BUDN
QA
803
.A45
1713

BURN QA803 .A45 1941c.1

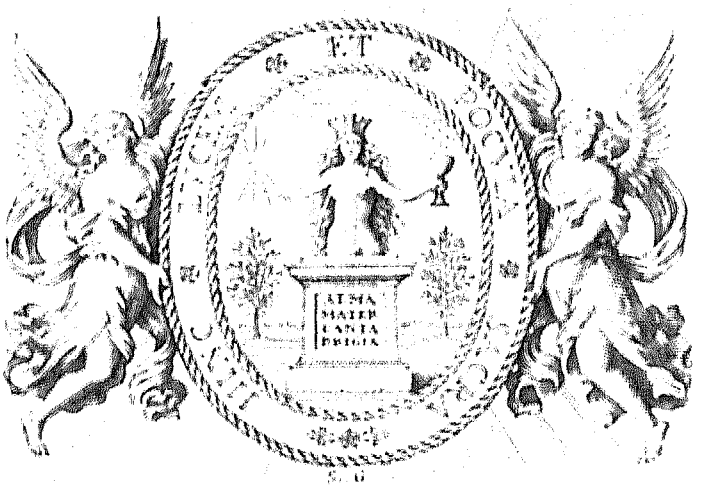
BURNDY
LIBRARY
CHARTERED IN 1941

GRACE K. BABSON
COLLECTION OF THE WORKS
OF SIR ISAAC NEWTON

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.




CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D. D. D.

*Is. NEWTONUS.*

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

# ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

*Sæculi Gentiſque noſtræ Decus egregium.*

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens ſibi Leges ipſe Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cæli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Hinc patet, horrificis qua ſit via flexa Cometis:
Diſcimus hinc tandem, qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis eat, & cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Diſcimus, & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alterniſve ruens ſpumantia littora pulſat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus; nubem pellente Matheſi:
Quæ ſuperas penetrare domos, atque ardua Cæli,
NEWTONI auſpiciis, jam dat contingere Templa.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires cognoſcite Mentis,
A pecudum vita longe longeque remotæ.
Qui ſcriptis primus Tabulis compeſcere Cædes,
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
In commune ferens miſeræ ſolatia vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
Clauſtra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
Et quæ præteritis latuere incognita ſæclis.
Talia monſtrantem juſtis celebrate Camænis,
Vos qui cæleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis carum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

*EDM. HALLEY.*

PRÆ-

# AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *Veteres* Mechanicam (*uti Auctor eſt* Pappus) *in rerum Naturalium inveſtigatione maximi fecerint*; & *Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc Tractatu* Matheſin *excolere, quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres conſtituerunt*: Rationalem *quæ per Demonſtrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad Practicam ſpectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem Artifices parum accurate operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt Artis ſed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſime operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum deſcriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet ſed poſtulat. Poſtulat enim ut Tyro eaſdem accurate deſcribere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet. Rectas & Circulos deſcribere Problemata ſunt,*

*ſed*

*ſed non Geometrica.* Ex Mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud eſt quam* Mechanicæ univerſalis *pars illa quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elaſticam, reſiſtentiam Fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter, hæc noſtra tanquam Philoſophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a Phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales quas Libro primo & ſecundo pertractavimus. In Libro autem tertio Exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in Libris prioribus Mathematice demonſtratas, derivantur vires Gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer ea omnia*

*nia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.*

*In his edendis, Vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus* Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Auctor fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me Figuram Orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cæpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, & Figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio *S. Trinitatis*, Maii 8. 1686.

*IS. NEWTON.*

# AUCTORIS PRÆFATIO.

*IN hac Secunda Principiorum Editione, multa ſparſim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione* II, *Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri ſecundi Sectione* VII, *Theoria reſiſtentiæ Fluidorum accuratius inveſtigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex Principiis ſuis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

*IS. NEWTON.*

EDI-

# EDITORIS PRÆFATIO.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Qui Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos Effectus ex corporum ſingularibus Naturis oriri; at unde ſint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; Sermonem quendam Philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas Obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum

ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus, etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, Fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut Quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam Phænomenis per Analyſin deducunt, ex quibus deinde per Syntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt Philoſophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam cenſuit Celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit Exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem e Theoria Gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus Ille & ſolus ex Apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; deſpiciamus pauliſper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cæleſtia, longiſſime a ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitant in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ totius

totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, Gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet Aeris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a Tangentibus deflectantur.

Jam

Jam illud concedi æquum eſt, quod Mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in Orbitarum centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & Mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in Orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant Orbitarum Apſides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac Philoſophia. Reſtat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat Planetas in Orbitis ſuis retineri per Vim aliquam in ipſos perpetuo agentem: conſtat Vim illam dirigi ſemper verſus Orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione qua diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejuſdem forte ſint generis. Ejuſdem vero generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima eſt, Vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi a viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: Hoc utique conſequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis, ad Vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, ut ſpatium quod tempore quam minimo deſcriberet Luna deſcendendo per Vim centripetam verſus Terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quam minimo deſcribit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcus a Luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui Lunæ tranſlationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum Lunæ tempore periodico tum diſtantia ejus a centro Terræ. Spatium poſterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Gravitatis in ſuperficie Terræ, erit ut quadratum ſemidiametri Terræ ad Orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita ſua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ ſuperficiem æqualis eſt vi Gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi ſola Gravitatis. Conſtat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipſam eſſe vim Gravitatis terreſtris ad Lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe Virtus extendat,

cum

cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philoſophia, ubi agitur de Maris æſtu & Æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus a Tellure diſtantiis. Nam cum Gravitas non diverſa ſit a Vi centripeta Lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt Phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a Terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per Obſervationes certiſſime demonſtratam, Præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet igitur

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematice comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cælorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apsidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cælestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematice demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravitas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si Gravitas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possimus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum Gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per Experimenta innoteſcunt: eodem plane modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus Obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt Gravia, de quibus Obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non eſſe Gravia, quandoquidem eorum Gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque Extenſa eſſe, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? Inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuo argutari ſolent; occultas vero cauſas procul eſſe ablegandas a Philoſophia. His autem facile reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per Obſervationes clariſſime demonſtratur, ſed has ſolum quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex Phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem revera exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philoſophia, quod cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant

ant abſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? ſimul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in Phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic inepta prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica cæleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit Effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere vel ab intus concluſo Elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum Horologium revera ſit inſtructum Pondere;

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypotheſi ſic præpropere conficta motum Indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile ferretur judicium de Philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima Cælos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indefinenter agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex Hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maxime conceſſerimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſus determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem Vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat vero Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus Cælorum, velocitatibus variis variaque curſus determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias a Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint Planetæ; alia, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque Vortice, ſed a pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuo penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui

ſunt

ſunt ſumme regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim Cauſa debet eſſe Effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem Hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam Hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex natura ſua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas deſcribere; qui ſane motus multo facilius concipi poteſt, quam conſimilis motus Vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cæleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc Fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quam Hypotheſis Atmoſphærarum Hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in Parabola moti deflexionem a curſu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat; & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materia ſcilicet & motu, phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philoſophia feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Sum-

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbes ſunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Cælorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranſeunt, & ſæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certiſſime confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus e Cælis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſupra dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio Vorticis permanere poſſit, debent partes minus denſæ centrum occupare, magis denſæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde vero ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minus denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, qua partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam denſitas & vis inertiæ Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Cometarum

metarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis Inertiæ. Nam reſiſtentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in Fluidis vulgo notis, niſi valde tenacia fuerint adinſtar Olei & Mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujuſmodi Fluidis non tenacibus fere tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente Fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſime demonſtratum eſt ab Auctore noſtro in peregregia Reſiſtentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac ſecunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut Fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem Fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi a Fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio Fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta Fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt Fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cum nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim qua motus communicetur, cum nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim qua mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cum nulla ſit vis qua motus communicetur: nullam eſſe omnino efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & Philoſopho prorſus

ſus indignam. Qui Cælos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani Spatio; diſputatio tota ſit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus Naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas Gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentia; Materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed Obſervando atque Experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia Legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum,

miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſime cernuntur Conſilium optimum & Dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitioſe indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere Philoſophiam in Atheiſmo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præſtantiſſima Philoſophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Obſervationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illuſtriſſimi noſtri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis Mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, Rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque Naturæ majeſtatem propius jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Univerſorum impenſius colere & venerari, qui fructus eſt Philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: infanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adverſus Atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonſtravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi ſui & Academiæ noſtræ magnum Ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* Magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda supereſſent; suasit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

*Cantabrigiæ*,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

# INDEX CAPITUM TOTIUS OPERIS.


PAG.

DEFINITIONES. 1
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 12

## DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *DE Methodo rationum primarum & ultimarum.* 24
SECT. II. *De inventione Virium centripetarum.* 34
SECT. III. *De motu corporum in Conicis sectionibus eccentricis.* 48
SECT. IV. *De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.* 59
SECT. V. *De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.* 66
SECT. VI. *De inventione Motuum in Orbibus datis.* 97
SECT. VII. *De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.* 105
SECT. VIII. *De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.* 114
SECT. IX. *De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum.* 121
SECT. X. *De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.* 132
SECT. XI. *De Motu corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.* 147
SECT. XII. *De corporum Sphæricorum Viribus attractivis.* 173


SECT.

SECT. XIII. *De corporum non Sphæricorum Viribus attractivis.* 192
SECT. XIV. *De Motu corporum Minimorum, quæ Viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 203

## DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECT. I. DE *Motu corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.* 211
SECT. II. *De Motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione Velocitatis.* 220
SECT. III. *De Motu corporum quibus resistitur partim in ratione Velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.* 245
SECT. IV. *De corporum Circulari motu in Mediis resistentibus.* 253
SECT. V. *De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.* 260
SECT. VI. *De Motu & Resistentia corporum Funependulorum.* 272
SECT. VII. *De motu Fluidorum & resistentia Projectilium.* 294
SECT. VIII. *De motu per Fluida propagato.* 329
SECT. IX. *De motu Circulari Fluidorum.* 345

## DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

REGULÆ PHILOSOPHANDI 357
PHÆNOMENA 359
PROPOSITIONES 362
SCHOLIUM GENERALE. 481

PHILO-

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

## DEFINITIONES.

### DEFINITIO I.

*Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.*

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato ſit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

### DEFINITIO II.

*Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.*

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIONES.

## DEFINITIO III.

*Materiæ Vis Insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab Inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo Vis Inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estq; exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neq; semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

## DEFINITIO IV.

*Vis Impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

## DEFINITIO V.

*Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunq; tendunt.*

Hujus generis est Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus,

actus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoq; fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuò retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideò Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cælos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret priuſquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet, ſed in cælos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & abſque tali vi Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri poſſit; & viciſſim invenire Viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egreſſum a data vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIONES.

DEFINITIONES.

## DEFINITIO VI.

*Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

## DEFINITIO VII.

*Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

## DEFINITIO VIII.

*Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.*

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque eodem corpore majus prope terram, minus in cælis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo; has vires non Phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere & Phyſice tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

## *Scholium.*

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & natura ſua abſq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spa-

Definitiones.

II. Spatium Abſolutum, natura ſua abſque relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cæleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur; ſpatium Aeris noſtri, quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtq; pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; adeoq; locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies Vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & ſi corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoq; feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

entem verſus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore motus cæleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis Abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum

DEFINITIONES.

quum illud datam positionem servet necne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absq; translatione de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

ur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua s relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relati- bi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & prop- motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

DEFINI- TIONES.

ectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invi- ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu ari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſo- majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec ſilum a con- ne admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua :at; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies a- ub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at am, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoque iliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcen- e ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe exper- m) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, do- evolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, at in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum rece- ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſura- otus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo nnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus rela- n vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera va- d plana manebat, & propterea motus illius circularis verus m inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decre- ceenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab utque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum uo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quie- in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſla- aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus cir- verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt cor- ujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tan- proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem rela- o variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum elos noſtros infra Cælos Fixarum in orbem revolvi volunt, netas ſecum deferre; ſingulæ Cælorum partes, & Planetæ lative quidem in Cælis ſuis proximis quieſcunt, moven-

DEFINITIONES.

tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum: est propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui. DEFINITIONES.

# AXIOMATA,
## SIVE
# LEGES MOTUS.

### LEX I.

*Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.*

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

### LEX II.

*Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

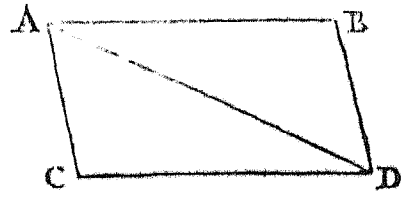
## LEX III.

*Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales ſiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

## COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.*




Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & ideirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

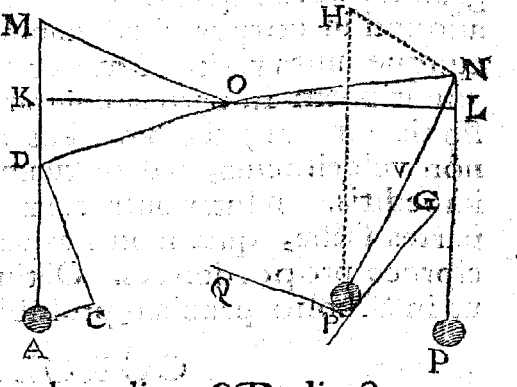
COROL-

AXIOMATA, SIVE

## COROLLARIUM II.

*Et hinc patet compositio vis directæ* AD *ex viribus quibuscunque obliquis* AB *&* BD, *& vicissim resolutio vis cujuscunque directæ* AD *in obliquas quascunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur




in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ*, secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret

geret illud hæc plana viribus $pN$, $HN$ perpendiculariter, nimirum planum $pQ$ vi $pN$, & planum $pG$ vi $HN$. Ideoque si tollatur planum $pQ$, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi $pN$, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis $PN$, ut $pN$ ad $pH$. Ideoque si pondus $p$ sit ad pondus $A$ in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum $pN$, $AM$ a centro rotæ, & ratione directa $pH$ ad $pN$; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem $p$, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus $p$ urget planum $pQ$ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam $pH$ in plano, ut $pN$ and $pH$; atque ad vim, qua urget planum alterum $pG$, ut $pN$ ad $NH$. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarii hujus latissime patet, & late patendo veritatem suam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

## COROLLARIUM III.

*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum $A$ sit triplo majus corpore sphærico $B$, habeatque duas velocitatis partes; & $B$ sequatur in eadem recta cum velocitatis

AXIOMATA, SIVE

locitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progredietur amissis partibus novem, vel quiesceret amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17−1 & 18−2 semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL-

## COROLLARIUM IV.

*Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.*

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc poſtea in Lemmate XXIII demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri communis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, adeoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſque a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

AXIOMATA, SIVE mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; adeoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

## COROLLARIUM V.

*Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſque motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroq; caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroq; caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

## COROLLARIUM VI.

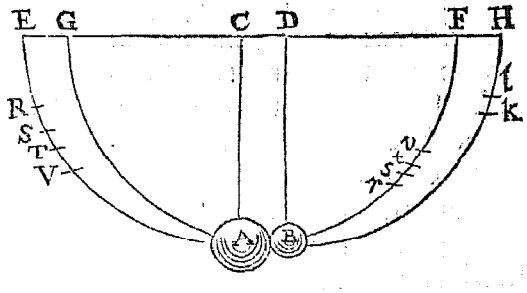
*Si corpora moveãtur quomodocunq; inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.*

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum)

rum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem 11. adeoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe. 

