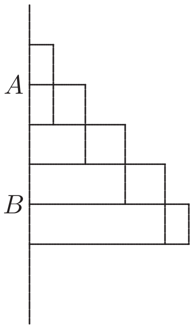


[*Fig. 2*]

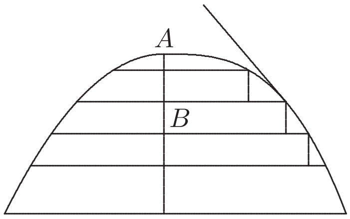


[*Fig. 3*]

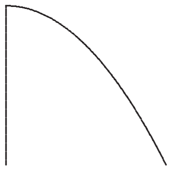
[*Fig. 4*]



[*Fig. 5, Leibniz*]



[*Fig. 6, Leibniz*]



[*Fig. 7*]

[*Leibniz*]

$y \sqcap x^2$ $\qquad \boxed{y^2 \quad x^2 \quad yx \quad x \quad y \quad d}$ $\qquad y \quad \sqcap + \sqrt{\sqrt{x \ldots} \quad - \sqrt{}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (y) \quad - \sqrt{\sqrt{x+\beta} \quad \sqrt{}}$

$\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}_{\frac{2}{35}}$ etc. $\qquad \frac{1}{16y^2+16y+3}$ series invenienda pro magnitudine circuli

6 $\boxed{y^2 \quad x^2 \quad yx \quad x \quad y \quad d}$: vgl. S. 821 Z. 17.

1	3	5	$2y+1$ impar
2	6	10	$4y+2$ impar duplus
			$16y^2+16y+4$ eius quad.

$$\frac{1}{1} \qquad y$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{y} \quad - \quad \frac{1}{y+\beta} \qquad \frac{\boxed{y}+\beta\boxed{-y}}{y^2\boxed{+\beta y}} \qquad \frac{1}{y^2+y}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \qquad \qquad \frac{\beta}{y^2}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{y} \qquad \qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

[*Tschirnhaus*] [*Leibniz*]

$$\frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}+\sqrt{2+}} \qquad \frac{\sqrt{\ldots}}{\sqrt{}} \qquad\qquad \sqrt{+\,x\,+} \quad [\textit{bricht ab}]$$

[*Leibniz*]

$$z \;\sqcap\; \frac{y^2\;\ldots}{\ldots} \qquad\qquad \frac{y^2+y+b}{cy^2\underbrace{+ey+d \;\;\times\;\; ǂ\;\; cy^2+2cy\beta+c\beta^2}}\!\!\!\!\frac{y^2+2y\beta+\beta^2,+y+\beta\langle+b\rangle}{,+ey+e\beta+d}$$

816,9 *Unter der linken Spalte, Tschirnhaus mit Ergänzung durch Leibniz:*

$$\frac{\overset{-1}{\cancel{1}}}{1+1} \backsim 1-1+1-1+\frac{1}{1+1}$$

$$1+1$$

816,9 *Über* $\dfrac{1}{16y^2+16y+3}$: [*Leibniz*] [*Tschirnhaus*]

$$y^2 \qquad \frac{1}{y^2+1} \qquad\qquad 2y+1$$

14 $-1+\dfrac{1}{1+1}$ *erg. L*

$$(z)\ \sqcap\ \frac{y+\beta}{\dots}$$
$$y^y\ -\ \overline{y+\beta}^{\,y+\beta}$$

Semper fieri potest, si y ponatur esse arithmeticae progressionis rationalis, sive β sit infinitesima sive non.

68_2. INQUISITIONES DUAE

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 2 S. auf B. 144 v° u. 145 r°. Textfolge Bl. 145 r°, Bl. 144 v°. Datum auf Bl. 145 r° oben ergänzt. Auf dem Rest des Bogens N. 68_1.
Cc 2, Nr. 1511

Aug. 1676

[*Teil 1*]

$\frac{f}{x}\ \frac{g}{y}\ \frac{h}{z}\ \frac{i}{t}$ series quaesita. $\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}\ \frac{1}{d}$ series summanda.

$\frac{fy-gx\sqcap 1}{xy\sqcap a}$. Ergo $x\sqcap\frac{fy-1}{g}\sqcap\frac{a}{y}$. et $fy^2-y\sqcap ga$. et $y^2-\frac{1}{f}y+\frac{1}{4f^2}\sqcap ga+\frac{1}{4f^2}$.

$$\text{Eodem modo et } y\sqcap\frac{+1+\sqrt{4gaf^2+1}}{2f}\quad\text{et}\quad x\sqcap\frac{\overset{-}{\boxed{+}}1+\sqrt{4gaf^2+1}\,\boxed{-2}}{2g}$$

$$\text{et } z\sqcap\frac{+1+\sqrt{4hbg^2+1}}{2g}\quad\text{et}\quad y\sqcap\frac{-1+\sqrt{4hbg^2+1}}{2h}$$

$$\text{et } t\sqcap\frac{+1+\sqrt{4ich^2+1}}{2h}\quad\text{et}\quad z\sqcap\frac{-1+\sqrt{4ich^2+1}}{2i}.$$

12–16 *Dazu am Rande:* (Si $f.h.$ per saltus idem, et tantum varient $g.i.$ etc. nihilominus res erit determinata.)

11 *Teil 1*: Leibniz nimmt im folgendem den Ansatz von S. 815 Z. 11 f. wieder auf. 13 $\sqcap ga+\frac{1}{4f^2}$.: Richtig wäre $\frac{ga}{f}+\frac{1}{4f^2}$; Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 819 Z. 6, wo ihm ein weiterer Fehler unterläuft, der die Gleichung für f^2 in S. 819 Z. 7 zusätzlich beeinträchtigt. 17 Si … etc.: vgl. N. 68_1 S. 815 Z. 6.

Ponatur iam $\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}$ esse series decrescens in infinitum tandemque evanescens, quaeritur eius summa $\frac{f}{x}$. Quaeritur ergo x. Sed ad x. habendum, opus est f. et g. Habetur autem f. ex datis g. et h. et prorsus ut g. ex datis h. et i. et ita porro, nempe aequando duos ipsius y. valores fiet:

$h + h\sqrt{4gaf^2+1} \sqcap -f + f\sqrt{4hbg^2+1}$ et

$h^2 4gaf^2 + h^2 \sqcap f^2 - 2f^2\sqrt{4hbg^2+1} + f^2 4hbg^2 + f^2$ fietque

$\frac{h^2}{2-2\sqrt{4hbg^2+1}, +4hbg^2 - 4gah^2} \sqcap f^2$.

Eodem modo invenietur g. ex datis $h.\ i.\ b.\ c.$

ut f. ex datis $g.\ h.\ a.\ b.$ et ita ad inventionem summae $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ etc. opus erit re adhuc difficiliore, terminatione scilicet summae replicatae modo quo dixi, nam et h. ex i. etc. eodem modo invenietur. Et ad unam inveniendam opus est sequentibus omnibus.

Hinc ergo potius illud lucrum habebimus ut serierum eiusmodi replicatarum terminationes et expressiones aliaque id genus problemata irregularia possimus revocare ad quadraturas et inventiones summarum. Si vero inter comparandum in aequatione qua f. quaeritur destrui potuissent h. et g. et eodem modo in caeteris, tunc habuissemus methodum perfectam inveniendi summam datam.

Quod ut hac methodo facere tentemus, res de integro resumenda: $\frac{fy-gx}{xy} \sqcap \frac{1}{a}$. Pro $\frac{1}{a}$ potuit scribi $\frac{v}{va}$ et divelli haec aequatio in duas $fy - gx \sqcap v$. et $xy \sqcap va$. et habebimus novam arbitrariam, sed ut generalius procedamus; est $\frac{fy-gx}{xy} \sqcap \frac{1}{a}$. seu $fya - gxa \sqcap xy$. Haec aequatio infinitis modis in duas divelli potest; novis etiam adhibitis arbitrariis ut si ponamus $vfya + \text{ה} - \text{ה} - gxav \sqcap xyv$ et divellamus in duas ut $vfya \sqcap \text{ה} + xyv$ et $\text{ה} \sqcap gxav$. Ita duas habebimus arbitrarias, sed et plures licebit facere; ipsis scilicet

3 prorsus ut *erg.* *L* 9 inventionem *(1)* seriei *(2)* summae *L* 13 ut *(1)* seriei *(2)* serierum eiusmodi *(a)* hoc modo ad *(b)* replicatarum *L* 14 expressiones *(1)* | possimus *streicht Hrsg.* | rev *(2)* aliaque *L* 20 procedamus; *(1)* quoniam est aeq *(2)* est *L* 23 plures *(1)* quaerere *(2)* licebit *L*

incognitis, $x.y.f.g.h.$ plures earum ascribendo potentias; arbitrariis quantitatibus affectis; undeque aequationes evolvendo novissima aequatio qua $f.$ ex datis $a.b.$ et $g.h.$ invenitur, debet esse talis, ut destruantur in ea ipsae $g.$ et h; et inventa erit summa seriei datae. Imo maior difficultas subnascitur in aequationes comparatitias quibus arbitrariae assumtae invenientur nec ingredi debent $a.$ et $b.$ Ergo debent totidem aequationes collatitiae quot sunt diversi modi quibus in aequatione ultima pro $f.$ $a.b.g.h.$ combinantur. Alioquin enim arbitrariae quae sunt constantes explicarentur per $a.b.$ etc. inconstantes, nisi forte ipsas arbitrarias quoque reddere velimus inconstantes quod non simplici explicatione ipsarum $x.y.f.g.h.$ per formulas, sed divulsione fieri debet, ut si in aequatione $fya - gxa \sqcap xy$ scribas $fya + \aleph y + \beth + \gimel y^2$ idemque facias de $x.$ et $f.g.$ separatim; imo et de $xy.xg.xyf.$
$-\aleph y - \beth - \gimel y^2$
aliisque omnibus terminis ex quatuor literarum combinatione factis, atque inde divellas aequationem in duas. Tunc fecisti quicquid hac quidem methodo ab homine fieri potest: Idemque aliis adhibitis literis fieri potest in sequenti $\dfrac{gz - yh}{yz} \sqcap \left[\dfrac{1}{b}\right]$ et ita porro. Inventis ita $x.y.$ et tandem termino ultimo $f.$ explicandae sunt novae assumtae hoc modo, ut destruantur in illis $f.$ et $g.$ et $h.$ Et haec est pulcherrima et generalissima methodus divulsionum; quae etiam in methodo Diophanti utilis.

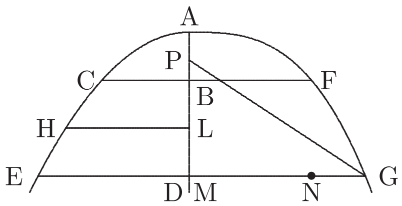
Loco quod terminos quaesitae seriei $\dfrac{f}{x}.\ \dfrac{g}{y}.$ assumsimus ut fractiones potuissemus assumere ut radices irrationales, item ut radices aequationum, unde adhuc maior complicatio. Quid si simplicissime series quaesita fuisset: $x.y.z.t.$ data $a.b.c.d.$ et $x{-}y \sqcap a.\ y{-}z \sqcap b.$ sed sic nullae literae supernumerariae, unde et nullae divulsiones; variandae ergo enuntiationes, ut fecimus. Caeterum hic credo omnes methodos inveniendi series in se replicatas, et proinde problemata methodi tangentium inversae reducere credo poterimus ad quadraturas; quod foret pulcherrimum. Ita enim semper curvas eiusmodi possemus describere modo quem ego introduco, et scire an sint curvae analyticae satisfacientes problemati,

4 subnascitur *(1)* in valores *(2)* in *L* 6 pro f. *erg. L* 9 si | pro *streicht Hrsg.* | in *L* 14 $\dfrac{1}{\mathrm{a}}$ *L ändert Hrsg.* 17 f. utilis. *(1)* Caeterum *(2)* Loco *L* 20 a.b.c.d. *(1)* et modus *(2)* et *L*

25 modo quem ego introduco: Gemeint ist die von Leibniz seit Herbst 1675 entwickelte Differential- und Integralrechnung.

quia semper quadraturas omnes possumus dare analytice. In methodi divulsionum successu debet esse difficultas, quia si succederet aeque facile pro qualibet serie summanda succederet quia ipsae a. et b. non variant calculum. Sed et bene video istam methodum non esse naturalissimam, quia non dat impossibilitatem.

[*Teil 2*]



[*Fig. 1*]

Demonstravi seriei rationalis utcunque infinitae differentias esse rationales, tum ex eo quod supra dixi de differentiis infinite parvis, tum vero etiam methodo generali hoc modo[:] sit figura ABC[,] summatrix ABF. Si ea est irrationalis, non poterit generaliter evenire, ut duarum ordinatarum quarumcunque, ut BF, MG differentia sit rationalis. Quod ita ostendo. Poterit aliqua ex ordinatis quadratricis esse rationalis (nam potest haec curva alicubi secari a recta aut hyperbola, ita ordinata sit utrique communis, et ea erit rationalis), ut si a recta PG secetur in G. sitque AP, PM, rationalis ratioque laterum trianguli ut numeri ad numerum, utique erit MG rationalis. Differentia autem inter MG rationalem, et BF irrationalem utique irrationalis contra hypothesin.

Non ita facile applicatur hoc ad series numerorum[,] poterit tamen.

Sit aequatio $y^2 + by + xy + x^2 + cx + d \sqcap 0$ et rursus
$(y)^2 + b(y) + (x)(y) + (x)^2 + c(x) + d \sqcap 0$ sintque x. et (x) rationales[,]

7 Demonstravi *(1)* summae ratio *(2)* serierum rationalium utcunque infinitarum *(3)* seriei *L*
12 secari *(1)* aut a triangulo *(2)* a recta aut *(a)* parabola *(b)* hyperbola, ita | ut eius *gestr.* | ordinata *L*
13 rationalis) *(1)* vel etiam assumi potest rationalis ordinata *(2)*, ut *L* 13 ratioque *(1)* lineae *(2)* laterum *L* 15 f. hypothesin. *(1)* Eodem enim *(2)* Non *L*

8 supra dixi: s. o. S. 818 Z. 3 f.

ǂy ǂ $(y) \sqcap z$. Quaeritur an z. possibile sit esse rationalem quacunque posita relatione inter y. et (y). Hoc patet esse impossibile. Potest enim talis utique poni ut sit differentia irrationalis.

Componantur aequationes $\begin{array}{l} + y^2 + by + xy + x^2 + cx \\ \\ - (y)^2 - b(y) - (x)(y) - (x)^2 - c(x) \end{array} \boxed{\begin{array}{c} + d \\ \\ - d \end{array}} \sqcap 0.$

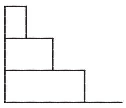
$y - (y) \sqcap z$. et $x - (x) \sqcap \omega$ fiet $z, + y + bz +$

$+(y)$ [*bricht ab*]

$$\boxed{y^2}\,\boxed{-y^2} + 2zy - z^2$$

$y - (y)$ [*bricht ab*]

$a \quad b \quad c \quad d \quad e$ irrationales pleraeque



[*Fig. 2*]

$$\left.\begin{array}{cccc} a-b & a-c & a-d & a-e \\ & b-c & b-d & b-e \\ & & c-d & c-e \\ & & & d-e \end{array}\right\} \text{rationales}$$

Patet hoc fore impossibile si vel una ex ipsis $a.b.c.d.e.$ sit rationalis. Hinc etiam $a-b, -b+c$ rationalis seu $a + c - 2b$, item $a + b + c, -3d$.

$a + b - 2c$

Ut differentia inter a et c sit rationalis; debet nulla esse litera [*bricht ab*]

$\sqrt{1 - \sqrt{1}} - \sqrt{}$ [*bricht ab*]

4–6 *Darunter:* (Hinc ut obiter dicam, derivari poterit regula Slusii tangentium.)

19 sit *(1)* irrationalis *(2)* rationalis *L*

---

21 derivari ... tangentium: Leibniz bezieht sich vermutlich darauf, daß die Tangentenregel von Sluse für eine Kurve $F(x,y) = 0$ mit $t = \dfrac{y}{y'}$ auf der Gleichung $|\, t \cdot F'_x(x,y)\,| - |\, y \cdot F'_y(x,y)\,| = 0$ beruht; vgl. auch die Erl. zu N. 38$_5$ S. 415 Z. 25. — Ähnlich äußert sich Leibniz in *Calculus tangentium differentialis* (s. H.-J. Hess, *Zur Vorgeschichte*, 1986, S. 87 u. *LBG* S. 230) vom November 1676.

Demonstrandum superest quod impossibile sit circulum esse quantitatem rationalem ad quadratum seu esse numerum vel rationem quae semper satisfaciat huic $\dfrac{314159}{100000}$. Ponatur esse fractio $\dfrac{c}{b}$, reducatur ad decimalem $\sqcap \dfrac{f}{10^y}$ fiet $f \sqcap \dfrac{10^y c}{b} \sqcap 314159$ etc.

Sit numerus quicunque multiplicans 10^y infinitae potentiae modo ipse sit finitus qui si dividatur per finitum, tandem post certam periodum non producat semper numeros priores. Examinandum, stabit ita.

Pro 10 scribamus v, fiet $\dfrac{v^y \frown d + ev + fv^2 + \text{ etc.}}{[l] + mv + nv^2 + \text{ etc.}}$

Pro v^y ponetur $0 + 0v + 0v^2 + 0v^3$ etc. $+\, v^y$ ponendo y infinitam.

2 huic *(1)* 341589 utcunque continuataqe *(2)* 3,1459 ad *(3)* $\dfrac{314159}{100000}$ *L* 5 non *(1)* relinquat *(2)* producat *L* 7 m *L ändert Hrsg.*

69. DE SERIE WALLISIANA
[Spätsommer 1676?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 7. 1 Ausschnitt ca 16 x 21 cm. Untere Schnittkante geschwungen. 1 S. auf Bl. 7 r°. Bl. 7 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das schwer zu datierende Stück stammt, worauf die durchgehende Verwendung von *aeq.* als Gleichheitszeichen hindeutet, wohl frühestens aus den letzten Wochen von Leibniz' Parisaufenthalt.

Secundum Wallisium ratio quadrati diametri ad circulum est
$\dfrac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\,\text{etc.}}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\,\text{etc.}}$ *aequ.* $\boxdot$.

Ergo fiet $2\ \boxdot$ *aeq.* $\dfrac{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\,\text{etc.}}{4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\,\text{etc.}}$ et $\sqrt{2\boxdot}$ *aeq.* $\dfrac{3.5.7.9.11\,\text{etc.}}{4.6.8.10.12\,\text{etc.}}$.

Sed hinc colligo expressionem Wallisianam posse quidem haberi pro appropinquatione, cuius apparet continuabilitas in infinitum, sed non pro exacta expressione per infinitam seriem consideratam semel in universum, nam exprimendo per suppositam continuationem in infinitum, oritur absurdum, nam omnes numeri numeratoris tolli possunt, quia habentur eorum multipli in nominatore, si uterque in infinitum continuatus intelligitur, et ita staret $\sqrt{2\boxdot}$ *aeq.* $\dfrac{1}{4.2.8.2.12.2\,\text{etc.}}$ vel $\dfrac{1}{8.16.24\,\text{etc.}}$ quod est absurdum, fieret enim $\sqrt{2\boxdot}$ quantitas infinite parva. Similiter fieret $2\boxdot$ *aeq.* $\dfrac{1}{64.256.576\,\text{etc.}}$ seu $2\ \boxdot$ *aeq.* $\dfrac{1}{64.1.\ 64.4.\ 64.9.\ \text{etc.}}$.