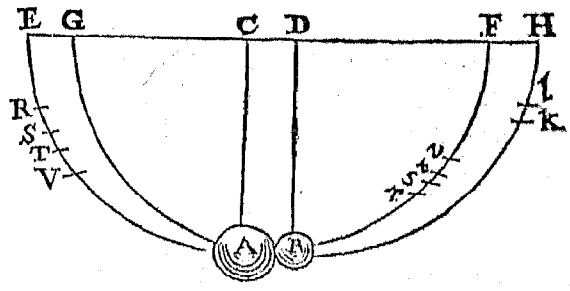
## *Scholium.*

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum Gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab iiſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & Lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio cum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora $A$, $B$ filis parallelis & æqualibus $AC$, $BD$, a centris $C$, $D$. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi $EAF$, $GBH$ radiis $CA$, $DB$ biſecti. Trahatur corpus $A$ ad arcus $EAF$ punctum quodvis $R$, & (ſubducto corpore $B$) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum $V$. Eſt $RV$ retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus $RV$ fiat $ST$ pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut $RS$ & $TV$ æquentur, ſitque $RS$ ad $ST$ ut 3 ad 2. Et iſta $ST$ exhibebit retardationem in deſcenſu ab $S$ ad $A$ quam proxime. Reſtituatur corpus $B$ in locum ſuum. Cadat corpus $A$ de puncto $S$, & velocitas ejus in loco reflexionis $A$, abſque errore ſenſibili, tanta erit ac



Axiomata, sive

ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo eſſe ut chordam arcus quem cadendo deſcripſit, Propoſitio eſt eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio, ita videlicet ut *rs* & *tu* æquentur; & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſq; tam ante, quam poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio ſemper erant æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus; corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim, & reſtabit nihil:



nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandam plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

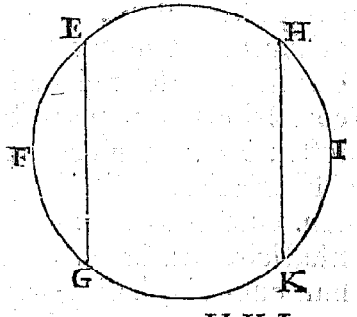
Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant Experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In

AXIOMATA, SIVE

In Attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua eſt. Secetur Terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum ſit, pars major *EGI* ſecetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *EFG*: manifeſtum eſt quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.




Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium

virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Reſiſtentis ſint reciproce ut vires, Agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Ceterum Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere, quam late pateat quamque certa ſit Lex tertia Motus. Nam ſi æſtimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate

tate conjunctim; & similiter Resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

---

# DE MOTU CORPORUM

## LIBER PRIMUS.

---

### SECTIO I.

*De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.*

### LEMMA I.

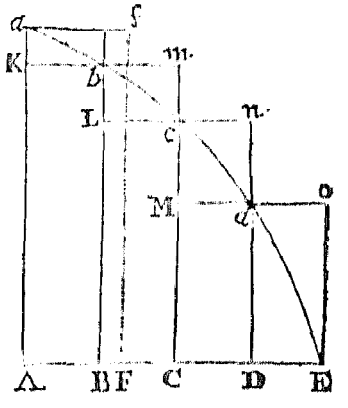
*Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.*

Si negas; fiant ultimò inequales, & sit earum ultima differentia $D$. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia $D$: contra hypothesin.

LEMMA

## LEMMA II.

*Si in Figura quavis* AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehenſa, inſcribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *ſub baſibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem Figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*




Nam Figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *Kb* & altitudinum ſumma *Aa*, id eſt, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1) Figura inſcripta & circumſcripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

## LEMMA III.

*Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines* AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inſcriptæ & Figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

*Corol.* 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium

De Motu Corporum

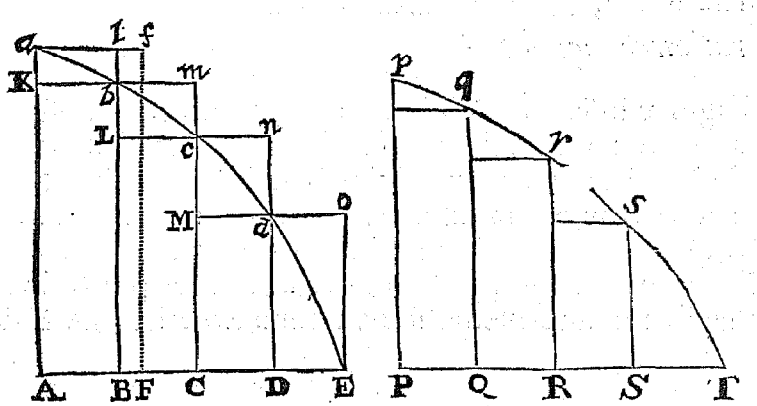
centium arcuum *ab, bc, cd, &c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

*Corol.* 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

*Corol.* 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

## LEMMA IV.

*Si in duabus Figuris* AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*




Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

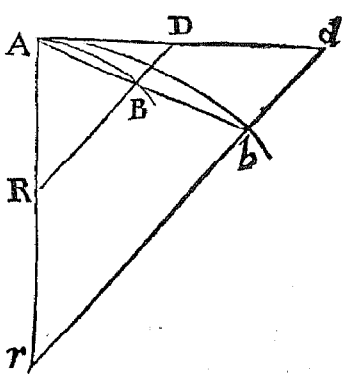
rallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

## LEMMA V.

*Similium Figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum.*

## LEMMA VI.

*Si arcus quilibet positione datus* AB *subtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*




Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

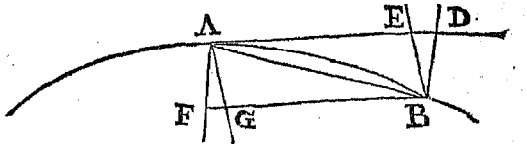
## LEMMA VII.

*Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* semper similis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma superius, evanescet; adeoque rectæ semper finitæ *Ab*, *Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB*

evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Unde ſi per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evaneſcentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem ſemper habet æqualitatis ad *AD*.



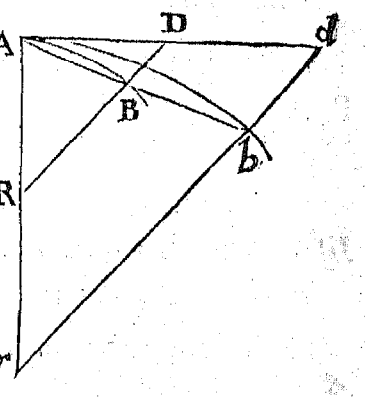

*Corol.* 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

*Corol.* 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

## LEMMA VIII.

*Si rectæ datæ* AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligatur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *AB* ſimilis ſemper ſit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

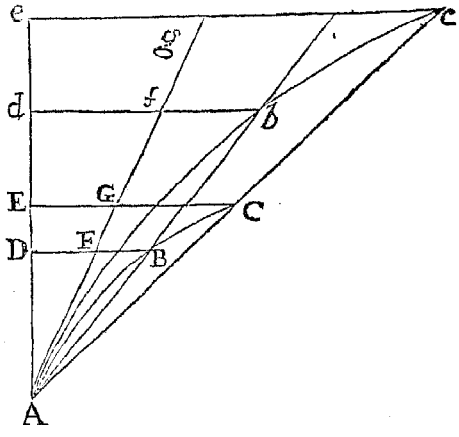



*Corol.* Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA

## LEMMA IX.

*Si recta* AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*




Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*: adeoque (per Lemma v) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

## LEMMA X.

*Spatia quæ corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.*

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.* *Corol.*

*Corol.* 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium Figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium Errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a Figurarum ſimilium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus abſque viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

*Corol.* 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles Figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol.* 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol.* 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

*Corol.* 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

### *Scholium.*

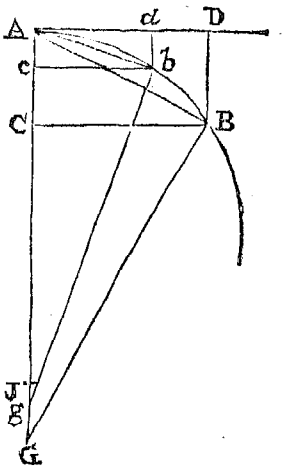
Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

## LEMMA XI.

*Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.*

*Caſ.* 1. Sit arcus ille $AB$, tangens ejus $AD$, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis $BD$, ſubtenſa arcus $AB$. Huic ſubtenſæ $AB$ & tangenti $AD$ perpendiculares erigantur $AG$, $BG$, concur-

concurrentes in $G$; dein accedant puncta $D$, $B$, $G$, ad puncta $d$, $b$, $g$, ſitque $J$ interſectio linearum $BG$, $AG$ ultimo facta ubi puncta $D$, $B$ accedunt uſque ad $A$. Manifeſtum eſt quod diſtantia $GJ$ minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta $ABG$, $Abg$ tranſeuntium) $AB$ *quad.* æquale $AG \times BD$, & $Ab$ *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoque ratio $AB$ *quad.* ad $Ab$ *quad.* componitur ex rationibus $AG$ ad $Ag$ & $BD$ ad $bd$. Sed quoniam $GJ$ aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio $AG$ ad $Ag$ minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ut ratio $AB$ *quad.* ad $Ab$ *quad.* minus differat a ratione $BD$ ad $bd$ quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per Lemma 1, ratio ultima $AB$ *quad.* ad $Ab$ *quad.* æqualis rationi ultimæ $BD$ ad $bd$. *Q. E. D.*




*Cas.* 2. Inclinetur jam $BD$ ad $AD$ in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima $BD$ ad $bd$ quæ prius, adeoque eadem ac $AB$ *quad.* ad $Ab$ *quad.* *Q. E. D.*

*Cas.* 3. Et quamvis angulus $D$ non detur, ſed recta $BD$ ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli $D$, $d$ communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & propterea lineæ $BD$, $bd$ ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Unde cum tangentes $AD$, $Ad$, arcus $AB$, $Ab$, & eorum ſinus $BC$, $bc$ fiant ultimo chordis $AB$, $Ab$ æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ $BD$, $bd$.

*Corol.* 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ $BD$, $bd$.

*Corol.* 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

*Corol.* 4. Triangula rectilinea $ADB$, $Adb$ ſunt ultimo in triplicata ratione laterum $AD$, $Ad$, inque ſeſquiplicata laterum $DB$, $db$; utpote in compoſita ratione laterum $AD$, & $DB$, $Ad$ & $db$ exiſtentia. Sic & triangula $ABC$, $Abc$ ſunt ultimo in triplicata ratione laterum $BC$, $bc$. Rationem vero Seſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur, quamque alias Seſquialteram dicunt.

*Corol.*

*Corol.* 5. Et quoniam $\mathcal{D}B$, $db$ sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum $A\mathcal{D}$, $Ad$: erunt areæ ultimæ curvilineæ $A\mathcal{D}B$, $Adb$ (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $A\mathcal{D}B$, $Adb$; & segmenta $AB$, $Ab$ partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium $A\mathcal{D}$, $Ad$; tum chordarum & arcuum $AB$, $Ab$.

## *Scholium.*

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum $A$, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum $A\mathcal{J}$ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest $\mathcal{D}B$ ut $A\mathcal{D}^3$: quo in casu Circulus nullus per punctum $A$ inter tangentem $A\mathcal{D}$ & curvam $AB$ duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat $\mathcal{D}B$ successive ut $A\mathcal{D}^4$, $A\mathcal{D}^5$, $A\mathcal{D}^6$, $A\mathcal{D}^7$, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat $\mathcal{D}B$ successive ut $A\mathcal{D}^2$, $A\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{4}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{5}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{6}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos $A\mathcal{D}^2$ & $A\mathcal{D}^3$ inseratur series $A\mathcal{D}^{\frac{11}{6}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{12}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{9}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{7}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{5}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{8}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{11}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{14}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus Geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum eva-

evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum Indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex Indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de Incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

De Motu Corporum

transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

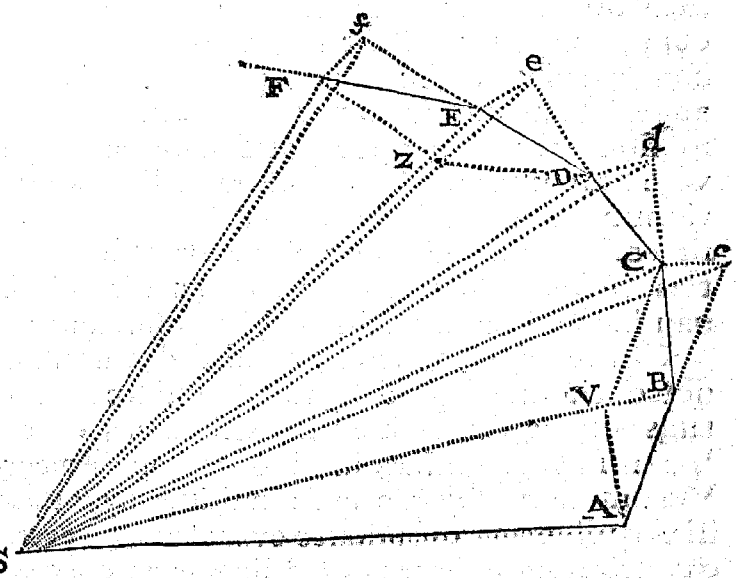
# SECTIO II.

## *De Inventione Virium Centripetarum.*

### PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. 1.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC*, occurens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem



eodem plano cum triangulo $ASB$. Junge $SC$, & triangulum $SBC$, ob parallelas $SB$, $Cc$, æquale erit triangulo $SBc$, atque adeo etiam triangulo $SAB$. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſive agat in $C$, $D$, $E$, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas $CD$, $DE$, $EF$, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum $SCD$ triangulo $SBC$, & $SDE$ ipſi $SCD$, & $SEF$ ipſi $SDE$ æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter $ADF$, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, ut ſunt baſes æqualium triangulorum $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$; & hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa.

*Corol.* 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſive deſcriptorum chordæ $AB$, $BC$ compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis $BU$ in ea poſitione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium.

*Corol.* 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ $AB$, $BC$ ac $DE$, $EF$ compleantur in parallelogramma $ABCU$, $DEFZ$; vires in $B$ & $E$ ſunt ad invicem in ultima ratione diagonalium $BU$, $EZ$, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus $BC$ & $EF$ componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus $Bc$, $BU$ & $Ef$, $EZ$: atqui $BU$ & $EZ$, ipſis $Cc$ & $Ff$ æquales, in Demonſtratione Propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & $E$, ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

*Corol.* 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

*Corol.* 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

*Corol.* 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.*

*Cas.* 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. I.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima $SAB$, $SBC$, $SCD$, &c. circa punctum immobile $S$ temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco $B$ ſecundum lineam parallelam ipſi $cC$ (per Prop. XL, Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam $BS$; & in loco $C$ ſecundum lineam ipſi $dD$ parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam $SC$, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile $S$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo $S$ uniformiter in directum.

*Corol.* 1. In Spatiis vel Mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

*Corol.* 2. In Mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant a concurſu radiorum verſus plagam in quam fit motus.

*Scholium*

*Scholium.*

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

## PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.*

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiesceret vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

*Corol.* 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

*Corol.* 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus

De Motu Corporum

corpus alterum $T$, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

*Corol.* 4. Si corpus $L$ radio ad alterum corpus $T$ ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales; & corpus illud alterum $T$ vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum $T$ tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum $T$ agentis.

*Scholium.*

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

## PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.*

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. 11. & Corol. 11. Prop. 1; & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 1v. Prop. 1; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. v11: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

*Corol.*

*Corol.* 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverſe, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc eſt, in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

*Corol.* 3. Unde, ſi tempora periodica æquentur & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

*Cor.* 4. Si & tempora periodica & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

*Corol.* 5. Si tempora periodica ſint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

*Corol.* 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

*Corol.* 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut Radii $R$ poteſtas quælibet $R^n$, & propterea velocitas reciproce ut Radii poteſtas $R^{n-1}$; erit vis centripeta reciproce ut Radii poteſtas $R^{2n-1}$: & contra.

*Corol.* 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

*Corol.* 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

## *Scholium.*

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cæleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro

De Motu Corporum

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea Gravitatis. Nam ſi corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. IX. Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus, in polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, ſi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis eſt vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

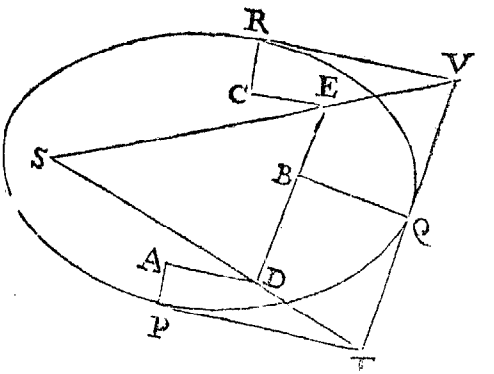
## PROPOSITIO. V. PROBLEMA I.

*Data quibuſcunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.*

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres $PT$, $TQV$, $VR$ in punctis totidem $P$, $Q$, $R$, concurrentes in $T$ & $V$. Ad tangentes erigantur perpendicula $PA$, $QB$, $RC$, velocitatibus corporis in punctis illis $P$, $Q$, $R$ a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt, ita ut ſit $PA$ ad $QB$ ut velocitas in $Q$ ad velocitatem in $P$, & $QB$ ad $RC$ ut velocitas in $R$ ad velocitatem in $Q$. Per perpendiculorum terminos $A$, $B$, $C$ ad angulos rectos ducantur $AD$, $DBE$, $EC$ concurrentes in $D$ & $E$: Et actæ $TD$, $VE$ concurrent in centro quæſito $S$.

Nam

Nam perpendicula a centro $S$ in tangentes $PT, QT$ demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciproce, ut velocitates corporis in punctis $P$ & $V$; adeoque per constructionem ut perpendicula $AP, BQ$ directe, id est ut perpendicula a puncto $D$ in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta $S, D, T$, sunt in una recta. Et simili argumento puncta $S, E, V$ sunt etiam in una recta; & propterea centrum $S$ in concursu rectarum $TD, VE$ versatur. *Q. E. D.*



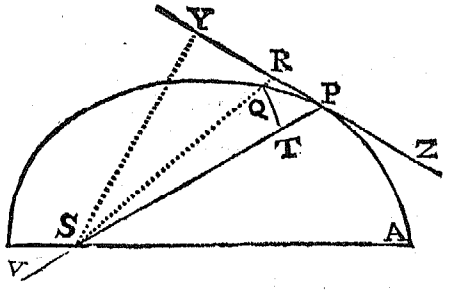

## PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

*Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quàm minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.*

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4 Prop. 1,) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3, Lem. XI,) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

*Corol.* 1. Si corpus $P$ revolvendo circa centrum $S$ describat lineam curvam $APQ$, tangat verò recta $ZPR$ curvam illam in puncto quovis $P$, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto $Q$ agatur $QR$ distantiæ $SP$ parallela, ac demittatur $QT$ perpendicularis ad distantiam illam $SP$: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimò fit ubi coeunt puncta $P$ & $Q$. Nam $QR$ æqualis



De Motu Corporum

est sagittæ dupli arcus $QP$, in cujus medio est $P$, & duplum trianguli $SQP$ sive $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

*Corol.* 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SY q \times QP q}{QR}$, si modo $SY$ perpendiculum sit a centro virium in Orbis tangentem $PR$ demissum. Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

*Corol.* 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus $P$; & si $PV$ chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SY q \times PV$. Nam $PV$ est $\frac{QP q}{QR}$.

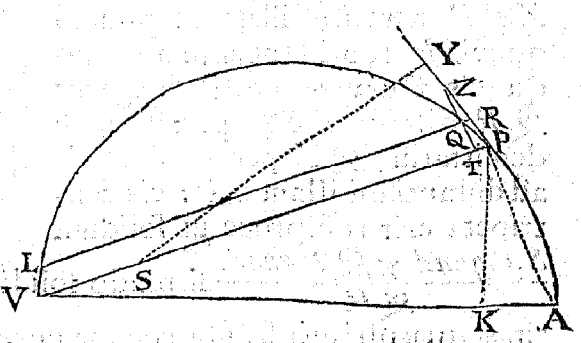
*Corol.* 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum $SY$ per Corol. 1 Prop. 1.

*Corol.* 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea $APQ$, & in ea detur etiam punctum $S$ ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis $P$ a cursu rectilineo perpetuò retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SP q \times QT q}{QR}$ vel solidum $SY q \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

## PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

*Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.*

Esto Circuli circumferentia $VQPA$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrũ suũ tendit $S$, corpus in circumferentia latum $P$, locus proximus in quem movebitur $Q$, & circuli tangens ad locum priorem $PRZ$. Per punctum $S$ ducatur chorda $PV$, & acta circuli diametro $VA$ jungatur $AP$, & ad $SP$ demittatur perpendiculum $QT$, quod productum occurrat tangenti $PR$ in $Z$,




ac

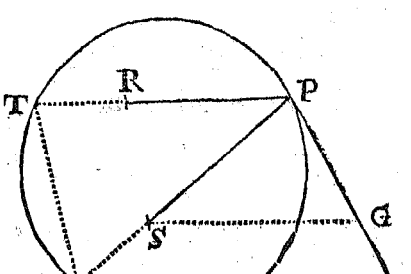
ac denique per punctum $Q$ agatur $LR$ quæ ipsi $SP$ parallela sit & occurrat tum circulo in $L$ tum tangenti $PZ$ in $R$. Et ob similia triangula $ZQR$, $ZTP$, $VPA$; erit $RP$ *quad.* hoc est $QRL$ ad $QT$ *quad.* ut $AV$ *quad.* ad $PV$ *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur $QT\ quad.$ Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$ &, punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, scribatur $PV$ pro $RL$. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad}$ id est, (ob datum $AV\ quad.$) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis $SP$ & cubus chordæ $PV$ conjunctim. *Q.E.I.*

*Idem aliter.*

Ad tangentem $PR$ productam demittatur perpendiculum $SY$, & ob similia triangula $SYP$, $VPA$; erit $AV$ ad $PV$ ut $SP$ ad $SY$, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale $SY$, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$ hoc est, ob datam $AV$, reciproce ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q.E.I.*

*Corol.* 1. Hinc si punctum datum $S$ ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad $V$; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis $SP$.

*Corol.* 2. Vis qua corpus $P$ in circulo $APTV$ circum virium centrum $S$ revolvitur, est ad vim qua corpus idem $P$ in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quod-vis virium centrum $R$ revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ $SG$ quæ a primo virium centro $S$ ad orbis tangentem $PG$ ducitur, & distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RPq \times PT\ cub.$ ad $SPq \times PV\ cub.$



De Motu Corporum

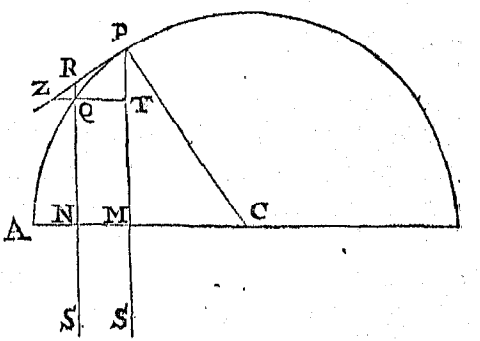
id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$ sive (ob similia triangula $PSG$, $TPV$) ad $SG\,cub.$

*Corol.* 3. Vis, qua corpus $P$ in Orbe quocunque circum virium centrum $S$ revolvitur, est ad vim qua corpus idem $P$ in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum $R$ revolvi potest, ut $SP \times RPq$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro $S$ & quadrato distantiæ ejus a secundo virium centro $R$ ad cubum rectæ $SG$ quæ a primo virium centro $S$ ad orbis tangentem $PG$ ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiæ $RP$ parallela est. Nam vires in hoc Orbe, ad ejus punctum quodvis $P$, eædem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

## PROPOSITIO. VIII. PROBLEMA. III.

*Moveatur corpus in Circulo* PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A Circuli centro $C$ agatur semidiameter $CA$ parallelas istas perpendiculariter secans in $M$ & $N$, & jungatur $CP$. Ob similia triangula $CPM$, $PZT$ & $RZQ$ est $CPq$ ad $PMq$ ut $PRq$ ad $QTq$ & ex natura Circuli $PRq$ æquale est rectangulo $\overline{QR \times RN + QN}$ sive coeuntibus punctis $P$, $Q$ rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est $CPq$ ad $PM\,quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\,quad.$ adeoque $\frac{QT\,quad.}{QR}$




æquale $\frac{2PM\,cub.}{CP\,quad.}$, & $\frac{QT\,quad. \times SP\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\,cub. \times SP\,qu.}{CP\,quad.}$

Est ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$ hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut $PM\,cub.$ *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

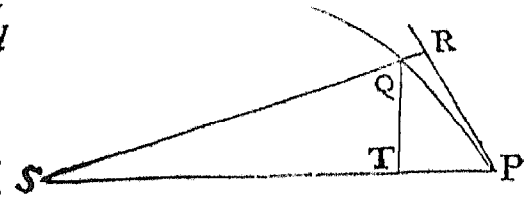
*Scho-*

*Scholium.*

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

## PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

*Gyretur corpus in Spirali* P Q S *ſecante radios omnes* S P, S Q, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*




Detur angulus indefinite parvus *P S Q*, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura *S P Q R T*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut $QT$, hoc eſt ut $SP$. Mutetur jam utcunque angulus $PSQ$, & recta $QR$ angulum contactus $QPR$ ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius $PR$ vel $QT$. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut $SP$. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\ cub.$ adeoque (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ $SP$. *Q. E. I.*

*Idem aliter.*

Perpendiculum $ST$ in tangentem demiſſum, & circuli Spiralem tangentis chorda $PV$ ſunt ad altitudinem $SP$ in datis rationibus; ideoque $SP\ cub.$ eſt ut $STq \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

## LEMMA XII.

*Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta, eſſe inter ſe æqualia.*

Conſtat ex Conicis.

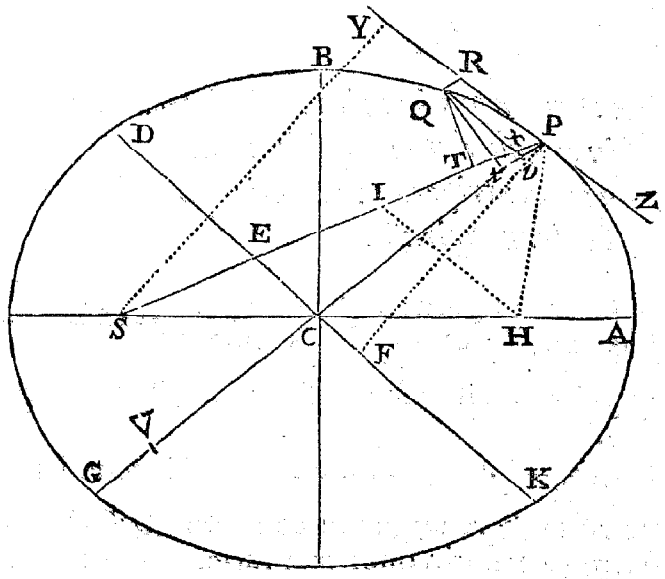
PRO-

De Motu Corporum

## PROPOSITIO X. PROBLEMA. V.

*Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.*

Sunto $CA$, $CB$ ſemiaxes Ellipſeos; $GP$, $DK$ diametri conjugatæ; $PF$, $Qt$ perpendicula ad diametros; $Qv$ ordinatim applicata ad diametrum $GP$; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) $PvG$ ad $Qv$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $CD$ *quad.* & (ob ſimilia triangula $Qvt$, $PCF$) $Qv$ *quad.* eſt ad $Qt$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $PF$ *quad.* & conjunctis rationibus, $PvG$ ad $Qt$ *quad.* ut $PC$ *quad.* ad $CD$ *quad.* & $PC$ *quad.* ad $PF$ *quad.* id eſt, $vG$ ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut $PC$ *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe $QR$ pro $Pv$, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, $2PC$ pro $vG$, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia $PC$. *Q. E. I.*




*Idem aliter.*

In $PG$ ab altera parte puncti $t$ poſita intelligatur $tu$ æqualis ipſi $tv$; deinde cape $uV$ quæ ſit ad $vG$ ut eſt $DC$ *quad.* ad $PC$ *quad.* Et quoniam ex Conicis eſt $Qv$ *quad.* ad $PvG$, ut $DC$ *quad.* ad $PC$ *quad:* erit $Qv$ *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus $PQ$ erit æquale rectangulo $VPv$; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in $P$ & tranſit per punctum $Q$, tranſibit etiam per punctum $V$. Coeant puncta $P$ & $Q$, & hic circulus ejuſdem erit curvaturæ cum ſectione conica in $P$, & $PV$ æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus $P$ in Ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in $PFq$ (per Corol. 3 Prop. VI.) hoc eſt (ob datum $2DCq$ in $PFq$) directe ut $PC$. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro Ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in Circulo, in quem utique Ellipſis migrare poteſt.

*Corol.* 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3 & 8, Prop. IV: in Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

*Scholium.*

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola; & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figuræ in Abſciſſa poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia: ſic etiam in figuris univerſis, ſi Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abſciſſa poſitum tendentes augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro.

SECTIO

De Motu Corporum

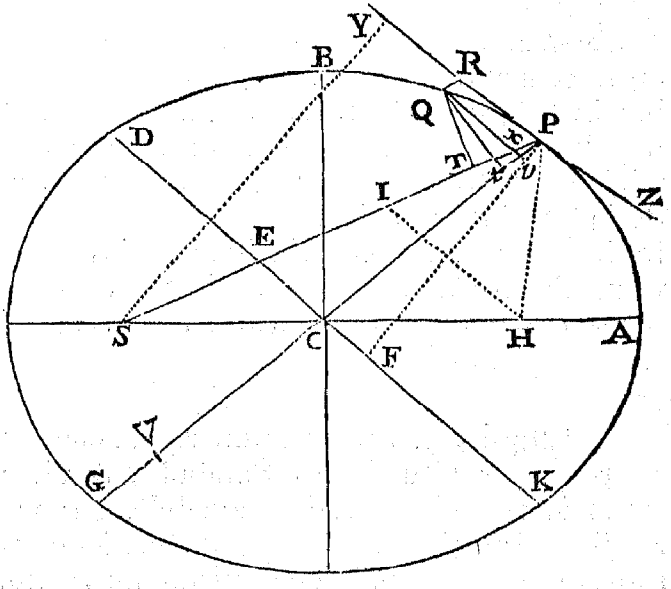
# SECTIO III.

## *De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.*

### PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

*Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.*

Eſto Ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *Qx PR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quæ cõjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\ quad.}{AC}$) dicto *L*, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut *QR* ad *Pv*, id eſt ut *PE* ſeu *AC* ad *PC*; & $L \times Pv$ ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad*, punctis *Q* & *P* coeuntibus, eſt ratio æqualitatis; & *Qx quad.* ſeu *Qv quad.* eſt ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad*, id eſt ut *CA quad.* ad *PF quad.* ſive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad *QT quad.* ut $AC \times L \times PCq. \times CDq.$ ſeu $2CBq. \times PCq. \times CDq.$ ad $PC \times Gv \times CDq. \times CBq.$ ſive ut 2*PC* ad *Gv*.