9 f. est *(1)* $^{1.3.5.}$ *(2)* $\dfrac{3.5.7.9.11.13}{4.6.10.12.1}$ *(3)* $\dfrac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\,\text{etc.}}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.\,\text{etc.}}$ *L* 14 universum, *(1)* cum enim hoc *(2)* nam *L* 15 absurdum, *(1)* dividendo enim omnes *(2)* nam *L*
19–825,1 $\dfrac{1}{64.1.\ 64.4.\ 64.9.\ \text{etc.}}$. | Itaque *streicht Hrsg.* | Itaque *(1)* sic *(2)* potius *(a)* dicendum est *(b)* exprimendum est, *(aa)* $\dfrac{3.3.}{\ }$ *(bb)* $\boxdot$ esse *(cc)* ad *L*

9 Secundum Wallisium: *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191 S. 178–182 (*WO* I S. 467–469).

Itaque potius exprimendum est, ad $\boxdot$ continue appropinquari per hos valores

$\frac{3.3}{2.4}$ vel $\frac{3.3.5.5.}{2.4.4.6}$ vel $\frac{3.3.5.5.7.7.}{2.4.4.6.6.8}$ vel $\frac{3.3.5.5.7.7.9.9.}{2.4.4.6.6.8.8.10}$

seu $2\sqrt{\boxdot} \sqcap \frac{3}{\sqrt{2}}$ vel $\frac{3.5}{4.\sqrt{3}}$ vel $\frac{3.5.7}{4.6.\sqrt{4}}$ vel $\frac{3.5.7.9}{4.6.8.\sqrt{5}}$ vel $\frac{3.5.7.9.11}{4.6.8.10.\sqrt{6}}$ vel $\frac{3.5.7.9.11.13}{4.6.8.10.12.\sqrt{7}}$

vel $2\sqrt{\boxdot} \sqcap \frac{3}{\sqrt{2}}$ vel $\frac{3.5}{4.\sqrt{3}}$ vel $\frac{5.7}{8.\sqrt{4}}$ vel $\frac{5.7.9}{8.\overline{8.\sqrt{5}}}$ vel $\frac{7.9.11}{8.16.\sqrt{6}}$ vel $\frac{7.9.11.13}{8.16.\overline{12.\sqrt{7}}}$ vel $\frac{9.11.13.15}{8.16.24.\sqrt{8}}$ vel $\frac{9.11.13.15.17}{8.16.24.\overline{16\sqrt{9}}}$ vel $\frac{11.13.15.17.19}{8.16.24.32\sqrt{10}}$ vel $\frac{11.13.15.17.19.21}{8.16.24.32.\overline{20\sqrt{11}}}$ vel $\frac{13.15.17.19.21.23}{8.16.24.32.40\sqrt{12}}$ et ita porro.

Et proinde series Wallisiana est proprie appellanda finita indefinita, seu quae alicubi finienda concipi debet, licet non exprimatur ubi.

Ex istis appropinq. fit

□ diam.	ad circul.				
9	8		9	8	*A*
225	192	vel in numeris	225	192	*B*
11025	9216	minoribus	1225	1024	*C*
893025	737280		19845	16384	*D*
108056025	88473600		160083	131072	*E*

5 vel $2\sqrt{\boxdot} \sqcap$ *(1)* $\frac{3.5}{}$ *(2)* $\frac{1}{8.16.24.32.48}$ *(3)* $\frac{3}{\sqrt{2}}$ *L*   9 concipi *(1)* potest, licet *(2)* debet *L*

9 f. ubi. *(1)* □ diam. ad circ. ut $\frac{9}{8}$ | $\frac{225}{192}$ | $\frac{1225}{1024}$ | $\frac{19845}{16384}$ *Dazu gestr. Nebenrechnung*: $\frac{9}{8} ⨍ 1 + \frac{1}{8}$ *(2)* Ex *L*

Ratio A dat quotientes $1,8 \Big|$ $B,\ 1,5,1,4,2 \Big|$ $C,\ 1,5,10,1,1,2,1,2 \Big|$ $D,\ 1,4,1,2+\dfrac{698}{921} \Big|$ $E,\ 1,4,1,1,13+\dfrac{398}{1045} \Big|$

825,12–14

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{25} \\ 225 \\ \underline{49} \\ 2025 \\ \underline{900\ \ } \\ 11025 \\ 81 \end{array}$$

1 B, 1, 5, *(1)* 10, 1, 1, 2, 1 *(2)* 1, 4, 2 | , 1 *streicht Hrsg.* | C *L*

1 quotientes: Es handelt sich um die Quotienten der Kettenbruchentwicklung.

70. DE SUMMA NUMERORUM QUADRATORUM RECIPROCORUM [Juni 1674 – Anfang Oktober 1676]

Überlieferung: *LuX* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Unbekannter mit zusätzlichen Bemerkungen von Leibniz): LH 35 VIII 30 Bl. 100. 1 Ausschnitt ca. 16 x 20 cm. Links oben ein Stück ca. 7 x 11 cm unregelmäßig herausgeschnitten. Darunter am linken Rand unregelmäßige, am unteren Rand schräge Schnittkante. 1. S. auf Bl. 100 r°. Bl. 100 v° leer. Überschrift und Text Z. 16 f. ergänzt.
Cc 2, Nr. 1210

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Gesprächsaufzeichnung ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden; die Verwendung des Waagebalkens als Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin.

[*Leibniz*]

Summa fractionum quarum [nominatores] sunt quadrati ordine. Idque per appropinquationem, methodo iuvenis Galli.

Inventum iuvenis per-ingeniosi, natione Galli, qui mihi communicavit coram, et quem ab eo tempore non vidi.

[*Fremde Hand*]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C & \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} & \frac{1}{49} & \frac{1}{64} & \frac{1}{81} & \frac{1}{100} \\[6pt]
A & \frac{1}{1} & \cdot & \frac{1}{9} & \cdot & \frac{1}{25} & \cdot & \frac{1}{49} & \cdot & \frac{1}{81} & \cdot \\[6pt]
B & \cdot & \frac{1}{4} & \cdot & \frac{1}{16} & \cdot & \frac{1}{36} & \cdot & \frac{1}{64} & \cdot & \frac{1}{100}
\end{array}$$

13 *(1)* Series *(2)* Summa *L* 13 numeratores *L ändert Hrsg.*

15 iuvenis Galli: Nach einer Vermutung von J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 177 f. handelt es sich bei dem Unbekannten um dieselbe Person, deren Identität Leibniz 1695 im Briefwechsel mit G.-F.-A. de L'Hospital und 1697 mit Johann Bernoulli zu ermitteln versuchte (s. *LMG* II S. 276 f. u. 280 sowie *LMG* III S. 362 f.).

$$B \sqcap \frac{1}{4}\,C. \qquad A - \frac{1}{1} \sqcap B. \qquad \text{Rursus} \quad A - \frac{1}{1} \sqcap B - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo } A \sqcap \frac{3}{4}\,C. \qquad \text{Ergo} \quad \frac{3}{4}\,C - \frac{1}{1} \sqcap \frac{1}{4}\,C. \qquad \text{Ergo} \quad \frac{3}{4}\,C - \frac{1}{1} \sqcap \frac{1}{4}\,C - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo} \quad \frac{1}{2}\,C \sqcap \frac{1}{1}. \qquad \text{Ergo} \quad \frac{1}{2}\,C \sqcap \frac{1}{1} - \frac{1}{4}.$$

$$\frac{2}{4} \quad C \quad \sqcap \quad \frac{1}{1} \quad - \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad - \quad \frac{1}{16} \quad + \quad \frac{1}{25} \left[- \frac{1}{36} + \frac{1}{49} \right]$$

[*Leibniz*]

$$\frac{6}{8} \quad C \quad \sqcap \quad \frac{1}{1} \quad - \quad \frac{1}{8} \quad + \quad \frac{1}{27} \quad - \quad \frac{1}{64} \quad \text{etc.}$$

---

4 *Leibniz, quer zur Schreibrichtung*, *der letzte Bruch von fremder Hand:*

La somme de la progression des fractions des puissances tombe entre: $\dfrac{820}{1000}$ et $\dfrac{821}{1000}$.

4 $-\dfrac{1}{49}$ *X ändert Hrsg.*

---

6 $\dfrac{6}{8}\,C$: C steht hier für die Summe der reziproken Kubikzahlen, nicht wie zuvor für die Summe der reziproken Quadratzahlen. 8 La somme: Es handelt sich um eine nicht ganz korrekte Näherung für den Wert der alternierenden Reihe der reziproken Quadratzahlen, der zwischen $0,822$ und $0,823$ liegt.

71. LOGARITHMI COMPARATI CUM PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA
[Juni 1674 – Anfang Oktober 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 16. 1 Zettel ca 18 x 6 cm. Oberkante geschwungen mit Spuren fremden Textes. 1 S. auf Bl. 16 r°. Bl. 16 v° leer. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 1140

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während des Parisaufenthalts geschrieben sein; die Verwendung des Waagebalkens als Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin.

L o g a r i t h m i   c o m p a r a t i   c u m   p r o g r e s s. h a r m. s u m m.

$\frac{1}{1+z} \sqcap 1 - z + z^2 - z^3 + z^4$ etc.

Quemadmodum $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. reciprocorum hyperbolae summae logarithmis proportionales; ita reciprocorum hyperbolae cubicae summae altiori cuidam proportionales; nempe $\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}$, (: sive $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{16}$, nam haec in lineis coincidunt :) ex $\frac{1}{1}\ \frac{1}{-1+4}\ \frac{1}{+1-4+9}\ \frac{1}{-1+4-9+16}\ \frac{1}{+1-4+9-16+25}$ etc. Quae ut in unum addas, et ad unum reducas nomen seriem eiusmodi infinitam non est difficile in lineis, quia quadratura hyperbolae cubicae habetur, videndum quae sit eius analogia ad logarithmos seu summam hyperbolae quadraticae.

---

18 *Darunter:* Error

11 *(1)* $\frac{1}{\mathrm{y}^2 -}$ *(2)* $\frac{1}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{ya}}$ *(3)* $\frac{1}{1+\underbrace{\mathrm{y}^2-2\mathrm{y}}}$ $\sqcap$ *(4)* $\frac{1}{1+\mathrm{z}^2}$ *(5)* $\frac{1}{1+\mathrm{z}}$ *L* 12 Quemadmodum *(1)* $\frac{1}{\mathrm{y}^2}$ reciproca *(2)* $\frac{1}{2}$ *(3)* $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. *(a)* reciproca | hyperbolae *streicht Hrsg.* | *(b)* reciprocorum *L* 17 videndum | tantum *gestr.* | quae *L*

---

12 f. summae logarithmis proportionales: Leibniz vermengt in unzulässiger Weise Reihensummierung und Kurvenquadratur. Er erkennt schließlich die Fragwürdigkeit seiner Argumentation, schwächt die Schlußbemerkung ab, indem er in Z. 17 tantum streicht, und markiert den Text mit Error.

72. DE SERIERUM DIVISIONE ET SUMMATIONE
[Mitte Oktober – November 1676?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 265. 1 Bl. 2°. 1 1/2 S.
Cc 2, Nr. 1542

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist auf Pariser Papier unsicherer Datierung geschrieben. Die Verwendung der Symbolik von Differential- und Integralrechnung zeigt, daß N. 72 nicht vor November 1675 entstanden ist. Der Gebrauch von = als Gleichheitszeichen spricht hier eher für einen Zeitpunkt nach der Abreise aus Paris. Bei seinem Londonaufenthalt in der zweiten Oktoberhälfte 1676 hat sich Leibniz z. B. mit der Division von Reihen bei Newton auseinandergesetzt (vgl. *LSB* III, 1 N. 98 S. 666 u. 675).

[*Teil 1*]

[*Der Text beginnt mit dem Divisionsschema S. 831*]

1)	$11a$	$+12a^2$	$+13a^3$	$+14a^4$	$+15a^5$	$+16a^6$	$+17a^7$	$+18a^8$	$+19a^9$	$+20a^{10}$	$21a^{11}$	$22a^{12}$	
a^2			$11a^3$	$+12a^4$	$+13a^5$	$+14a^6$	$+15a^7$	$+16a^8$	$+17a^9$	$+18a^{10}$	19	20	
a^3				$11a^4$	12	13	14	15	16	17	18	19	
						11	12	13	14	15	16	17	
							11	12	13	14	15	16	
								11	12	13	14	15	
												11	12

$11 = 1$ $\quad 12 = 0$ $\quad 13 + 11 = 0$ $\quad 14 + 12 + 11 = 1$ $\quad 15 + 13 + 12 = 1$
$16+14+13+11 = 0$ $\quad 17+15+14+12+11 = 0$ $\quad 18+16+15+13+12+11 = 0$
$19 + 17 + 16 + 14 + 13 + 12 = 1$ $\quad 20 + 18 + 17 + 15 + 14 + 13 = 1$
$21 + 19 + 18 + 16 + 15 + 14 = 1$
$11 = 1$ $\quad 12 = 0$ $\quad 13 = -1$ $\quad 14 = 0$ $\quad 15 = 2$ $\quad 16 = 0$ $\quad 17 = -3$
$18 = -2$ $\quad 19 = 5$ $\quad 20 = 5$ $\quad 21 = -4$

---

13 Die Zahlen 11–22 stehen für die Koeffizienten der Potenzen von a; vgl. KNOBLOCH, *Übersicht*, S. 29–39. 16–19 Die Zeilen müßten im Schema um eine Spalte weiter rechts stehen. Der Fehler beeinträchtigt den folgenden Koeffizientenvergleich ab Z. 21.

divisor	dividendus	quotiens $a - a^3 + 2a^5$		
1				
	a			
a^2				
a^3		$-a^3$		
	a^4			
	a^5	$+a^5$	$+ a^5$	
a^6			$+ a^6$	$+ a^6$
a^7		$-a^7$	$- a^7$	$-3a^7$
a^8		$-a^8$	$- a^8$	$-3a^8$
	a^9		$+ a^9$	$+ a^9$
	a^{10}	$+a^{10}$	$+ 2a^{10}$	$+2a^{10}$
	a^{11}	$+a^{11}$	$+ 2a^{11}$	
a^{12}				$-2a^{12}$
a^{13}		$-a^{13}$	$- a^{13}$	$-3a^{13}$
a^{14}		$-a^{14}$	$- a^{14}$	$- a^{14}$
a^{15}		$-a^{15}$		
	a^{16}		$+ a^{16}$	$+ a^{16}$
	a^{17}	$+a^{17}$	$+2a^{17}$	
	a^{18}	$+a^{18}$	$+2a^{18}$	
	a^{19}	$+a^{19}$	$+ a^{19}$	$- a^{19}$
a^{20}				
a^{21}		$-a^{21}$	$- a^{21}$	[*bricht ab*]
a^{22}		$-a^{22}$	$- a^{22}$	
a^{23}		$-a^{23}$		
a^{24}		$-a^{24}$		
	a^{25}		$+ a^{25}$	
	a^{26}	$+a^{26}$	$+2a^{26}$	
	a^{27}	$+a^{27}$	$+2a^{27}$	
	a^{28}	$+a^{28}$	$+ a^{28}$	
	a^{29}	$+a^{29}$	$+ a^{29}$	
divisor	dividendus 1^{mus}	dividendus 2^{dus}	dividendus 3^{tius}	

1–32 In der Vorlage sind die Spalten als Zeilen angeordnet.

[*Teil 2*]

$$\left.\begin{array}{rlllll} y = a^0 + & a^1 + & a^3 + & a^6 + & a^{10} \text{ etc.} \\ ad\overline{y} = 0 & +1\,a^1 + & 3\,a^3 + & 6\,a^6 + & 10\,a^{10} \text{ etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{itaque si datur } y \\ \text{dabitur et } dy \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \end{array}}\right\} \begin{array}{l} \text{quaerendo} \\ \text{tangentem} \end{array}$$

$$\begin{array}{rlllll} a^2 ddy = & 1\,a^1 + & 9\,a^3 + & 36\,a^6 + & 100\,a^{10} \text{ etc.} & \text{lineae cuius} \\ \frac{1}{a}\int yda = & \frac{a^1}{1} + & \frac{1}{3}a^3 + & \frac{1}{6}a^6 + & \frac{1}{10}a^{10} \text{ etc.} & \text{ordinata} \\ \frac{1}{aa}\int\overline{\int \overline{yda}da} & \frac{a^1}{1} + & \frac{1}{9}a^3 + & \frac{1}{36}a^6 + & \frac{1}{100}a^{10} \text{ etc.} & \text{est } y \end{array}$$

$$\begin{array}{rllllll} y = a^0 & + a^1 & + a^2 & + a^3 & + a^4 & + a^5 & \\ \int yda & \frac{a^1}{1} & + \frac{a^2}{2} & + \frac{a^3}{3} & + \frac{a^4}{4} & + \frac{a^5}{5} & \\ \int\overline{\int \overline{yda}\frac{da}{a}} & \frac{a^1}{1} & + \frac{a^2}{4} & + \frac{a^3}{9} & + \frac{a^4}{16} & & \text{etc.} \end{array}$$

Hinc cum $a = 1$. prodit $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ etc. Itaque in lineis haberi credo potest huius seriei summa, sed supposita hyperbolae $\square^{\text{tura}}$. Methodus autem haec probe notanda est.

4 a^2ddy: Die Bezeichnungsweise ist irreführend: Leibniz berechnet $ad(ady)$, anschließend die Integrale $\int \frac{y}{a}da$ und $\int \frac{1}{a}\left(\int \frac{y}{a}da\right) da$; bei letzteren fehlen im Ergebnis die ersten Terme der Reihen. In Z. 9 verwendet Leibniz die korrekte Bezeichnungsweise.

[*Teil 3*]

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ etc. Rursus si $1 + a^l + a^m + a^n$ etc. $= x$. patet fore $\int \overline{x} = \frac{1}{2}x^2$. Ergo fiet: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{l}x^{l+1} + \frac{1}{m}x^{m+1}$ etc. seu $x^2 = \frac{2}{l+1}x^{l+1} + \frac{2}{m}x^{m+1}$. Similiter $x^3 = 3\int x^2$. Ergo $x^3 = \frac{2.3}{l.\overline{l+1}}x^{l+2} + \frac{2.3}{m.\overline{m+1}}x^{m+2}$ etc.