Sed,

Sed, punctis $Q$ & $P$ coeuntibus, æquãtur $2PC$ & $Gv$. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QT\ quad.$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $\frac{SPq. \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq.$ id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ $SP$. *Q.E.I.*

*Idem aliter.*

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens, qua corpus $P$ in Ellipsi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1 Prop. X) ut $CP$ distantia corporis ab Ellipseos centro $C$; ducatur $CE$ parallela Ellipseos tangenti $PR$: & vis qua corpus idem $P$, circum aliud quodvis Ellipseos punctum $S$ revolvi potest, si $CE$ & $PS$ concurrant in $E$, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per Corol. 3 Prop. VII,) hoc est, si punctum $S$ sit umbilicus Ellipseos, adeoque $PE$ detur, ut $SPq$ reciproce. *Q.E.I.*

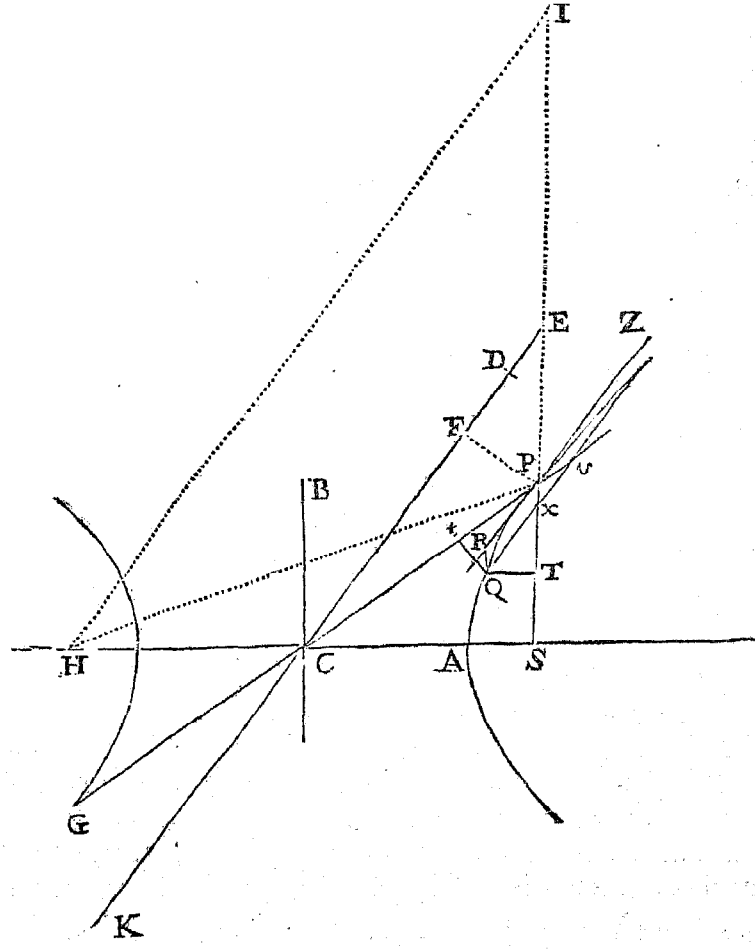
Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

## PROPOSITIO XII. PROBLEMA. VII.

*Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.*

Sunto $CA$, $CB$ semi-axes Hyperbolæ; $PG$, $KD$ diametri conjugatæ; $PF$, $Qt$ perpendicula ad diametros; & $Qv$ ordinatim applicata ad diametrum $GP$. Agatur $SP$ secans cum diametrum $DK$ in $E$, tum ordinatim applicatam $Qv$ in $x$, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet $EP$ æqualem esse semiaxi transverso $AC$, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico $H$ linea $HI$ ipsi $EC$ parallela, ob æquales $CS$, $CH$, æquentur $ES$, $EI$; adeo ut $EP$ semidifferentia sit ipsarum $PS$, $PI$, id est (ob parallelas $IH$, $PR$ & angulos æquales $IPR$, $HPZ$) ipsarum $PS$, $PH$, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad $SP$ demittatur perpendicularis $QT$. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto $L$, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut $QR$ ad $Pv$, id est, ut $PE$ seu $AC$ ad $PC$; Et $L \times Pv$ ad $Gv$ $P$ ut $L$ ad

$Gv$; & $GvP$ ad $Qv$ *quad.* ut $PCq$. ad $CDq$; & (per Corol. 2. Lem. VII.) $Qv$ *quad.* ad $Qx$ *quad.* punctis $Q$ & $P$ coeuntibus fit ratio æqualitatis; & $Qx$ *quad.* seu $Qv$ *quad.* est ad $QTq$. ut $EPq$. ad $PFq$, id est ut $CAq$, ad $PFq$, sive (per Lem. XII.) ut $CDq$, ad $CBq$: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad $QTq$. ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ *quad.* sive ut $2PC$ ad $Gv$. Sed punctis $P$ & $Q$ coeuntibus æquantur $2PC$ & $Gv$. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QTq$. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1




& 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est reciproce in ratione duplicata distantiæ $SP$. *Q. E. I.*

*Idem*

*Idem aliter.*

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc diſtantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per Corol. 3 Prop. VII.) vis ad umbilicum *S* tendens erit ut $\frac{PE\,cub}{SPq}$, hoc eſt, ob datam *PE*, reciproce ut *SPq*. *Q.E.I.*

Eodem modo demonſtratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam verſa, movebitur in Hyperbola conjugata.

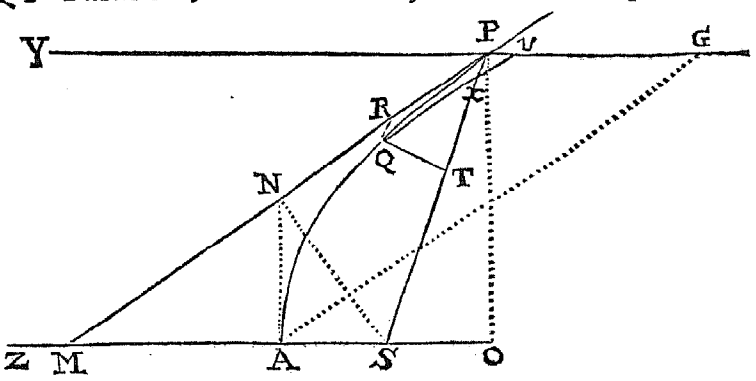
## LEMMA XIII.

*Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.* Patet ex Conicis.

## LEMMA XIV.

*Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.*

Sit enim *AQP* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN*, linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & ſimile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: Ergo *PS* eſt ad *SN*, ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*




*Corol.* 1. *PSq.* eſt ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

*Corol.* 2. Et ob datam *SA*, eſt *SNq.* ut *PS*.

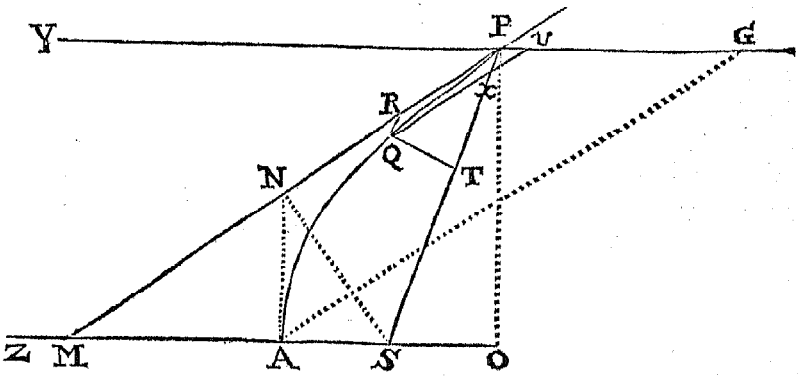
 *Corol.*

*Corol.* 3. Et concurſus tangentis cujuſvis $PM$ cum recta $SN$, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam $AN$, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

## PROPOSITIO. XIII. PROBLEMA VIII.

*Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.*

Maneat conſtructio Lemmatis, ſitque $P$ corpus in perimetro Parabolæ, & a loco $Q$ in quem corpus proxime movetur, age ipſi $SP$ parallelam $QR$ & perpendicularem $QT$, necnon $Qv$ tangenti parallelam & occurrentem tum diametro $YPG$ in $v$, tum diſtantiæ $SP$ in $x$. Jam ob ſimilia triangula $Pxv$, $SPM$ & æqualia unius latera $SM$, $SP$, æqualia ſunt alterius latera $Px$ ſeu $QR$ & $Pv$. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ $Qv$ æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri $Pv$, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, ratio $Qv$ ad $Qx$ per (per Corol. 2 Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo $Qx$ *quad.* eo in caſu, æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula $QxT$, $SPN$) $Qx$ q. ad $QT$ q. ut $PS$ q. ad $SN$ q. hoc eſt (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut $PS$ ad $SA$, id eſt ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) $QT$ q. & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q.}{QR}$, & fiet $\frac{SP\,q. \times QT\,q.}{QR}$ æquale $SP\,q. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $SP\,q. \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione diſtantiæ $SP$. *Q. E. I.*




*Coral.*

*Corol.* 1. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis $P$, ſecundum lineam quamvis rectam $PR$, quacunque cum velocitate exeat de loco $P$, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo ſe mutuo tangentes, eadem vi centripeta deſcribi non poſſunt.

*Corol.* 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo $P$, ea ſit, qua lineola $PR$ in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium $QR$: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ $PR$, $QR$ in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

## PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

*Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.*

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII, Latus rectum $L$ æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta $P$ & $Q$. Sed linea minima $QR$, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut $SPq$. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$. hoc eſt, latus rectum $L$ in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

*Corol.*

De Motu Corporum

*Corol.* Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$ ducta in tempus periodicum.

## PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

*Iisdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.*

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

*Corol.* Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

## PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

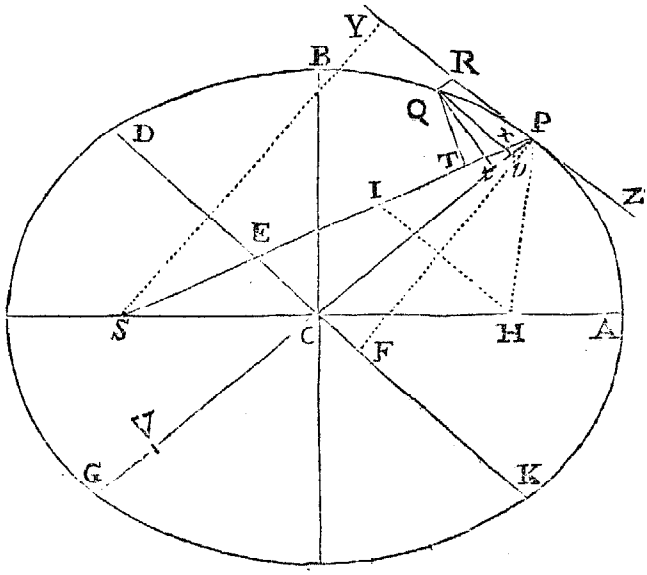
*Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.*

Ab umbilico $S$ ad tangentem $PR$ demitte perpendiculum $ST$ & velocitas corporis $P$ erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus $PQ$ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens $PR$, id est (ob proportionales $PR$ ad $QT$ & $SP$ ad $ST$) ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut $ST$ reciproce & $SP \times QT$ directe; estque

$SP \times QT$

$SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Prop. XIV. in subduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*






*Corol.* 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

*Corol.* 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

*Corol.* 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem à centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

*Corol.* 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol 6. Prop. IV.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

*Corol.* 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera

latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

*Corol.* 6. In Parabola, velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipſi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipſi magis.

*Corol.* 7. In Parabola, velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam, eſt ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro diſtantiam, in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium ſecundum, velocitas in vertice Parabolæ eſt in hac ratione, & per Corollaria ſexta hujus & Propoſitionis quartæ, ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major.

*Corol.* 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demiſſum. Patet per Corollarium quintum.

*Corol.* 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo ſit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica ſectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

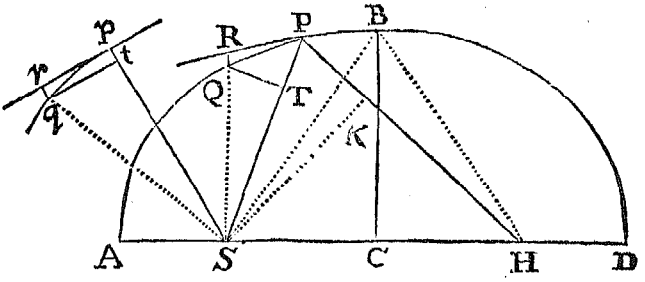
## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

*Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur Linea quam corpus deſcribit, de loco dato, cum data velocitate, ſecundum datam rectam egrediens.*

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea ſit qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*.

De

De loco $\mathcal{P}$, ſecundum lineam $\mathcal{P}R$, exeat corpus $\mathcal{P}$, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem $\mathcal{P}\mathcal{Q}$. Hanc igitur recta $\mathcal{P}R$ tanget in $\mathcal{P}$. Tangat itidem recta aliqua $pr$ Orbitam $pq$ in $p$, & ſi ab $S$ ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Coniſectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit iſtud $L$. Datur præterea Coniſectionis umbilicus $S$. Anguli $RPS$ complementum ad duos rectos fiat angulus $RPH$, & dabitur poſitione linea $PH$, in qua umbilicus alter $H$ locatur. Demiſſo ad $\mathcal{P}H$ perpendiculo $SK$, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus $BC$, & erit $\overline{S\mathcal{P}q.} - 2KPH + \overline{\mathcal{P}Hq.} = SHq. = 4CHq. = 4BHq - 4BCq. = \overline{S\mathcal{P}+\mathcal{P}H:\ quad.} - L \times \overline{S\mathcal{P}+\mathcal{P}H} = \overline{S\mathcal{P}q.} + 2S\mathcal{P}H + \overline{P\mathcal{H}q.} - L \times \overline{S\mathcal{P}+\mathcal{P}H}$. Addantur utrobique $2K\mathcal{P}H - \overline{S\mathcal{P}q} - \overline{\mathcal{P}Hq} + L \times \overline{S\mathcal{P}+\mathcal{P}H}$, & fiet $L \times \overline{S\mathcal{P}+\mathcal{P}H} = 2S\mathcal{P}H + 2KPH$, ſeu $S\mathcal{P}+\mathcal{P}H$, ad $\mathcal{P}H$, ut $2S\mathcal{P}+2K\mathcal{P}$ ad $L$. Unde datur $\mathcal{P}H$ tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea corporis in $\mathcal{P}$ velocitas, ut latus rectum $L$ minus fuerit quam $2S\mathcal{P}+2K\mathcal{P}$, jacebit $\mathcal{P}H$ ad eandem partem tangentis $\mathcal{P}R$ cum linea $\mathcal{P}S$, adeoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis $S$, $H$, & axe principali $S\mathcal{P}+\mathcal{P}H$, dabitur: Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum $L$ æquale fuerit $2S\mathcal{P}+2KP$, longitudo $\mathcal{P}H$ infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens $SH$ parallelum lineæ $\mathcal{P}K$, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo $P$ exeat, capienda erit longitudo $\mathcal{P}H$ ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum $S\mathcal{P}$ & $\mathcal{P}H$, & inde dabitur. *Q. E. I.*




*Corol.* 1. Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali $\mathcal{D}$, latere recto $L$, & umbilico $S$, datur umbilicus alter $H$ capiendo $\mathcal{D}H$, ad $\mathcal{D}S$ ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\mathcal{D}S$. Nam proportio $S\mathcal{P}+\mathcal{P}H$ ad $\mathcal{P}H$ ut $2S\mathcal{P}+2K\mathcal{P}$ ad $L$,

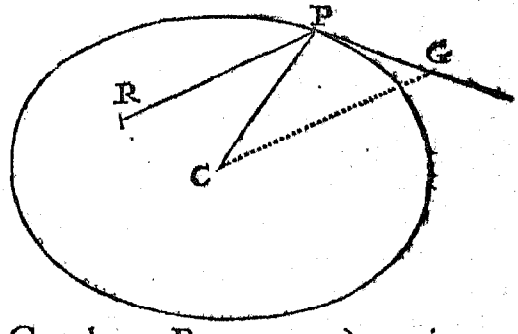
in casu hujus Corollarii, fit $\mathcal{D}S + \mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S$ ad $L$, & divisim $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S - L$ ad $L$.

*Corol.* 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali $\mathcal{D}$, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam $\mathcal{D}S$, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam $\mathcal{D}S$, gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein $\mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}S$ ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\mathcal{D}S$.

*Corol.* 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

*Corol.* 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

## *Scholium.*



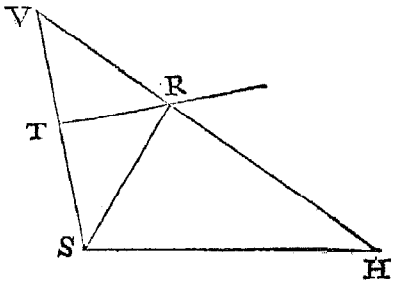

Si corpus $P$ vi centripeta ad punctum quodcunque datum $R$ tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit $C$, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur $CG$ radio $RP$ parallela, & Orbis tangenti $PG$ occurrens in $G$; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3 Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

# SECTIO IV.

## *De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.*

### LEMMA XV.

*Si ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus* S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem Conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*




Secet enim perpendiculum $TR$ rectam $HV$ productam, ſi opus fuerit, in $R$; & jungatur $SR$. Ob æquales $TS$, $TV$, æquales erunt & rectæ $SR$, $VR$ & anguli $TRS$, $TRV$. Unde punctum $R$ erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum $TR$ tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

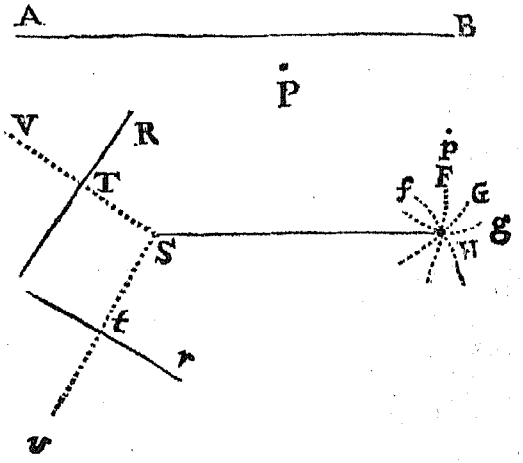
### PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

*Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.*

Sit $S$ communis umbilicus figurarum; $AB$ longitudo axis principalis Trajectoriæ cujuſvis; $P$ punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & $TR$ recta quam debet tangere. Centro $P$ intervallo $AB - SP$, ſi orbita ſit Ellipſis, vel $AB + SP$, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus $HG$. Ad tangentem $TR$ demittatur perpendiculum $ST$, & producatur idem ad $V$, ut ſit $TV$ æqualis $ST$; centroque $V$ & intervallo $AB$ deſcribatur circulus $FH$. Hac

De Motu Corporum

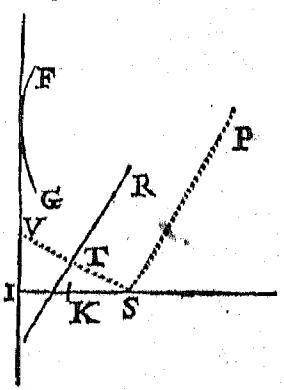
methodo ſive dentur duo puncta $P$, $p$, ſive duæ tangentes $TR$, $tr$, ſive punctum $P$ & tangens $TR$, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit $H$ eorum interſectio communis, & umbilicis $S$, $H$, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipſi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum $P$, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam $TR$. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo $P$, $p$, vel tanget rectas duas $TR$, $tr$. *Q. E. F.*




## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

*Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.*

Sit $S$ umbilicus, $P$ punctum & $TR$ tangens Trajectoriæ deſcribendæ. Centro $P$, intervallo $PS$ deſcribe circulum $FG$. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem $ST$, & produc eam ad $V$, ut ſit $TV$ æqualis $ST$. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus $fg$, ſi datur alterum punctum $p$; vel inveniendum alterum punctum $v$, ſi datur altera tangens $tr$; dein ducenda recta $IF$ quæ tangat duos circulos $FG$, $fg$ ſi dantur duo puncta $P$, $p$, vel tranſeat per duo puncta $V$, $v$, ſi dantur duæ tangentes $TR$, $tr$, vel tangat circulum $FG$ & tranſeat per punctum $V$, ſi datur punctum $P$ & tangens $TR$. Ad $FI$ demitte perpendicularem $SI$, eamque biſeca in $K$; & axe $SK$, vertice principali $K$ deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales $SK$ & $IK$, $SP$ & $FP$, tranſibit per punctum $P$; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales $ST$ & $TV$ & angulum rectum $STR$, tanget rectam $TR$. *Q. E. F.*

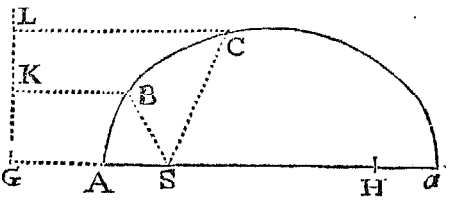



PRO-

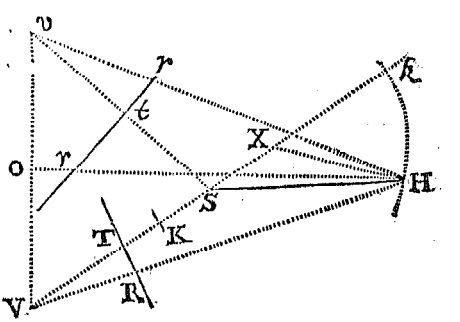
## PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

*Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.*

*Cas.* 1. Dato umbilico $S$, deſcribenda ſit Trajectoria $ABC$ per puncta duo $B$, $C$. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape $KB$ ad $BS$, & $LC$ ad $CS$. Centris $B$, $C$, intervallis $BK$, $CL$, deſcribe circulos duos, & ad rectam $KL$, quæ tangat eoſdem in $K$ & $L$, demitte perpendiculum $SG$, idemque ſeca in $A$ & $a$, ita ut ſit $SA$ ad $AG$ & $Sa$ ad $aG$, ut eſt $SB$ ad $BK$, & axe $Aa$, verticibus $A$, $a$, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim $H$ umbilicus alter Figuræ deſcriptæ, & cum ſit $SA$ ad $AG$ ut $Sa$ ad $aG$, erit diviſim $Sa - SA$ ſeu $SH$ ad $aG - AG$ ſeu $Aa$ in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint $KB$ ad $BS$ & $LC$ ad $CS$ in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta $B$, $C$, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



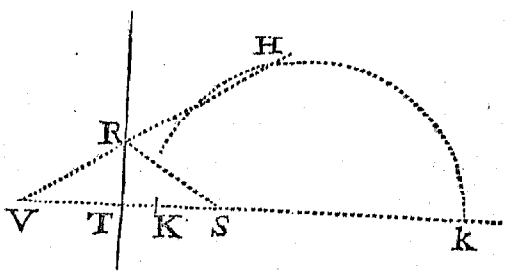

*Cas.* 2. Dato umbilico $S$, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas $TR$, $tr$ alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula $ST$, $St$ & produc eadem ad $V$, $v$, ut ſint $TV$, $tv$ æquales $TS$, $tS$. Biſeca $Vv$ in $O$, & erige perpendiculum infinitum $OH$, rectamque $VS$ infinite productam ſeca in $K$ & $k$ ita, ut ſit $VK$ ad $KS$ & $Vk$ ad $kS$ ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro $Kk$ deſcribatur circulus ſecans $OH$ in $H$; & umbilicis $S$, $H$, axe principali ipſam $VH$ æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca $Kk$ in $X$, & junge $HX$, $HS$, $HV$, $Hv$. Quoniam eſt $VK$ ad $KS$ ut $Vk$ ad $kS$; & compoſite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; diviſimque




ut

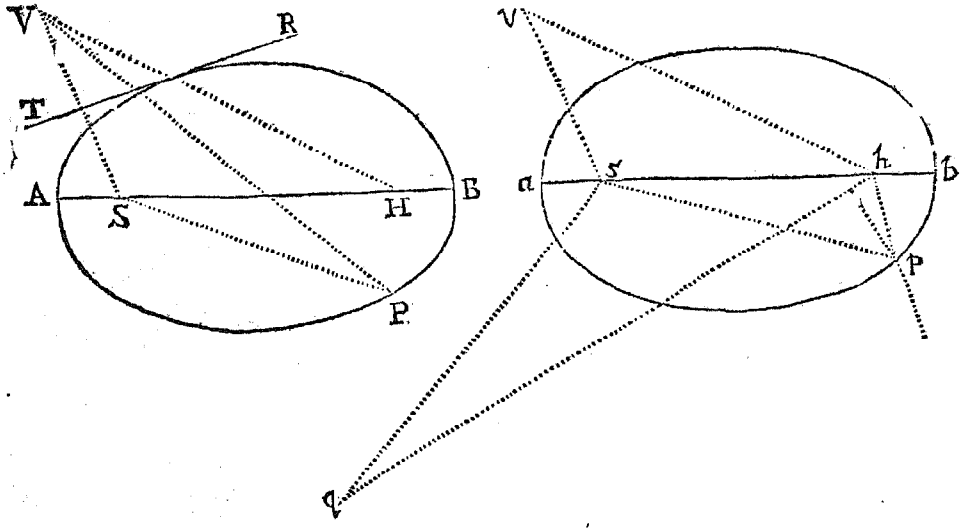
ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut $VX$ ad $HX$ & $HX$ ad $SX$, similia erunt triangula $VXH$, $HXS$, & propterea $VH$ erit ad $SH$ ut $VX$ ad $XH$, adeoque ut $VK$ ad $KS$. Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis principalis $VH$ eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam $SH$, quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum $VH$, $vH$ æquentur axi principali, & $VS$, $vS$ a rectis $TR$, $tr$ perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

*Cas.* 3. Dato umbilico $S$ describenda sit Trajectoria quæ rectam $TR$ tanget in puncto dato $R$. In rectam $TR$ demitte perpendicularem $ST$, & produc eandem ad $V$, ut sit $TV$ æqualis $ST$. Junge $VR$, & rectam $VS$ infinite productam seca in $K$ & $k$, ita ut sit $VK$ ad $SK$ & $Vk$ ad $Sk$ ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro $Kk$ descripto, secetur producta recta $VR$ in $H$, & umbilicis $S$, $H$, axe principali rectam $VH$ æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque $VH$ esse ad $SH$ ut $VK$ ad $SK$, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero $TR$ qua angulus $VRS$ bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto $R$, patet ex Conicis. *Q. E. F.*




*Cas.* 4. Circa umbilicum $S$ describenda jam sit Trajectoria $APB$, quæ tangat rectam $TR$, transeatque per punctum quodvis $P$ extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ $apb$, axe principali $ab$ & umbilicis $s$, $h$ descriptæ. In tangentem $TR$ demitte perpendiculum $ST$, & produc idem ad $V$, ut sit $TV$ æqualis $ST$. Angulis autem $VSP$, $SVP$ fac angulos $hsq$, $shq$ æquales; centroque $q$ & intervallo quod sit ad $ab$ ut $SP$ ad $VS$ describe circulum secantem Figuram $apb$ in $p$. Junge $sp$ & age $SH$ quæ sit ad $sh$ ut est $SP$ ad $sp$, quæque angulum $PSH$ angulo $psh$ & angulum $VSH$ angulo $psq$ æquales constituat. Denique umbilicis $S$, $H$, & axe principali $AB$ distantiam $VH$ æquante, describatur sectio Conica. Dico factum. Nam si agatur $sv$ quæ sit ad $sp$ ut est $sh$ ad

ad $sq$, quæque conſtituat angulum $vsp$ angulo $hsq$ & angulum $vsh$ angulo $psq$ æquales, triangula $svh$, $spq$ erunt ſimilia, & propterea $vh$ erit ad $pq$ ut eſt $sh$ ad $sq$, id eſt (ob ſimilia triangula




$VSP$, $hsq$) ut eſt $VS$ ad $SP$ ſeu $ab$ ad $pq$. Æquantur ergo $vh$ & $ab$. Porro ob ſimilia triangula $VSH$. $vsh$, eſt $VH$ ad $SH$ ut $vh$ ad $sh$, id eſt, axis Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis $ab$ ad umbilicorum intervallum $sh$; & propterea Figura jam deſcripta ſimilis eſt Figuræ $apb$. Tranſit autem hæc Figura per punctum $P$, eo quod triangulum $PSH$ ſimile ſit triangulo $psh$; & quia $VH$ æquatur ipſius axi & $VS$ biſecatur perpendiculariter a recta $TR$, tangit eadem rectam $TR$. *Q. E. F.*

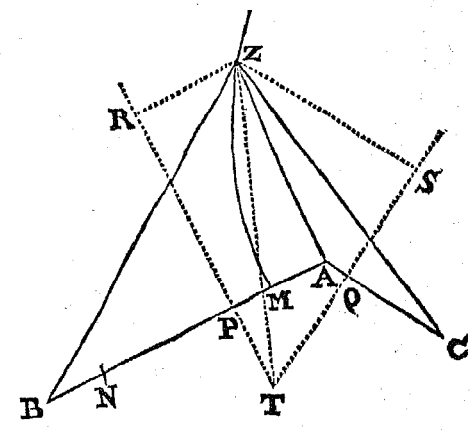
## LEMMA XVI.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.*

*Cas.* 1. Sunto puncta illa data $A$, $B$, $C$ & punctum quartum $Z$, quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum $AZ$, $BZ$, locabitur punctum $Z$ in Hyperbola cujus umbilici ſunt $A$ & $B$, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille $MN$. Cape $PM$.

ad

ad $MA$ ut est $MN$ ad $AB$, & erecta $PR$ perpendiculari ad $AB$, demissaque $ZR$ perpendiculari ad $PR$; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, $ZR$ ad $AZ$ ut est $MN$ ad $AB$. Simili discursu punctum $Z$ locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt $A$, $C$ & principalis axis differentia inter $AZ$ & $CZ$, ducique potest $QS$ ipsi $AC$ perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis $Z$ demittatur normalis $ZS$, hæc fuerit ad $AZ$ ut est differentia inter $AZ$ & $CZ$ ad $AC$. Dantur ergo rationes ipsarum $ZR$ & $ZS$ ad $AZ$, & idcirco datur earundem $ZR$ & $ZS$ ratio ad invicem; ideoque si rectæ $RP$, $SQ$ concurrant in $T$, & agatur $TZ$, figura $TRZS$, dabitur specie, & recta $TZ$ in qua punctum $Z$ alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt $B$ & $C$ & axis principalis differentia rectarum $BZ$, $CZ$, inveniri potest alia recta in qua pũctum $Z$ locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum $Z$ in eorum intersectione. *Q. E. I.*




*Cas.* 2. Si duæ ex tribus lineis, puta $AZ$ & $BZ$ æquantur, punctum $Z$ locabitur in perpendiculo bisecante distantiam $AB$, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

*Cas.* 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum $Z$ in centro Circuli per puncta $A$, $B$, $C$ transeuntis. *Q. E. I.*

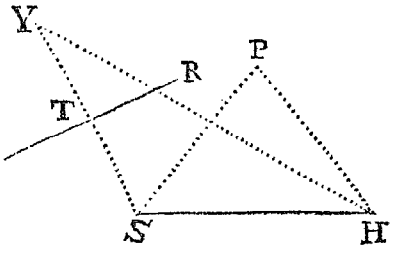
Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

## PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

*Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.*

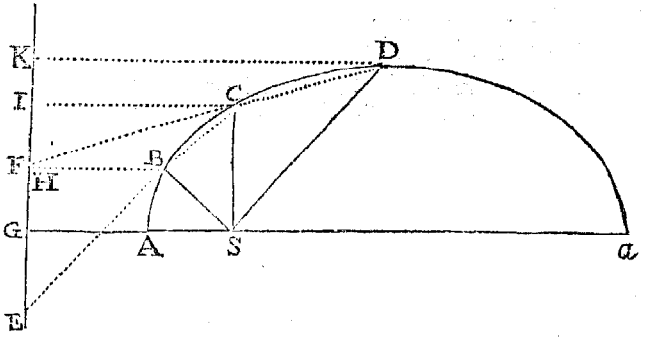
Detur umbilicus $S$, punctum $P$, & tangens $TR$, & inveniendus sit umbilicus alter $H$. Ad tangentem demitte perpendiculum $ST$, & produc idem ad $Y$, ut sit $TY$ æqualis $ST$, & erit $YH$ æqualis axi principali. Junge $SP$, $HP$, & erit $SP$ differentia inter $HP$ & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

tes $TR$, vel plura puncta $P$, devenietur ſemper ad lineas totidem $YH$, vel $PH$, a dictis punctis $Y$ vel $P$ ad umbilicum $H$ ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus $SP$ differunt ab iiſdem, atque adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter $H$. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt $YH$; vel, ſi Trajectoria Ellipſis eſt, $PH + SP$; ſin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*




*Scholium.*

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta $B, C, D$. Junctas $BC, CD$ produc ad $E, F$, ut ſit $EB$ ad $EC$ ut $SB$ ad $SC$, & $FC$ ad $FD$ ut $SC$ ad $SD$. Ad $EF$ ductam & productam demitte normales $SG$, $BH$, inque $GS$ infinite producta cape $GA$ ad $AS$ & $Ga$ ad $aS$ ut eſt $HB$ ad $BS$; & erit $A$ vertex, & $Aa$ axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut $GA$ major, æqualis, vel minor fuerit quam $AS$, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto $a$ in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ $GF$ cum puncto $A$; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ $GF$. Nam ſi demittantur ad $GF$ perpendicula $CI, DK$; erit $IC$ ad $HB$ ut $EC$ ad $EB$, hoc eſt, ut $SC$ ad $SB$; & viciſſim $IC$ ad $SC$ ut $HB$ ad $SB$ ſive ut $GA$ ad $SA$. Et ſimili argumento probabitur eſſe $KD$ ad $SD$ in eadem ratione. Jacent ergo puncta $B, C, D$ in Coniſectione circa umbilicum $S$ ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico $S$ ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam $GF$ demiſſa in data illa ratione.