Ergo fiet $1 - x + x^2 - x^3$ etc. $=1$

$$
\begin{array}{lll}
-\frac{2}{l+1}x^{l+1} & -\frac{2}{m+1}x^{m+1} & \text{etc.} \\
+\frac{2.3}{\overline{l+1}.\overline{l+2}}x^{l+2} & +\frac{2.3}{\overline{m+1}.\overline{m+2}}x^{m+2} & \text{etc.} \\
-\frac{2.3.4}{\overline{l+1}.\overline{l+2}.\overline{l+3}}x^{l+3} & -\frac{2.3.4}{\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}}x^{m+3} &
\end{array}
$$

Ergo si $x = 1 + a^4 + a^9 + a^{16}$ erit

$$1 - y = \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{2}{1}a + \frac{2.3}{1.2}a^2 - \frac{2.3.4}{1.2.3}a^3 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}a^4 - \frac{2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5}a^5 + \frac{2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5.6}a^6 \text{ etc.}$$

$$+\frac{2}{5}a^5 + \frac{2.3}{5.6}a^6 + \frac{2.3.4}{5.6.7}a^7$$

$$a^2y = a^2 - \frac{2}{1}a^3 + \frac{2.3}{1.2}a^4 \text{ etc.}$$

$$a^6y = a^6 - \frac{2}{1}a^7 \text{ etc.}$$

Quae tandem faciunt: $\frac{1 + a^2 + a^6 + a^{12} + a^{20}}{1 + a^4 + a^9 + a^{16} \text{ etc.}}$

2 *(1)* $\frac{1}{1+a^4+a^9+a^{16}} = 1 - |\, 1 +$ *gestr.* $|\, a^4 + a^9 + a^{16}$ *(2)* $\frac{1}{1+x}$ *L* 3 $\frac{1}{2}x^2 = |\, \frac{1}{1}x +$ *gestr.* $|\, \frac{1}{l}x^{l+1}$ *L* 3 seu $x^2 = |\frac{2}{1}x +$ *gestr.* $|\, \frac{2}{l+1}x^{l+1}$ *L* 4 Ergo $x^3 = |\, \frac{2.3}{1.2}x +$ *gestr.* $|\frac{2.3}{l.\overline{l+1}}x^{l+1}$ *L* 10 $1 - y =$ *erg. L* 13 a^6y … etc. *erg. L*

2–13 Leibniz dividiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(n+1)}$ durch $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}$, indem er zuerst den ersten Term des Zählers dividiert und dann das Ergebnis für die folgenden Terme verwendet. Dabei unterläuft ihm eine Reihe von Fehlern und Versehen, die er nur punktuell korrigiert.

73. EXPRESSIO SERIEI PER NUMERUM PRIMUM ET ULTIMUM [Oktober – Dezember 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 150. 1 Bl. 2°. Ca 1/2 S. auf Bl. 150 r° oben u. eine isolierte Zeile auf dem gegenläufig beschriebenen Bl. 150 v°. Überschrift ergänzt. Auf dem Rest von Bl. 150 r° Cc 2, Nr. 1516 (Druck in Reihe VIII), von Bl. 150 v° Cc 2, Nr. 1515 B (Druck im Nachtrag zur Algebra in einem späteren Band der Reihe VII).
Cc 2, Nr. 1515 A

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist bisher für die Monate März bis August 1676 belegt. Dem Duktus nach ist die folgende Aufzeichnung Cc 2, Nr. 1516 direkt im Anschluß an das vorliegende Stück geschrieben. In dieser Aufzeichnung bezieht sich Leibniz auf J. B. Tavernier, *Les six voyages*, 2 Bde, Paris, 1676 („achevé d'imprimer" 1. Oktober 1676). Wie aus seinem Brief an Ferdinand von Fürstenberg vom Dezember 1676 hervorgeht (*LSB* I, 2 N. 209 S. 239), hat Leibniz das Erscheinen des Werkes noch vor seiner Abreise aus Paris (4. Oktober 1676) registriert.

Expressio seriei per numerum primum et ultimum et ita inventio summae facilis dum omnes per eandem quantitatem constantem exprimuntur

Variis modis series exprimi possunt utiliter: ex caeteris unus est in quo omnes ope termini primi et ultimi, ubi semper variat expressio pro alio atque alio simul sumtorum numero. Talis autem expressio semper ex proprietate essentiali derivari potest, ut in arithmetica: $a.\ b.\ c.$ et $c-b$ *aequ.* $b-a.$ $\frac{c+a}{2} \sqcap b.$

$d\quad a\quad b\quad c\quad e.\quad a \sqcap \frac{d+b}{2}.\quad c \sqcap \frac{b+e}{2}.\quad a+c \sqcap \frac{d+2b+e}{2}.\quad \frac{2b}{\cancel{2}} \sqcap \frac{d+2b+e}{\cancel{4}2}.$ et $b \sqcap \frac{d+e}{2}.$ et $2b \sqcap d+e.$ et $a+c \sqcap \frac{d+d+e+e}{2} \sqcap d+e.$

Ergo $a \sqcap \frac{d}{2}\boxed{+\frac{b}{2}}+\frac{d+e}{4}.$ et $a \sqcap \frac{3d+1e}{4}.\quad c \sqcap \frac{1d+3e}{4}$

$$\left.\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{2a}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{2c}{2} \end{array}\right\} \sqcap \frac{3a+3c}{2}$$

20 a. b. c. *(1)* et b $\sqcap \frac{a+c}{2}$. Iam a. b. c. d. et c aequ. $\frac{b+d}{2}$. Ergo *(2)* et *L*

$$\left.\begin{array}{ccccc} d & a & b & c & e \\[2ex] \frac{4d}{4} & \frac{3d+1e}{4} & \frac{2d+2e}{4} & \frac{1d+3e}{4} & \frac{4e}{4} \end{array}\right\} \sqcap \frac{\underbrace{4+3+2+1} \frown d, + \underbrace{1+2+3+4} \frown e}{4}$$

Ergo quaesita summa progressionis arithmeticae redit iterum ad summam progressionis arithmeticae, et quidem simplicissimae, nempe summam progressionis arithmeticae 1. 2. 3. 4. 5. ab unitate incipientis et per unitates ascendentis. Haec vero ad inventionem sui supponit se ipsam, id est habetur aequatio.

Naturalis admodum haec est inquisitio, quaerimus enim modum quo summa omnium ex dato primo et ultimo, (vel primo posito 0 ex ultimo) haberi possit. Quare singuli ex ultimo explicabuntur, ut summa ex eo possit explicari.

[*Isolierte Zeilen*]

[*Am oberen Rand*] 1 $\dfrac{a}{a+\sqrt{ab+\sqrt[3]{a^2c-\sqrt{}}}}$

[*Auf der Rückseite, gegenläufig*] $\dfrac{1}{b+c} \sqcap \dfrac{1}{b} - \dfrac{c}{b^2} + \dfrac{c^2}{b^3} - \dfrac{c^3}{b^4} + \dfrac{c^4}{b^5}$ $\qquad \dfrac{1}{150+1}$

2–4 *Nebenrechnung zur Streichung, nicht gestrichen:*
$a+c \sqcap \dfrac{f+g}{2} \quad a \sqcap \dfrac{3d+1e}{2} \quad \dfrac{a}{2} \sqcap d + \dfrac{f}{2} + \dfrac{g}{2}$

2–4 $\dfrac{\underbrace{4+3+2+1} \frown \mathrm{d}, + \underbrace{1+2+3+4} \frown \mathrm{e}}{4}$ | f d a $\begin{array}{c}\mathrm{b}\\ \frac{\mathrm{f}+\mathrm{g}}{2}\end{array}$ c e g *gestr.* | Ergo *L* 5 arithmeticae, *(1)* unde *(2)* et quidem omnis alia *(3)* et *L* 7 f. aequatio. *(1)* Nam ponendo *(2)* Naturalis *L* 12 1 | a + b + c + *gestr.* | $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\sqrt{\mathrm{ab}+\sqrt[3]{\mathrm{a}^2\mathrm{c}-\sqrt{}}}}$ *L*

---

15 $a+c \sqcap \dfrac{f+g}{2}$: Richtig wäre $a+c \sqcap f+g$. Der Fehler beeinträchtigt die restlichen Rechnungen.

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur; es ist zweigeteilt. Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, sind einschließlich ihrer modernen Ausgaben im ersten Teil verzeichnet. Neuere Literatur erscheint im zweiten Teil. Unter Leibniz wird neben seinen eigenen Schriften zusätzlich die für diesen Band relevante Leibniz-Korrespondenz erfaßt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

SCHRIFTEN DER LEIBNIZZEIT

1. Apollonius v. Perga, *Conica*: S. *126*.
2. Archimedes
   1. *De sphaera et cylindro I*: S. *228*.
   2. *De lineis spiralibus*: S. 246. *246*. 559.
   3. *Dimensio circuli*: S. 105. *105*.
   4. *Opera*: S. 126. *126*.
3. Barozzi, Fr., *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum, quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur*. Venedig 1586; Nachdr.: Bologna 1993: S. *97*.
4. Beaulieu, A. de, *Mémoires du voyage aux Indes orientales*. In: *Relations de divers voyages curieux, qui n'ont point esté publiees; ou qui n'ont esté traduites …* Hrsg. M. Thévenot. 4 Tle. Paris 1663–1672 [Marg.], Tl II 1666: S. *253*.
5. Bond, H., *The variations of the magnetick needle predicted for many yeares following*. In: *Philosophical Transactions*, vol. III, 1668, S. 789 f.: S. *252*.
6. Brouncker, W., *The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*. In: *Philosophical Transactions*, vol. 3, 1668, S. 645–649: S. 458. *458*.
7. Cicero, *De officiis*: S. *87*.

– Clerselier, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 8,5.

– Deprez, G. [Hrsg.] s. SV. N. 31.

8. Descartes, R.
   1. *Discours de la Methode … Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode*. Leiden 1637 [auch in *DO* VI S. 1–515.]; Nachdr. Osnabrück 1973. [Darin: SV. N. 8,2. 8,3.]
   2. *La Dioptrique*. In SV. N. 8,1 S. 1–153 (2. Zählung) [auch in *DO* VI S. 79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N. 8,4 S. 71–206 [auch in DO VI S. 584–650]: S. *488*.
   3. *La Géométrie*. In SV. N. 8,1 S. 297–413 (2. Zählung) u. ö. [auch in *DO* VI S. 367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N. 13,1 S. 1–118.; 2. Ausg. in SV. N. 13,2 Tl I S. 1–106 [Marg.]: S. *424*. *427*. *483*. *484–486*. *492*. *504*. *573*.
   4. *Specimina philosophiae*. Amsterdam, 1644 u. ö. [Darin: SV. N. 8,2.]