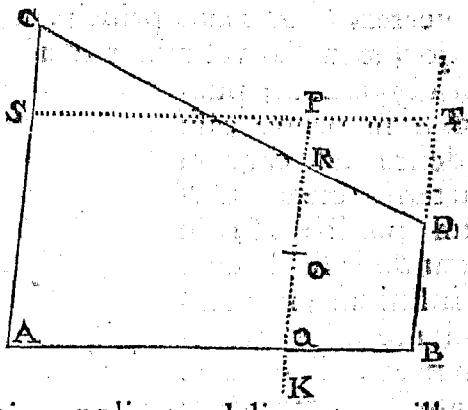

Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *de la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop. XXV.

# SECTIO V.

## *Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.*

### LEMMA XVII.

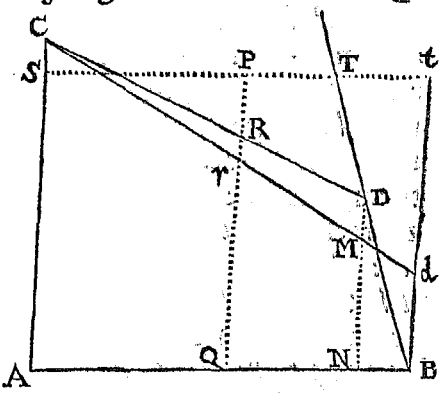
*Si a datæ Conicæ Sectionis puncto quovis* P, *ad Trapezii alicujus* ABDC, *in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ × PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS × PT *in data ratione.*



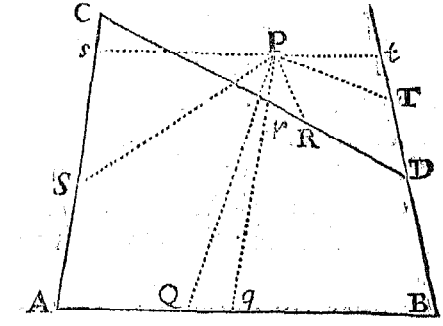

*Cas.* 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia sunt; atque adeo rectangulum *PQ* × *PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q. E. D.*

*Cas.*

*Cas.* 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita $AC$ & $BD$ non eſſe parallela. Age $Bd$ parallelam $AC$ & occurrentem tum rectæ $ST$ in $t$, tum Conicæ ſectioni in $d$. Junge $Cd$ ſecantem $PQ$ in $r$, & ipſi $PQ$ parallelam age $DM$ ſecantem $Cd$ in $M$ & $AB$ in $N$. Jam ob ſimilia triangula $BTt$, $DBN$; eſt $Bt$ ſeu $PQ$ ad $Tt$ ut $DN$ ad $NB$. Sic & $Rr$ eſt ad $AQ$ ſeu $PS$ ut $DM$ ad $AN$. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum $PQ$ in $Rr$ eſt ad rectangulum $PS$ in $Tt$, ita rectangulum $NDM$ eſt ad rectangulum $ANB$, & (per Caſ. 1) ita rectangulum $PQ$ in $Pr$ eſt ad rectangulum $PS$ in $Pt$, ac diviſim ita rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*




*Cas.* 3. Ponamus denique lineas quatuor $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ non eſſe parallelas lateribus $AC$, $AB$, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age $Pq$, $Pr$ parallelas ipſi $AC$; & $Ps$, $Pt$ parallelas ipſi $AB$; & propter datos angulos triangulorum $PQq$, $PRr$, $PSs$, $PTt$, dabuntur rationes $PQ$ ad $Pq$, $PR$ ad $Pr$, $PS$ ad $Ps$, & $PT$ ad $Pt$; atque adeo rationes compoſitæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data eſt: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*

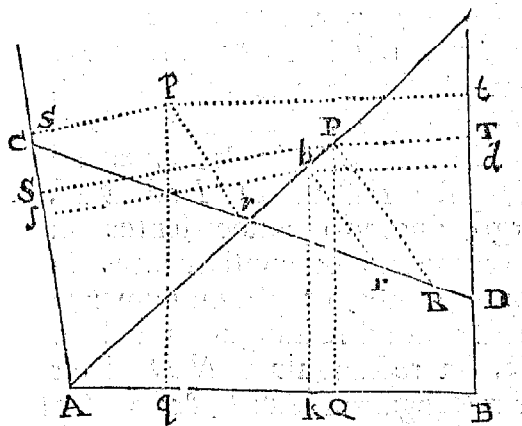



## LEMMA XVIII.

*Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii* PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

De Motu Corporum

Per puncta $A, B, C, D$ & aliquod infinitorum punctorum $P$, puta $p$, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum $P$ hanc semper tangere. Si negas, junge $AP$ secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in $P$, si fieri potest, puta in $b$. Ergo si ab his punctis $p$ & $b$ ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ $pq, pr, ps, pt$ & $bk, br, bf, bd$; erit ut $bk \times br$ ad $bf \times bd$ ita (per Lem. XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem Trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut $bk$ ad $bf$ ita $PQ$ ad $PS$. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit $br$ ad $bd$ ut $PR$ ad $PT$. Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales $Db$, $DP$ propterea coincidunt. Incidit itaque $b$ in intersectionem rectarum $AP$, $DP$ adeoque coincidit cum puncto $P$. Quare punctum $P$, ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*




*Corol.* Hinc si rectæ tres $PQ$, $PR$, $PS$ a puncto communi $P$ ad alias totidem positione datas rectas $AB$, $CD$, $AC$, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ $PS$ *quad.* in data ratione: punctum $P$, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas $AB$, $CD$ in $A$ & $C$; & contra. Nam coeat linea $BD$ cum linea $AC$ manente positione trium $AB$, $CD$, $AC$; dein coeat etiam linea $PT$ cum linea $PS$: & rectangulum $PS \times PT$ evadet $PS$ *quad.* rectæque $AB$, $CD$ quæ curvam in punctis $A$ & $B$, $C$ & $D$ secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

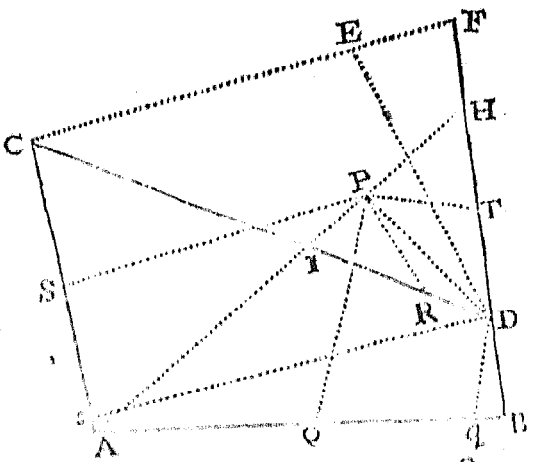
*Scholium.*

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela ineludatur. Nam si punctum $p$ incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor $A, B, C, D$ junguntur, Conica sectio verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum $p$ incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor $PQ$, $PR$, $PS$, $PT$ ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo ſub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ ſit ad rectangulum ſub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum ſub ſinubus angulorum $S, T$, in quibus duæ ultimæ $PS$, $PT$ ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum $Q, R$, in quibus duæ primæ $PQ$, $PR$ ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti $P$ erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ ſubſtitui poteſt Quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor $A$, $B$, $C$, $D$ poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu Sectio Conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

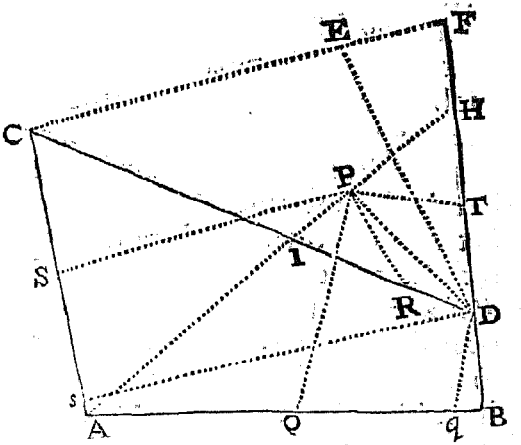
## LEMMA XIX.

*Invenire punctum* P, *a quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis*, PQ × PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus*, PS × PT, *in data ratione.*



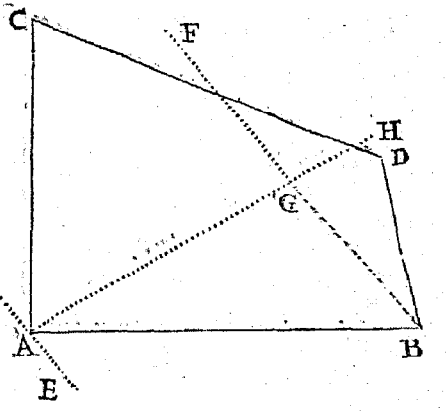

Lineæ $AB$, $CD$, ad quas rectæ duæ $PQ$, $PR$, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis $A, B, C, D$. Ab eorum aliquo $A$ age rectam quamlibet $AH$, in qua velis punctum $P$ reperiri. Secet ea lineas oppoſitas $BD$, $CD$, nimirum $BD$ in $H$ & $CD$ in $I$, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes $PQ$ ad $PA$ & $PA$ ad

ad $PS$, adeoque ratio $PQ$ ad $PS$. Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio $PR$ ad $PT$, & addendo datas rationes $PI$ ad $PR$, & $PT$ ad $PH$ dabitur ratio $PI$ ad $PH$ atque adeo punctum $P$. *Q. E. I.*




*Corol.* 1. Hinc etiam ad Loci punctorum *infinitorum* $P$ punctum quodvis $D$ tangens duci potest. Nam chorda $PD$ ubi puncta $P$ ac $D$ conveniunt, hoc est, ubi $AH$ ducitur per punctum $D$, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium $IP$ & $PH$ invenietur ut supra. Ipsi igitur $AD$ duc parallelam $CF$, occurrentem $BD$ in $F$, & in ea ultima ratione sectam in $E$, & $DE$ tangens erit, propterea quod $CF$ & evanescens $IH$ parallelæ sunt, & in $E$ & $P$ similiter sectæ.

*Corol.* 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium $P$ definiri potest. Per quodvis punctorum $A, B, C, D$, puta $A$, duc Loci tangentem $AE$ & per aliud quodvis punctum $B$ duc tangenti parallelam $BF$ occurrentem Loco in $F$. Invenietur autem punctum $F$ per Lem. XIX. Biseca $BF$ in $G$, & acta *indefinita* $AG$ erit positio diametri ad quam $BG$ & $FG$ ordinatim applicantur. Hæc $AG$ occurrat Loco in $H$, & erit $AH$ diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut $BGq.$ ad $AGH$. Si $AG$ nullibi occurrit Loco, linea $AH$ existente infinita, Locus erit Parabola & latum rectum ejus ad diametrum $AG$ pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta $A$ & $H$ sita sunt ad easdem partes ipsius $G$: & Ellipsis, ubi $G$ intermedium est, nisi forte angulus $AGB$ rectus sit & insuper $BG$ *quad.* æquale rectangulo $AGH$, quo in casu Circulus habebitur.



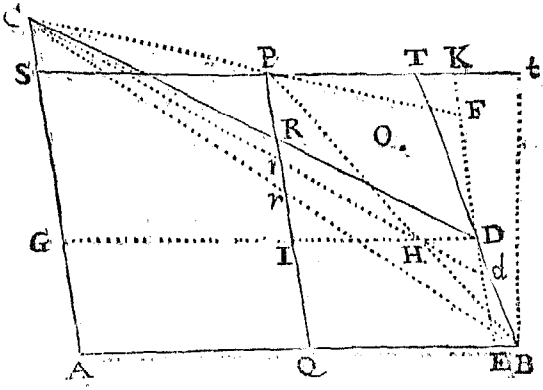

Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

## LEMMA XX.

*Si Parallelogrammum quodvis* A S P Q *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A *&* P; *&, lateribus unius angulorum illorum infinite productis* A Q, A S, *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B *&* C; *a punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* B D, C D *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* P S, P Q *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* P R *&* P T *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

*Cas.* 1. Jungantur $BP$, $CP$ & a puncto $D$ agantur rectæ duæ $DG$, $DE$, quarum prior $DG$ ipsi $AB$ parallela sit & occurrat $PB$, $PQ$, $CA$ in $H$, $I$, $G$; altera $DE$ parallela sit ipsi $AC$ & occurrat $PC$, $PS$, $AB$ in $F$, $K$, $E$: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed est $PQ$ ad $DE$ (seu $IQ$) ut $PB$ ad $HB$, adeoque ut $PT$ ad $DH$; & vicissim $PQ$ ad $PT$ ut $DE$ ad $DH$. Est & $PR$ ad $DF$ ut $RC$ ad $DC$, adeoque ut ($IG$ vel) $PS$ ad $DG$, & vicissim $PR$ ad $PS$ ut $DF$ ad $DG$; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque adeo in data ratione. Sed dantur $PQ$ & $PS$ & propterea ratio $PR$ ad $PT$ datur. *Q. E. D.*

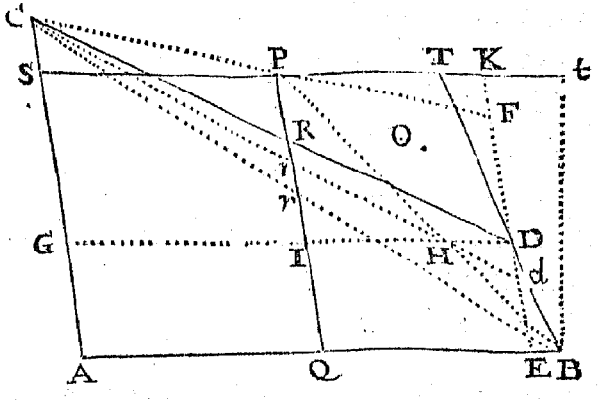



*Cas.* 2. Quod si $PR$ & $PT$ ponantur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, adeoque punctum $D$ (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta $A$, $B$, $C$, $P$. *Q. E. D.*

*Corol.*

*Corol.* 1. Hinc si agatur $BC$ secans $PQ$ in $r$, & in $PT$ capiatur $Pt$ in ratione ad $Pr$ quam habet $PT$ ad $PR$: erit $Bt$ tangens Conicæ sectionis ad punctum $B$. Nam concipe punctum $D$ coire cum puncto $B$ ita ut, chorda $BD$ evanescente, $BT$ tangens evadat; & $CD$ ac $BT$ coincident cum $CB$ & $Bt$.

*Corol.* 2. Et vice versa si $Bt$ sit tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum $D$ conveniant $BD$, $CD$; erit $PR$ ad $PT$ ut ut $Pr$ ad $Pt$. Et contra, si sit $PR$ ad $PT$ ut $Pr$ ad $Pt$: convenient $BD$, $CD$ ad Conicæ Sectionis puncum aliquod $D$.



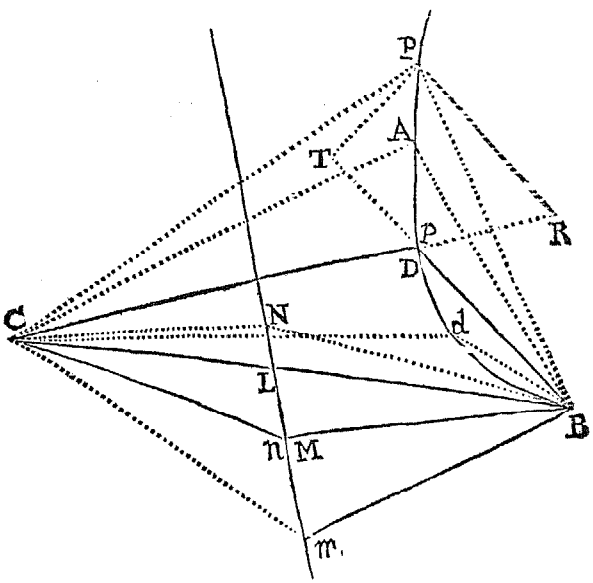

*Corol.* 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta $A, B, C, P, O$; easque secet recta $BD$ in punctis $D, d$, & ipsam $PQ$ secet recta $Cd$ in r. Ergo $PR$ est ad $PT$ ut $Pr$ ad $PT$; unde $PR$ & $Pr$ sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

## LEMMA XXI.

*Si rectæ duæ mobiles & infinitæ* BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam

Nam in recta $MN$ detur punctum $N$, & ubi punctum mobile $M$ incidit in immotum $N$, incidat punctum mobile $\mathcal{D}$ in immotum $\mathcal{P}$. Junge $CN, BN, C\mathcal{P}, B\mathcal{P}$, & a puncto $\mathcal{P}$ age rectas $\mathcal{P}T, PR$ occurrentes ipsis $B\mathcal{D}, C\mathcal{D}$ in $T$ & $R$, & facientes angulum $B\mathcal{P}T$ æqualem angulo dato $BNM$, & angulum $CPR$ æqualem angulo dato $CNM$. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli $M\mathcal{B}\mathcal{D}$, $N\mathcal{B}\mathcal{P}$, ut & anguli $M\mathcal{C}\mathcal{D}$, $N\mathcal{C}\mathcal{P}$; aufer communes $N\mathcal{B}\mathcal{D}$ & $N\mathcal{C}\mathcal{D}$, & restabunt æquales $NBM$ & $P\mathcal{B}T$, $NCM$ & $PCR$: adeoque triangula $NBM$, $P\mathcal{B}T$ similia sunt, ut & triangula $NCM$, $\mathcal{P}CR$. Quare $\mathcal{P}T$ est ad $NM$ ut $\mathcal{P}B$ ad $NB$, & $\mathcal{P}R$ ad $NM$ ut $\mathcal{P}C$ ad $NC$. Sunt autem puncta $B, C, N, \mathcal{P}$ immobilia. Ergo $\mathcal{P}T$ & $\mathcal{P}R$ datam habent rationem ad $NM$, proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma xx, punctum $\mathcal{D}$ (perpetuus rectarum mobilium $BT$ & $CR$ concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta $B, C, \mathcal{P}$ transeuntem. *Q. E. D.*



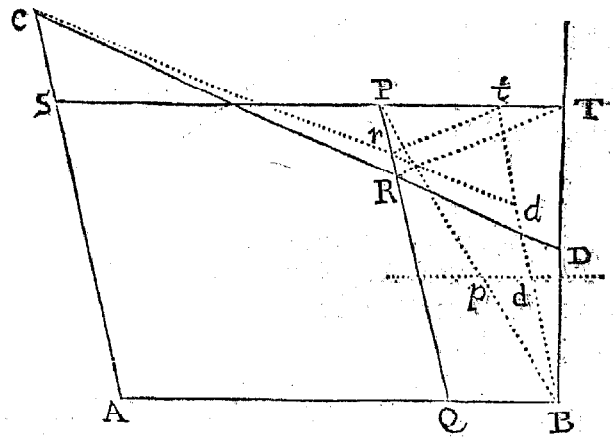

Et contra, si punctum mobile $\mathcal{D}$ contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta $B, C, A$, & sit angulus $\mathcal{D}BM$ semper æqualis angulo dato $ABC$, & angulus $\mathcal{D}CM$ semper æqualis angulo dato $ACB$, & ubi punctum $\mathcal{D}$ incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia $p, \mathcal{P}$, punctum mobile $M$ incidat successive in puncta duo immobilia $n, N$: per eadem $n, N$ agatur Recta $nN$, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis $M$. Nam, si fieri potest, versetur punctum $M$ in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum $\mathcal{D}$ sectionem Conicam per puncta quinque $B, C, A, p, \mathcal{P}$, transeuntem, ubi punctum $M$ perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum $\mathcal{D}$ sectionem Conicam per eadem quinque puncta $B, C, A, p, \mathcal{P}$ transeuntem, ubi punctum

ctum *M* perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. xx. Igitur punctum *M* versari in linea Curva absurdum est. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

*Trajectoriam per data quinque puncta describere.*

Dentur puncta quinque *A, B, C, P, D.* Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B, C,* quæ poli nominentur, age rectas *AB, AC,*

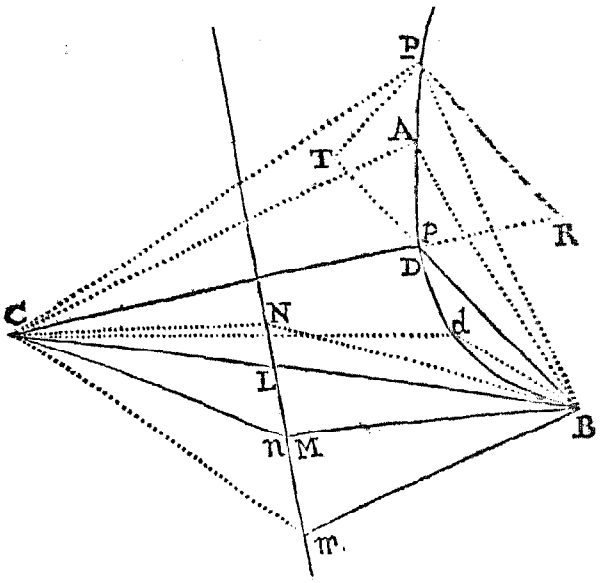



hisque parallelas *TPS, PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B, C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT, CRD,* novissime ductis *TPS, PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT, PR,* acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde quasvis *Pt, Pr* ipsis *PT, PR* proportionales; & si per earum terminos *t, r* & polos *B, C* actæ *Bt, Cr* concurrant in *d,* locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud *d* (per Lemma xx) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A, B, C, P* transeunte; &, lineis *Rr, Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio Conica per puncta quinque *A, B, C, P, D*. *Q. E. D.*

*Idem*

*Idem aliter.*

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; &, circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio quæ jam sit *m* incidat semper in rectam illam infinitam *MN* & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, Trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d*, per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q.E.F.*




*Corol.* 1. Hinc recta expedite duci potest quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato *B*, continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæsita.

*Corol.* 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

*Scholium.*

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea, si opus est, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *pd* ipsi *SPT* parallelam, inque ea capiendo semper *pd* æqualem *Pr*; & agendo rectas *Bd*, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum sint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *pd* ad *Pt* in eadem ratione; erunt *pd* & *Pr* semper æqua-

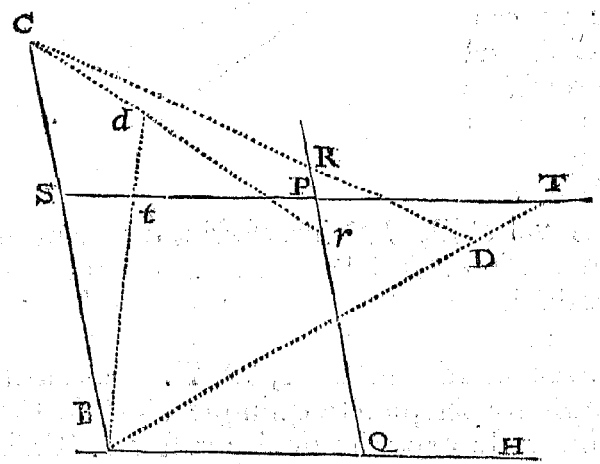
 les.

les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis Curvam, ut in conſtructione ſecunda, deſcribere Mechanice.

## PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

*Trajectoriam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.*

*Cas.* 1. Dentur tangens $HB$, punctum contactus $B$, & alia tria puncta $C$, $D$, $P$. Junge $BC$, & agendo $PS$ parallelam $BH$, & $PQ$ parallelam $BC$, comple parallelogrammum $BSPQ$.

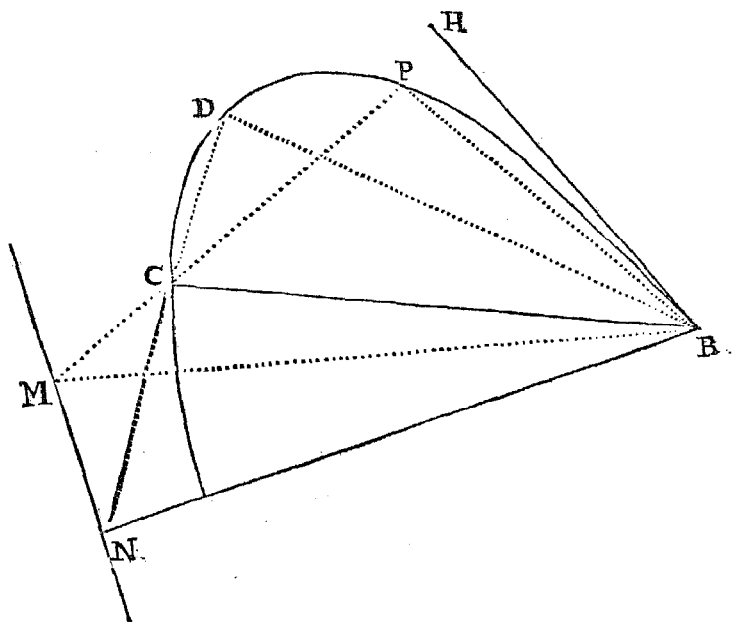



Age $BD$ ſecantem $SP$ in $T$, & $CD$ ſecantem $PQ$ in $R$. Denique, agendo quamvis $tr$ ipſi $TR$ parallelam, de $PQ$, $PS$ abſcinde $Pr$, $Pt$ ipſis $PR$, $PT$ proportionales reſpective; & actarum $Cr$, $Bt$ concurſus $d$ (per Lem. xx) incidet ſemper in Trajectoriam deſcribendam.

*Idem.*

*Idem aliter.*

Revolvatur tum angulus magnitudine datus $CBH$ circa polum $B$, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus $\mathcal{D}C$ circa polum $C$. Notentur puncta $M, N$ in quibus anguli crus $BC$ secat radium illum ubi crus alterum $BH$ concurrit cum eodem radio in punctis $\mathcal{P}$ & $\mathcal{D}$. Deinde ad actam infinitam $MN$ con-

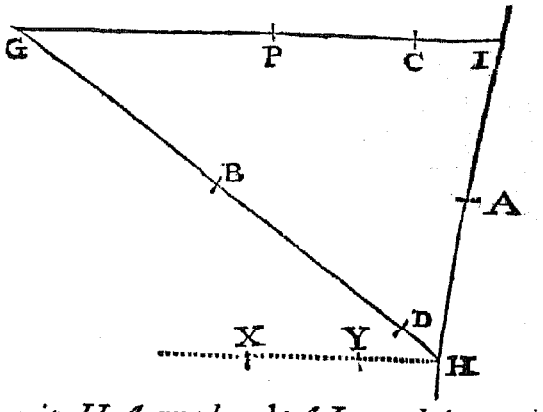



currant perpetuo radius ille $C\mathcal{P}$ vel $C\mathcal{D}$ & anguli crus $BC$, & cruris alterius $BH$ concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum $A$ ad punctum $B$, lineæ $CA$ & $CB$ coincident, & linea $AB$ in ultimo suo situ fiet tangens $BH$, atque adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris $BH$ concursus cum radio sectionem Conicam per puncta $C, \mathcal{D}, \mathcal{P}$ transeuntem, & rectam $BH$ tangentem in puncto $B$. *Q. E. F.*

*Cas.* 2. Dentur puncta quatuor $B$, $C$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$ extra tangentem $HI$ sita. Junge bina lineis $B\mathcal{D}$, $C\mathcal{P}$ concurrentibus in $G$, tangentique

tique occurrentibus in $H$ & $I$. Secetur tangens in $A$, ita ut sit $HA$ ad $AI$, ut est rectangulum sub media proportionali inter $CG$ & $GP$ & media proportionali inter $BH$ & $H\mathcal{D}$, ad rectangulum sub media proportionali inter $\mathcal{D}G$ & $GB$ & media proportionali inter $PI$ & $IC$; & erit $A$ punctum contactus. Nam si rectæ $PI$ parallela $HX$ Trajectoriam secet in punctis quibusvis $X$ & $Y$: erit (ex Conicis)

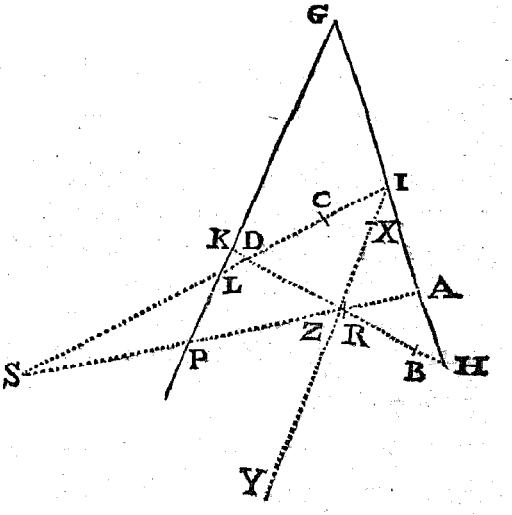



punctum $A$ ita locandum, ut fuerit $HA$ *quad.* ad $AI$ *quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli $XHY$ ad rectangulum $BH\mathcal{D}$ seu rectanguli $CGP$ ad rectangulum $\mathcal{D}GB$ & ex ratione rectanguli $BH\mathcal{D}$ ad rectangulum $PIC$. Invento autem contactus puncto $A$, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum $A$ vel inter puncta $H$ & $I$, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

## PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

*Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.*

Dentur tangentes $HI$, $KL$ & puncta $B$, $C$, $\mathcal{D}$. Per punctorum duo quævis $B$, $\mathcal{D}$ age rectam infinitam $B\mathcal{D}$ tangentibus occurrentem in punctis $H$, $K$. Deinde etiam per alia duo quævis $C$, $\mathcal{D}$ age infinitam $C\mathcal{D}$ tangentibus occurrentem in punctis $I$, $L$. Actas ita secа in $R$ & $S$, ut sit $HR$ ad $KR$ ut est media proportionalis inter $BH$ & $H\mathcal{D}$ ad mediam proportionalem inter $BK$ & $K\mathcal{D}$; & $IS$ ad $LS$ ut est media proportionalis inter $CI$ & $I\mathcal{D}$ ad mediam proportionalem inter $CL$



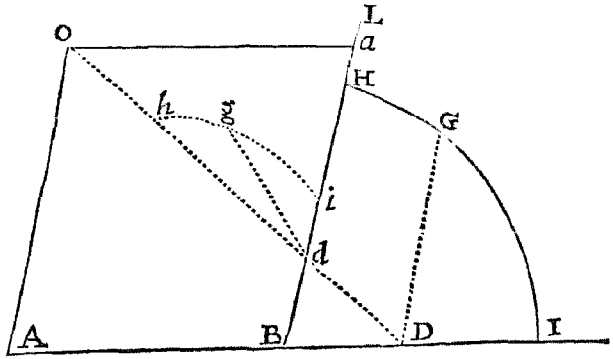

&

& $LD$. Seca autem pro lubitu vel inter puncta $K$ & $H$, $I$ & $L$, vel extra eadem: dein age $RS$ secantem tangentes in $A$ & $P$, & erunt $A$ & $P$ puncta contactuum. Nam si $A$ & $P$ supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum $H$, $I$, $K$, $L$ quodvis $I$, in tangente alterutra $HI$ situm, agatur recta $IY$ tangenti alteri $KL$ parallela, quæ occurrat curvæ in $X$ & $Y$, & in ea sumatur $IZ$ media proportionalis inter $IX$ & $IY$: erit, ex Conicis, rectangulum $XIY$ seu $IZ$ *quad.* ad $LP$ *quad.* ut rectangulum $CID$ ad rectangulum $CLD$, id est (per constructionem) ut $SI$ *quad.* ad $SL$ *quad:* atque adeo $IZ$ ad $LP$ ut $SI$ ad $SL$. Jacent ergo puncta $S$, $P$, $Z$ in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in $G$, erit (ex Conicis) rectangulum $XIY$ seu $IZ$ *quad.* ad $IA$ *quad.* ut $GP$ *quad* ad $GA$ *quad:* adeoque $IZ$ & $IA$ ut $GP$ ad $GA$. Jacent ergo puncta $P$, $Z$ & $A$ in una recta, adeoque puncta $S$, $P$ & $A$ sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta $R$, $P$ & $A$ sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum $A$ & $P$ in recta $RS$. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q. E. F.*

## LEMMA XXII.

### *Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.*

Transmutanda sit figura quævis $HGI$. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ $AO$, $BL$ tertiam quamvis positione datam $AB$ secantes in $A$ & $B$, & a figuræ puncto quovis $G$, ad rectam $AB$ ducatur quævis $GD$, ipsi $OA$ parallela. Deinde a puncto aliquo $O$, in linea $OA$ dato, ad punctum $D$ ducatur recta $OD$, ipsi $BL$ occurrens in $d$, & a puncto occursus erigatur recta $dg$ datum quemvis angulum cum recta $BL$ continens, atque eam habens rationem ad $Od$ quam habet $DG$ ad $OD$; & erit $g$ punctum in figura nova $hgi$ puncto $G$ respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figura novæ.