5. *Lettres*. [Hrsg. Cl. de Clerselier]. 3 Bde. Paris 1657–67; lat. Fassung u. d. T. Epistolae. Amsterdam 1668–82: S. *485*.

9. Diophant, *De multangulis numeris*: S. *600*.

10. Euklid, *Elemente*: S. 103. *103*. 126. *126*.

– Eycke, S. van der [Hrsg.] s. SV. N. 24.

11. Fabri, H., *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: S. *225*. *228*.

12. Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638; Nachdr. Brüssel 1966; [auch in *Opere*, 2 Bde. Bologna 1656 u. in *GO* VIII S. 39–318 u. *GO* I S. 187–208]: S. *25*. *69*. *228*. 246–247. *246–247*.

13. *Geometria*

1. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: Descartes, R., SV. N. 8,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; Schooten, Fr. v., SV. N. 38,1; ders., *Additamentum*. S. 295 bis 336.]

2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: Descartes, R., SV. N. 8,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*; Schooten, Fr. v., SV. N. 38,1; ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl.; ders., *Additamentum*; Hudde, J., SV. N. 19; Heuraet, H. v., SV. N. 17. In Tl II: *Schooten*, Fr. v., *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl.; ders., SV. N. 38,2; Debeaune, Fl., *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. E. Bartholinus, S. 49–152; Witt, J. de, Elementa curvarum linearum. Hrsg. Fr.v. Schooten.]

– Girard, A. [Hrsg.] s. SV. N. 40.

14. Gosselin, G., *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae et algebra, et almucabala vulgo dicitur, libri quatuor*. Paris 1577 [Marg.]: N. 41*. S. *649*.

15. Gregory, J.

1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: S. *65*. *105*. *249*. *495*. *558*. *696*. *697*. *758*. *763*. *765*. *789*. *800*.

Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 640–644: S. *759*. — *Journal des Sçavans*, 2. Juli 1668, S. 353–368 [Auszug (Stellungnahme von Huygens) in *HO* VI Nr. 1647 S. 228–230]: S. *759*.

2. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *105*. *492*.

Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 685–688: S. *492*.

3. *Answer to the animadversions of Mr. Hugenius*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 732–735; [auch in *HO* VI Nr. 1653 S. 240–243]: S. *759*. 799.

4. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: S. *697*. *759*.

5. *An extract of a letter ... to the Publisher, containing some considerations ... upon M. Hugens his letter*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 882–886; [auch in *HO* VI Nr. 1682 S. 306–311]: S. *759*.

16. Guericke, O. v., *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio*. Amsterdam 1672; Nachdr. Aalen 1962: S. *346*.

17. Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 13,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *193*. *487*. *559*.

18. Hobbes, T.
1. *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*. London 1660 [auch in SV. N. 18,3 pars II u. in *HOL* IV S. 1–232]: S. *253*.
2. *Dialogus physicus, sive de natura aeris*. London 1661 [auch in SV. N. 18,3 pars VI und in *HOL* IV S. 233–296]: S. *253*.
3. *Opera philosophica*. Amsterdam 1668: S. *253*.

19. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 13,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. 207. *207*.

20. Huygens, Chr.
1. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654 [auch in *HO* XII S. 113–181]: S. 105. *105*. *225*.
2. Vierter Zusatz zu *De ratiociniis in ludo aleae*. 1665. Ms. [Gedr.: *HO* XIV S. 144–150]: S. *3*. *431*. *712*.
3. Stellungnahme zu James Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* s. SV. N. 15,1.
4. Brief an Gallois. In: *Journal des Sçavans*, 12. Nov. 1668 S. 437–444 [auch in *HO* VI Nr. 1669 S. 272–276]: S. *759*.
5. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. *193*. *486*. *558*

21. *Journal des Sçavans*. Paris (Amsterdam) 1665 ff.:
— Juli 1668: S. *759*.
— November 1668: S. *759*.
— Juli 1672: S. *30*.
— Dezember 1672: S. *30*.

22. Kepler, J.
1. *Strena seu de nive sexangula*. Frankfurt/Main 1611; [auch in *KW* IV S. 259–280]: S. *524*.
2. *Harmonices mundi libri V*. Linz 1619; [auch in *KW* VI S. 1–377]: S. *524*.

23. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Dissertatio de arte combinatoria*. Leipzig 1666 [auch in *LSB* VI, 1 S. 163–228): S. 28. *28*. 252. *252*.
2. *Propositiones quaedam physicae*. Zweiter Entwurf. Frühjahr – Herbst 1672 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 2_2 S. 6–10]: S. *17*.
3. *Aus und zu Galileis Discorsi*. Herbst 1672 bis Winter 1672/73. Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 11 S. 163–168]: S. *25*. *69*. *228*.
4. *Accessio ad arithmeticam infinitorum*. Ende 1672. Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 2 S. 1–20]: S. *30*. *52*. *61*. *69*. *72*. *76*. *111*. *141*. *150*. *369*. *431*.
5. *In subsectione polygonorum regularium circulo inscriptorum*. Ende 1672 – Anfang 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 3 S. 5 bis 30]: S. *61*. *125*.
6. *Mathematica*. Ende 1672 – Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 106 S. 653–674]: S. *225*.
7. *De figuris similibus*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 60–70]: S. *229*.
8. *Approximatio ad mensuram circularem geometrica*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_2 S. 70–74]: S. *588*.
9. *De bipartitionibus numerorum eorumque geometricis interpretationibus*. 1. Halbjahr 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 36 S. 217–228]: S. *193*. *228*. *242*. *246*.
10. *De geometria seu potius algebra mechanica*. Frühjahr – Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 8 S. 104–108]: S. *249*.
11. *De problematis Geometriae Cartesii. De compositione rationum*. Frühjahr bis Sommer (?) 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 110 S. 679–689]: S. *342*.
12. *Tentamen primum pertinens ad problema quod dicitur sex quadratorum*. Juni – August 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 42 S. 246 bis 253]: S. *127*.
13. *Inventa aliquot mea geometrica*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 29 S. 114–117]:

S. *251*. *566*.
14. *Schediasma de extractione radicum*. Sept. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 125 S. 783 bis 804]: S. *783*.
15. *De aequationibus ad circulum inveniendis*. Sept. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 130 S. 835–846]: S. *370*.
16. *Schediasma de constructione per curvam et lineam rectam*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 138 S. 884–888]: S. *370*.
17. *Arithmetische Kreisquadratur*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. *314*. *386*. *388*. *632*.
18. *Schediasma de divisionibus aequationum ope diversarum literarum*. Dez. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 143 S. 906–910]: S. *567*.
19. *Problema Davenantii*. Kurz nach dem 22. April 1675. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 77 S. 535–538]: S. *664*.
20. *Analysis tetragonistica ex centrobarycis*. 25./26. Okt. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 147–151]: S. *695*.
21. *Analyseos tetragonisticae pars secunda*. 29. Okt. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 151 bis 156]: S. *668*.
22. *Methodi tangentium inversae exempla*. 11. Nov. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 161 bis 167]: S. *668*. *676*.
23. *Wallisii series interpolanda pro circulo. Fractionum resolutio dividendo per fractiones*. Dez. 1675. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 85_1 S. 569–572]: S. *661*.
24. *Data basi, angulo ad basin, rectangulo sub lateribus invenire triangulum. Tentamen tertium*. Ende 1675 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 14_3 S. 141–146]: S. *360*.
25. *Praefatio opusculi de quadratura circuli arithmetica*. ca Ende 1675. Ms. [Gedr.: *LMG* V S. 93–98]: S. *559*.
26. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Ende 1675 bis Herbst 1676. Ms. [Gedr.: Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 = Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge Nr. 43]: S. *271*. *288*. *318*. *345*. *386*. *388*. *393*. *566*. *572*. *632*. *701*. *726*. *726*. *758*. *802*.
27. *Extensio interminata*. April 1676 (?). Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* VI, 3 N. 66 S. 489 f.]: S. *802*.
28. *De angulo contactus*. April – Juli 1676. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 32 S. 205]: S. *799*.
29. *Auszüge aus den mathematischen Papieren der Royal Society*. 18.–29. Okt. 1676. Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 98 S. 663–681]: S. *830*.
30. *Calculus tangentium differentialis*. Nov. 1676. Ms. [Gedr.: *LBG* S. 229–231 u. SV. N. 48 S. 86–92]: S. *822*.
31. *Historia et origo calculi differentialis*. 1714. Ms. [Gedr.: *LMG* V S. 392–410]: S. *712*.

Briefe:

32. Leibniz für die Royal Society, 13. Feb. 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 4 S. 22–29; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 438–448]: S. *30*. *50*. *61*. *167*. *245*.
33. Leibniz an Oldenburg, 8. März 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 9 S. 38–45; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 488–498]: S. *484*.
34. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. April 1673; Auszug von Leibniz, Frühjahr 1675. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 13 S. 49 bis 79; ohne Auszug mit engl. Übers. in: *OC* IX S. 549–570]: S. *249*. *251*. *252*.
35. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 17 S. 83–89; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 593–601]: S. *249*.
36. Leibniz an Oldenburg, 24. Mai 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 20 S. 92–95; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 648–652]: S. *139*.
37. Leibniz an Ferdinand von Fürstenberg, Dez. 1676. [Gedr.: *LSB* I, 2 N. 209 S. 238 bis 240]: S. *834*.
38. Leibniz an Weigel, Sept. 1679. [Gedr.:

LSB II, 1 N. 212 S. 485–487 u. III, 2 N. 345 S. 836–840]: S. *676*.
39. Leibniz an L'Hospital, April (?) 1695. [Gedr. u. a. in: *LMG* II S. 274–277]: S. *827*.
40. L'Hospital an Leibniz, 25. April 1695. [Gedr. u. a. in: *LMG* II S. 277–281]: S. *827*.
41. Leibniz an Joh. Bernoulli, 29. Januar 1697. [Gedr. u. a. in: *LMG* III S. 360–364]: S. *827*.

24. Ludolph van Ceulen, *Vanden circkel. Daer in gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter tegen synen omloop … Item aller figueren-syden in den circkel beschreven … Noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium … Een laetsten van interest …* Delft 1596; 2. Aufl. Leiden 1615. Hrsg. S. van der Eycke; lat. Fassung u. d. T. *De circulo et adscriptis liber. In quo plurimorum latera … secundum algebricarum aequationum leges explicantur*. Leiden 1619. Hrsg. W. Snell: S. *105*. *723*.

25. Mengoli, P., *Circolo*, Bologna, 1672: N. 57*.

26. Mercator, N., *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis … cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum … Huic etiam jungitur Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis …* London 1668 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1975: S. 107. *107*. *125*. 127. *127*. *128*. *207*. *386*. *403*. *703*. *723*.
Rez. in SV. N. 44,5.

27. Monconys, B. de, *Journal des voyages*. Hrsg. G. de Monconys. P. 1–2. Lyon 1655–1666: S. *253*.

– Monconys, G. de [Hrsg.] s. SV. N. 27.

28. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis … libri primus et secundus*, Paris 1631. — *Libri quatuor priores*, ebd. 1639 u. ö.: S. *249*.

29. Pappus, *Mathematica collectio*: S. *126*.

30. Pardies, I. G., *Élémens de géométrie*, Paris 1671 u. ö.: S. *76*. *302*. *484*. *492*.

31. Pascal, Bl., *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Hrsg. G. Deprez. Paris 1665 [Marg.]; [auch in *PO* III S. 433–593, 341–67, 311–39]: S. 25. *25*. *30–31*. *44*. *320*. *323–324*. *332*. *363*. *708*.

32. Pell, J., *Controversiae de vera circuli mensura anno 1644 exortae inter Christianum Severini, Longomontanum … et Ioannem Pellium … pars prima* [mehr nicht ersch.]. Amsterdam 1647: S. *342*. *588*.

33. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.:
— 16./26. März 1667/1668: S. *759*.
— 13./23. April 1668: S. 458. *458*.
— 18./28. Mai 1668: S. *492*.
— 13./23. Juli 1668: S. *759*. 799. *799*.
— 17./27. August 1668: S. 107. *107*.
— 15./25. Februar 1668/1669: S. *759*.
— 25. März/4. April 1669: S. *803*.

34. Renaldini, C., *Geometra promotus*. Padua 1670: S. *492*.

35. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. London 1668 zus. mit SV. N. 26 [Marg.]: N. 65*.

36. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: N. 7*. S. *30*. *49*. *61*. *72*. *251*. *505*. *558*. *757*.

37. Sarasa, A. A. de, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*. Antwerpen 1649 [Marg.]: S. *251*.

38. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 13,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 13,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *486*.
2. *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten. In SV N. 13,2 Tl II S. 341–420: S. *342*. *588*. *697*.
3. [Hrsg.] s. SV. N. 13,1. 13,2.

– Schooten, P. v. [Hrsg.] s. SV. N. 38,2.

39. Sluse, R. Fr. W. de

1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas . . . exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: N. 65*.
Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 4, 1669, S. 903–909: S. *803*.

2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius . . . to the Publisher . . . concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometricel curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672, S. 5143–45; Nachtrag *a. a. O.* vol. 8, 1673, S. 6059: S. *391*. *416*. *419*. *822*.

40. Snell van Royen, W.

1. *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. *105*. *723*.

2. [Hrsg.] s. SV. N. 24.

41. Stevin, S., *L'arithmetique*. Leiden 1585; 2. Aufl. ebd. 1625; [auch in: *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*. Hrsg. A. Girard. Leiden 1634]: S. *524*.

42. Tavernier, J. B., *Les six voyages . . . en Turquie, en Perse, et aux Indes*. 2 Tle. Paris 1676 u. ö.: S. *834*.

– Thévenot, M. [Hrsg.] s. SV. N. 4.

43. Viète, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1970.
[Darin:] (S. 162–228) *De numerosa potestatum purarum, adque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus* [zuerst ersch. Paris 1600]: S. 510. — (S. 240–257) *Supplementum geometriae* [zuerst ersch. Tours 1593]: S. *486*.

44. Wallis, J.

1. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in *WO* I S. 355–478; Marg.]: S. 102. *102*. 127. *127*. 183. *183*. *492*. *558*. *751*. *792*. *824*.

2. *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum*. Oxford 1657. In: *Operum mathematicorum pars prima*; [auch in *WO* I S. 11–228; Marg.]: S. *127*. *253*.

3. *Commercium epistolicum, de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum*. Oxford 1658; [auch in *WO* II S. 757–860; Marg.]: S. *558*.

4. *Tractatus duo, prior de cycloide . . . Posterior . . . de cissoide*. Oxford 1659 [Marg.]; [auch in *WO* I S. 489–569; Marg.]: S. *495*.

5. *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed of in a letter . . . to the Lord Viscount Brouncker . . .* In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668, S. 753–759: S. *107*. *125*. 127. *127*. 306. *307*.

6. *Mechanica: sive, de motu, tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S. 570–1063; Marg.]: S. *495*.

45. Costabel, P., *Leibniz et les séries numériques*. In: SV. N. 50 S. 81–101: S. *712*.

46. Gregory, J., *James Gregory tercentenary memorial volume*. Hrsg. H.W. Turnbull. London 1939: S. *759*.

47. Hess, H. J., *Zur Vorgeschichte der ‚Nova Methodus' (1676-1684)*. In: *300 Jahre ‚Nova Methodus' von G. W. Leibniz (1684–1984)*: Symposion in Nordwijkerhout, 28.–30. August 1984, S. 64–102 = Studia Leibnitiana Sonderheft. Nr. 14. Stuttgart 1984: S. *822*.

48. Hofmann, J. E.
1. *Die Differenzenrechnung bei Leibniz*. Zus. m. H. Wieleitner und Zusätzen von D. Mahnke. In: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Phys.-math. Klasse. Nr. 26. Berlin 1931, S. 560–600. [Darin: Mahnke, D., SV. N. 51,2.]
2. *Leibniz in Paris. 1672–1676. His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge 1974: S. *827*.

49. Knobloch, E.
1. *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Abhandlungsband. Textband = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XI. XVI. Wiesbaden 1973. 1976: S. *17*.
2. *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672 bis 1676)*. In SV. N. 50 S. 3–43; russ. u. d. T. *Rukopisi Lejbnica 1672–1676 gg.* In: *Istoriko-matematičeskie Issledovanija* 24 (1979) S. 258 bis 309: S. *606*. *830*.

50. *L e i b n i z à Paris (1672-1676)*. Symposion à Chantilly du 14 au 18 Nov. 1976., T. 1: *Les sciences* = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XVII. Wiesbaden 1978. [Darin: Costabel, P., SV. N. 45; Knobloch, E., SV. N. 49,2.]

51. Mahnke, D.
1. *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Jahrgang 1925. Phys.-math. Klasse. Nr. 1. Berlin 1926: S. *250*. *251*. *566*.
2. *Zusätze aus den ungedruckten Handschriften*. In SV. N. 48,1 S. 590–600: S. *712*.

52. Palumbo, M., *Leibniz e i geographica*, Rom 1996: S. *253*.

53. Scriba, C. J., *Gregory's converging double sequence*. In: *Historia Mathematica* 10 (1983) S. 274–285: S. *759*.

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXII–XXV . Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

Hannover, *Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 4	V 10	Bl. 58	N. 47
		Bl. 63	N. 65
LH 35	I 17	Bl. 16	N. 7
	II 1	Bl. 80+124	N. 26
		Bl. 93–94	N. 23
		Bl. 125	N. 58
		Bl. 161–162	N. 24
		Bl. 179	N. 63
		Bl. 205–206	N. 5
		Bl. 237–238	N. 21
		Bl. 246–247	N. 34
		Bl. 248–249	N. 25
		Bl. 291–292	N. 19
	III B 10	Bl. 1	N. 35
		Bl. 2–3	N. 12
		Bl. 4	N. 11
		Bl. 5	N. 1
	IV 17	Bl. 10–11	N. 41_2
	V 2	Bl. 3–4	N. 39
	V 3	Bl. 5	N. 36
	V 4	Bl. 1+37	N. 38_1
		Bl. 2–3	N. 38_2
		Bl. 4–5	N. 38_3
		Bl. 6–7	N. 38_4
		Bl. 8–9	N. 38_5
		Bl. 10–11	N. 38_6
		Bl. 12–13	N. 38_7
		Bl. 14–15	N. 38_8
		Bl. 16–17	N. 38_9
		Bl. 18–19	N. 38_{10}
		Bl. 20–21	N. 38_{11}
		Bl. 22–23	N. 38_{12}
		Bl. 24–25	N. 38_{13}
		Bl. 26–27	N. 38_{14}
LH 35	V 4	Bl. 28–29	N. 38_{15}
		Bl. 30–31	N. 38_{16}
		Bl. 32–33	N. 38_{17}
		Bl. 34–36	N. 38_{18}
	V 6	Bl. 12–13	N. 22
	V 7	Bl. 1	N. 50
	V 14	Bl. 15	N. 65
		Bl. 16	N. 71
	VIII 4	Bl. 1	N. 43_1
		Bl. 2	N. 43_2
		Bl. 3	N. 43_3
		Bl. 4–5	N. 44_1
		Bl. 6–7	N. 44_2
		Bl. 8	N. 44_3
	VIII 27	Bl. 1	N. 53_3
		Bl. 2	N. 53_2
	VIII 30	Bl. 43	N. 57_1
		Bl. 100	N. 70
		Bl. 144–145	N. 68_1
		144–145	N. 68_2
		Bl. 146	N. 67
	XII 1	Bl. 1	N. 59
		Bl. 7	N. 69
		Bl. 9–10	N. 56
		Bl. 9–10	N. 57_2
		Bl. 24	N. 61_1
		Bl. 25	N. 61_1
		Bl. 25	N. 61_2
		Bl. 29	N. 61_2
		Bl. 32	N. 31
		Bl. 45–46	N. 3
		Bl. 129–136	N. 6
		Bl. 137	N. 9
		Bl. 138–139	N. 14

LH 35	XII 1	Bl. 140–143	N. 13
		Bl. 144–145	N. 4_4
		Bl. 146–147	N. 4_3
		Bl. 148–149	N. 4_1
		Bl. 150–153	N. 4_2
		Bl. 243–244	N. 54
		Bl. 245–246	N. 28
		Bl. 245–246	N. 30
		Bl. 247–248	N. 27
		Bl. 250	N. 53_1
		Bl. 251–252	N. 29
		Bl. 253	N. 55
		Bl. 254	N. 52
		Bl. 255	N. 49_2
		Bl. 256	N. 49_1
		Bl. 311	N. 64
		Bl. 328–329	N. 8
		Bl. 346–347	N. 60
	XII 2	Bl. 62	N. 38_{16}
		Bl. 88	N. 20
		Bl. 119	N. 51
		Bl. 123–124	N. 17_3
		Bl. 131–132	N. 10
LH 35	XII 2	Bl. 135	N. 45
		Bl. 150	N. 73
		Bl. 163–164	N. 6
		Bl. 165–166	N. 8
		Bl. 197–198	N. 2
		Bl. 206–207	N. 18
		Bl. 208–209	N. 15
		Bl. 210–211	N. 17_2
		Bl. 218	N. 17_1
	XIII 1	Bl. 223–224	N. 40
		Bl. 228	N. 42
	XIII 3	Bl. 227–228	N. 16
		Bl. 265	N 72
	XIV 1	Bl. 102–103	N. 62
		Bl. 117	N. 48
		Bl. 119	N. 32
		Bl. 120–121	N. 33
		Bl. 122	N. 66
		Bl. 258–259	N. 37
		Bl. 305	N. 46
Nm-A 317			N. 41_1
Nm-A 605			N. 28

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfaßten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Fünf der ersten acht hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique* 2 nicht erfaßt, drei (N. 28, 38_{16}, 65) nur teilweise. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, daß das bezeichnete Stück in diesem Band nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	9	437	10	517	35	615	18
—	20	510 A	4_3	518	3	627	16
—	28	510 B	4_4	526	8	629	17_1
—	38_{16}	510 C	4_1	527	6	630	17_3
—	41_1	510 D	4_2	528	8	633	24
—	63	511	5	529 tlw.	8	634	24
—	65	512	14	530 tlw.	2	640	17_2
—	69	513 A, B	13	554	25	694	21
278	12	514	1	556	26	755	36
279	11	515	19	557	23	756	41_2
280	15	516	31	558	23	775 A	38_1

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
775 A	38_2	777	46	1186	50	1412	58
775 A	38_3	778	34	1206	48	1425 tlw.	59
775 A	38_4	820	39	1207	66	1453 A–B	60
775 A	38_5	892	43	1210	70	1455	64
775 A	38_6	920 A	44_1	1239	22	1458	61_1
775 A	38_7	920 A	44_2	1303	54	1459 A–B	61_2
775 A	38_8	920 B	44_3	1334 tlw.	55	1459 C	61_2
775 A	38_9	929	45	1335	29	1459 C	61_1
775 A	38_{10}	1030	33	1336	53_3	1467	32
775 A	38_{11}	1036	37	1337	53_2	1468	62
775 A	38_{12}	1139	65	1340	49_1	1511	68_2
775 A	38_{13}	1140	71	1341	51	1512	68_1
775 A	38_{14}	1180 tlw.	53_1	1398	57_2	1513	67
775 A	38_{15}	1181	49_2	1399	56	1514	42
775 A	38_{16}	1182	28	1400	57_2	1515 A	73
775 A	38_{17}	1183	30	1401	57_2	1542	72
775 B, C	38_{18}	1184	27	1403	57_1	1549	7
776	40	1185	52	1408	47		

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfaßt die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz’ eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
LuX	Leibniz gemeinsam mit Unbekanntem, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
X	Unbekannter, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen und Eingriffe des Herausgebers (ursprüngliche Form im Variantenapparat). Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
$\langle\ \rangle$	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
$\langle - \rangle$	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
$\boxed{\qquad\qquad}$	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
i. a.	im allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LBr.	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Briefwechsel
LH	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Handschriften
lib.	liber

Marg.	Marginalie(n)
Ms.	Manuskript
N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
p., pag.	pagina
probl.	problema
prop.	propositio
R.	responsio, respondetur
r^{o}	recto
reg.	regula
S.	Seite
s.	sectio, siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
u. ö.	und öfter
v.	von, vor
Var.	Variante
vgl.	vergleiche
v^{o}	verso
Z.	Zeile
₰	destilletur, distilletur (noch zu bedenken); denier

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2 *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.

DGS *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 13,2).

DO Descartes, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.

GO Galilei, G., *Opere*. Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929–1939 u. ö.

GT *James Gregory tercentenary memorial volume*. Hrsg. H. W. Turnbull, London 1939 (= SV. N. 46).

HO Huygens, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

HOL Hobbes, Th., *Opera philosophica quae latine scripsit omnia*. Hrsg. W. Molesworth. 5 Bde. London 1839–1845; Nachdr.: Aalen 1961.

KW Kepler, J., *Gesammelte Werke*. Hrsg. von der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München. — Im Erscheinen.

LBG *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LFC *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Hrsg. L. Couturat. Paris 1903; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1966.

LKK *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Textband. Hrsg. E. Knobloch = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XVI. Wiesbaden 1976 (= SV. N. 49,1).

LMG *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1962 u. 1971.

LQK LEIBNIZ, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Hrsg.: E. Knobloch. Göttingen 1993.

LSB LEIBNIZ, G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe*. Hrsg. von der Göttinger und der Berliner Akademie der Wissenschaften, Berlin — Im Erscheinen.

OC OLDENBURG, H., *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

PO PASCAL, Bl., *Oeuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

VO VIÈTE, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten.* Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970 (= SV. N. 43).

WO WALLIS, J., *Opera mathematica*, 3 Bde, Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXVIII–XXXIII.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. CAJORI, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. CAJORI, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
∝	Division, Proportion
$\square$, $\boxed{2}$	Quadrat
cub, $\boxed{3}$	Kubus
Rq, $\boxed{\frac{1}{2}}$	Quadratwurzel
aeq., aequ.	gleich
⊓	gleich
⊓⊓	gleich (Summe)
⊓, ⊏	größer als
⊓	etwas größer als
⊓	kleiner als
⊓	etwas kleiner als

$a\,.\,b : c\,.\,d$	Proportion
$\mid$	Kürzung eines Bruchs
⨍	facit
Platzhalter:	
$*$	ausfallende Terme
⊚	Vorzeichen
…	Terme
:	Terme
⊛	Terme
Wiederholung:	
..	Faktoren
$\div$	Brüche
Tschirnhaus:	
⌒	gleich
a ┬┬ b ┬ c ┬┬ d	Proportion

5. BERICHTIGUNGEN

VII, 1:

S. 65 Z. 24: *Statt* article 42 ... entnommen *lies* article 40 S. 115 entnommen
S. 78 Z. 25: *Statt* 1959 *lies* 1659
S. 105 Z. 35: *Statt* N. 106 *lies* N. 106 §73 sowie H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 497 f. Die Aufgabenstellung hat Leibniz dort unterstrichen.
S. 148 Z. 24–26: *Statt* Es scheint ... *DGS* I, S. 207 *lies* *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 66
S. 184 Z. 5: *Statt* sxx + gx + r *lies* pxx + qx + r
S. 185 Z. 18 f.: *Statt* x die des *lies* x die Apotome des
S. 224 *Ergänze Erl. zu Z. 7–9*: Richtig müßte es $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ etc. = 2 bzw. $\mathrm{a} + \frac{1}{3}\mathrm{a} + \frac{1}{6}\mathrm{a} + \frac{1}{10}\mathrm{a}$ etc. = 2a heißen.
S. 246 Z. 10: *Statt* quadratos ut *lies* quadratos (puto numeros) ut *und streiche die zugehörige Lesart*.
S. 246 Z. 20: *Statt* l'anse *lies* l'ange
S. 250 Z. 17: *Statt* Der Sinn ... Verweis *lies* s. R. DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 43 sowie den zugehörigen Schootenschen Kommentar M, *DGS* I, S. 242–249
S. 527 Z. 10: *Statt* z + 1 *lies* z + β
S. 527 Z. 29 f.: *Statt* Auf ... ist *lies* Die Symbole Ⓥ und ab Z. 9 $\boxed{Ⓥ}$ verwendet Leibniz, um Bildungsgesetze für Zahlenfolgen zu bezeichnen.
S. 658 *Ergänze Erl. zu Z. 16*: constat: vgl. H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 73, sowie die zugehörige Beweisfigur (Tafel I Figur 14). Leibniz hat den Satz im Text unterstrichen und zugleich mit einer Randbemerkung versehen; bei Fig. 14 hat er den Sachverhalt formelmäßig erfaßt.
S. 664 Z. 33: *Statt* 1959 *lies* 1659
S. 675 Z. 5: *Statt* 144 *lies* 544
S. 861 Z. 11: *Statt* [+q] *lies* [−q]
S. 931 SV. N. 2,3: *Statt* 108 *lies* 180
S. 932 SV. N. 11,3: *Statt 244 lies 224*
S. 936 SV. N. 51,1: *Statt 67 lies 78*

Zum Inhaltsverzeichnis