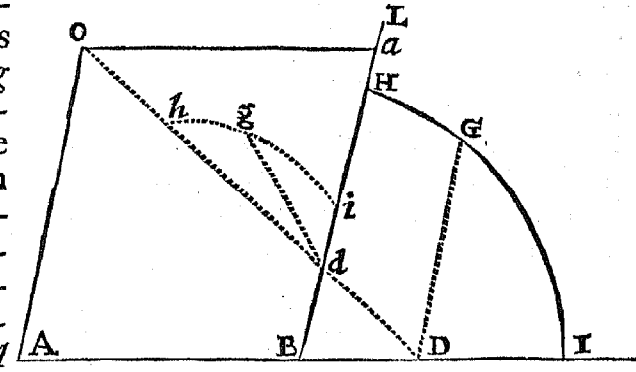



Concipe

De Motu Corporum

Concipe igitur punctum $G$ motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum $g$ motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus $DG$ ordinatam primam, $dg$ ordinatam novam; $AD$ abscissam primam, $ad$ abscissam novam; $O$ polum, $OD$ radium abscidentem, $OA$ radium ordinatum primum, & $Oa$ (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum $G$ tangit rectam Lineam positione datam, punctum $g$ tanget etiam Lineam rectam positione datam. Si punctum $G$ tangit Conicam sectionem, punctum $g$ tanget etiam Conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero. Porro si punctum $G$ tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum $g$ tanget Lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta $G$, $g$ tangunt. Etenim ut est $ad$ ad $OA$ ita sunt $Od$ ad $OD$, $dg$ ad $DG$, & $AB$ ad $AD$; adeoque $AD$ æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG$ æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum $G$ tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam $AD$ & ordinatam $DG$ habetur, indeterminatæ illæ $AD$ & $DG$ ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro $AD$, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro $DG$, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova $ad$ & ordinata nova $dg$ ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin $AD$ & $DG$ (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem $ad$ & $dg$ ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ $ad$, $dg$ in æquatione secunda & $AD$, $DG$ in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea Lineæ, quas puncta $G$, $g$ tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.




Dico

Dico præterea quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam ſi Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi poſſent harum aſſertionum Demonſtrationes more magis Geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum a quibus conflatur interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concurſum convergentium tranſit: id adeo quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ ſunt quæ ad punctum infinite diſtans tendunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figura nova, ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones Conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Recta item & ſectio Conica, in conſtructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

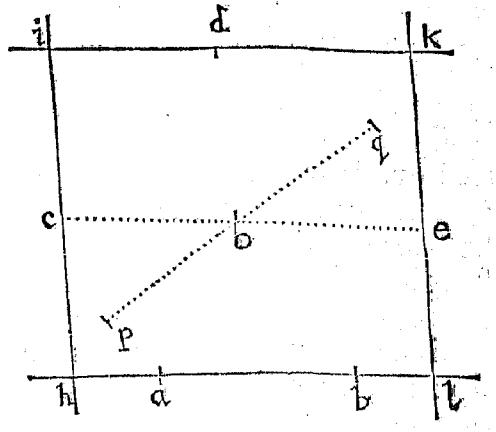
## PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam deſcribere quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.*

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In

De Motu Corporum

hac figura tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *hc* ad latus quadratum rectanguli *abb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *abb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, ſunt *hc* quadratum ad rectangulum *abb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eadem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipſius *abb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *abb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV, deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Ceterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.




## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

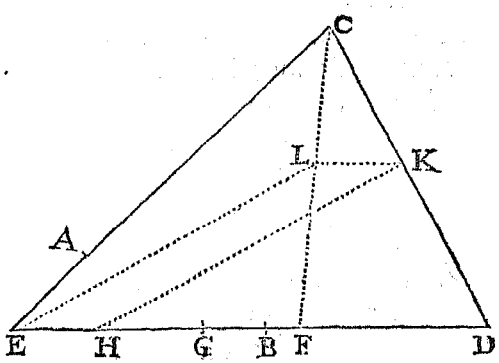
*Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.*

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q.E.F.*

## LEMMA XXIII.

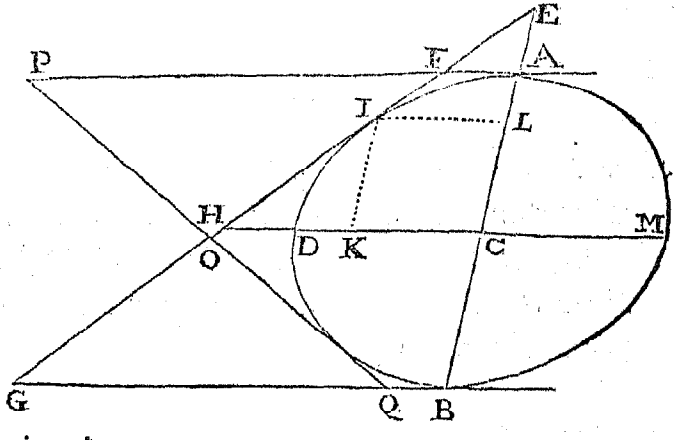
*Si rectæ duæ positione datæ* AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*




Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *EC* ad *GD*, hoc est, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut sit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; &, ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit semper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *HK*. *Q.E.D.*

## LEMMA XXIV.

*Si rectæ tres tangant quamcunque Coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod Sectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.*




Sunto $AF$, $GB$ parallelæ duæ Coniſectionem $ADB$ tangentes in $A$ & $B$; $EF$ recta tertia Coniſectionem tangens in $I$, & occurrens prioribus tangentibus in $F$ & $G$; ſitque $CD$ ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod $AF$, $CD$, $BG$ ſunt continue proportionales.

Nam ſi diametri conjugatæ $AB$, $DM$ tangenti $FG$ occurrant in $E$ & $H$, ſeque mutuo ſecent in $C$, & compleatur parallelogrammum $IKCL$; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut $EC$ ad $CA$ ita $CA$ ad $CL$, & ita diviſim $EC-CA$ ad $CA-CL$, ſeu $EA$ ad $AL$, & compoſite $EA$ ad $EA+AL$ ſeu $EL$ ut $EC$ ad $EC+CA$ ſeu $EB$; adeoque (ob ſimilitudinem triangulorum $EAF$, $ELI$, $ECH$, $EBG$) $AF$ ad $LI$ ut $CH$ ad $BG$. Eſt itidem, ex natura Sectionum Conicarum, $LI$ (ſeu $CK$) ad $CD$ ut $CD$ ad $CH$; atque, adeo ex æquo perturbate, $AF$ ad $CD$ ut $CD$ ad $BG$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi tangentes duæ $FG$, $PQ$ tangentibus parallelis $AF$, $BG$ occurrant in $F$ & $G$, $P$ & $Q$, ſeque mutuo ſecent in $O$, erit (ex æquo perturbate) $AF$ ad $BQ$ ut $AP$ ad $BG$, & diviſim ut $FP$ ad $GQ$, atque adeo ut $FO$ ad $OG$.

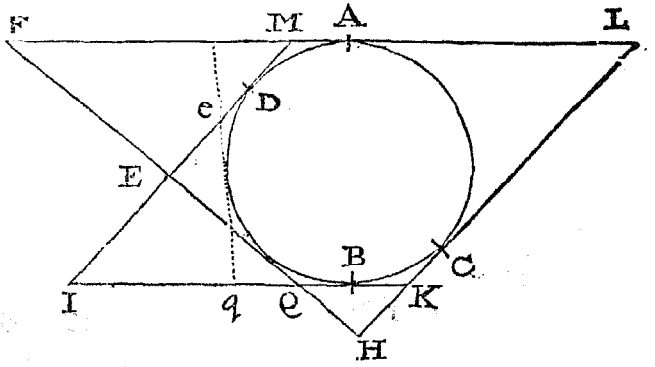
*Corol.* 2. Unde etiam rectæ duæ $PG$, $FQ$ per puncta $P$ & $G$, $F$ & $Q$ ductæ, concurrent ad rectam $ACB$ per centrum Figuræ & puncta contactuum $A$, $B$ tranſeuntem.

LEM-

## LEMMA XXV.

*Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.*

Tangant parallelogrammi $MLIK$ latera quatuor $ML$, $IK$, $KL$, $MI$ sectionem Conicam in $A, B, C, D$, & secet tangens quinta $F\mathcal{Q}$ hæc latera in $F, \mathcal{Q}, H$ & $E$; sumantur autem laterum $MI, KI$ abscissæ $ME, K\mathcal{Q}$, vel laterum $KL, ML$ abscissæ $KH, MF$: dico quod sit $ME$ ad $MI$ ut $BK$ ad $K\mathcal{Q}$; & $KH$ ad $KL$ ut $AM$ ad $MF$. Nam per Corollarium secundum Lemmatis superioris, est $ME$ ad $EI$ ut ($AM$ seu) $BK$ ad $B\mathcal{Q}$, & componendo $ME$ ad $MI$ ut $BK$ ad $K\mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}.E.D.$ Item $KH$ ad $HL$ ut ($BK$ seu) $AM$ ad $AF$, & dividendo $KH$ ad $KL$ ut $AM$ ad $MF$. $\mathcal{Q}.E.D.$




*Corol.* 1. Hinc si datur parallelogramum $IKLM$, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $K\mathcal{Q} \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

*Corol.* 2. Et si sexta ducatur tangens $eq$ tangentibus $KI$, $MI$ occurrens in $q$ & $e$; rectangulum $K\mathcal{Q} \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque $K\mathcal{Q}$ ad $Me$ ut $Kq$ ad $ME$, & divisim ut $\mathcal{Q}q$ ad $Ee$.

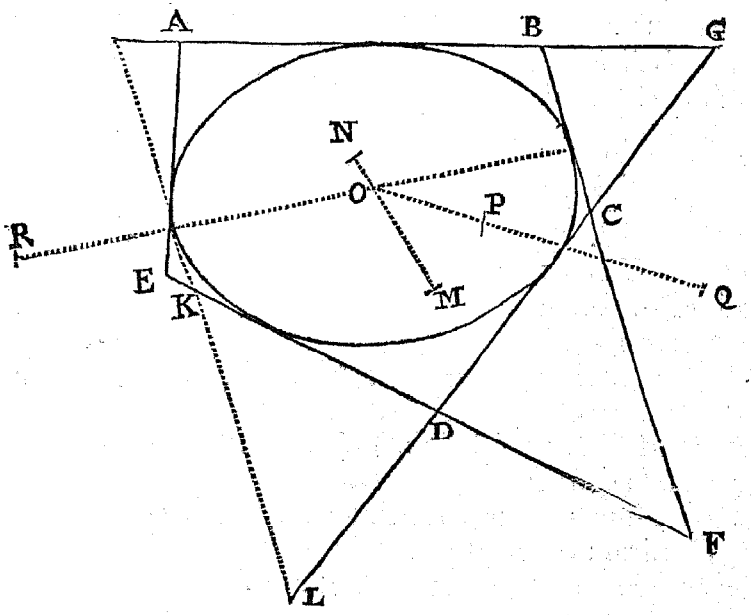
*Corol.* 3. Unde etiam si $Eq$, $e\mathcal{Q}$ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit $\mathcal{Q}q$ ad $Ee$ ut $K\mathcal{Q}$ ad $Me$, transibit eadem

De Motu Corporum dem recta per medium omnium $Eq$, $e\mathcal{Q}$, $MK$; (per Lem. xxiii) & medium rectæ $MK$ est centrum Sectionis.

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

*Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.*

Dentur positione tangentes $ABG$, $BCF$, $GC\mathcal{D}$, $F\mathcal{D}E$, $EA$. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales $AF$, $BE$ bisecа, & (per Corol. 3. Lem. xxv) recta $MN$ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus Figuræ quadrilateræ $BG\mathcal{D}F$, sub aliis quibusvis quatuor



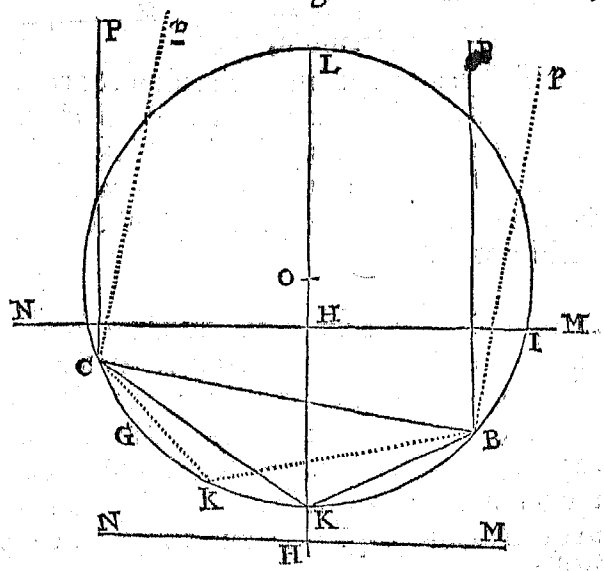

tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) $B\mathcal{D}$, $GF$ bisecа in $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$: & recta $P\mathcal{Q}$ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud $O$. Tangenti cuivis $BC$ parallelam age $KL$, ad eam distantiam ut centrum $O$ in medio inter parallelas locetur, & acta $KL$ tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes

gentes alias quasvis duas $GCD$, $FDE$ in $L$ & $K$. Per harum tangentium non parallelarum $CL$, $FK$ cum parallelis $CF$, $KL$ concursus $C$ & $K$, $F$ & $L$ age $CK$, $FL$ concurrentes in $R$, & recta $OR$ ducta & producta secabit tangentes parallelas $CF$, $KL$ in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per 1. Probl. XIV. Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

## *Scholium.*

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti, includuntnr in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones Problematis XIV & Casus primi Problematis XV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium $PBN$, $PCN$ crura $BP$, $CP$, quorum concursu Trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos $B$, $C$ in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura $CN$, $BN$, concursu suo $K$ vel $k$, Circulum $IBKGC$. Sit Circuli hujus centrum $O$. Ab hoc centro ad Regulam $MN$, ad quam altera illa crura $CN$, $BN$ interea concurrebant

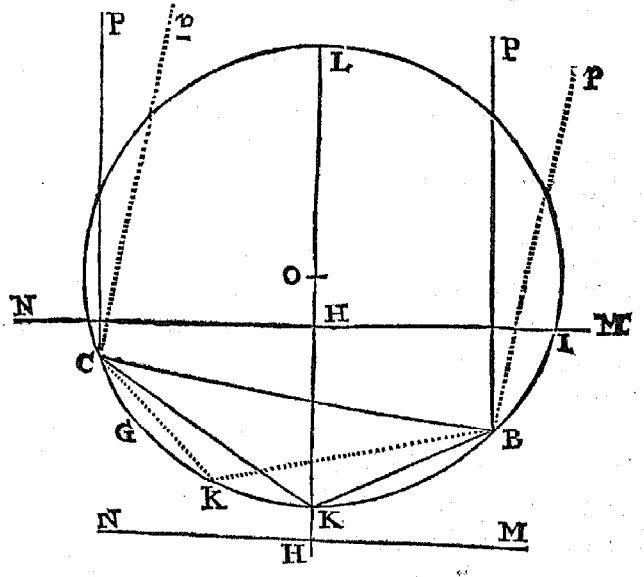



dum

De Motu Corporum

dum Trajectoria describebatur, demitte normalem $OH$ Circulo occurrentem in $K$ & $L$. Et ubi crura illa altera $CK$, $BK$ concurrunt ad punctum illud $K$ quod Regulæ propius est, crura prima $CP$, $BP$ parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius $L$. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut $KH$ ad $LH$, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli $C$, $B$, tertium dabit angulos mobiles $PCK$, $PBK$; his autem datis describi potest Circulus $IBKGC$. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio $OH$ ad $OK$, adeoque ipsa $OH$. Centro $O$ & intervallo $OH$ describe alium circulum,




& recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum $CK$, $BK$, ubi crura prima $CP$, $BP$ concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa $MN$ cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam viciſſim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.

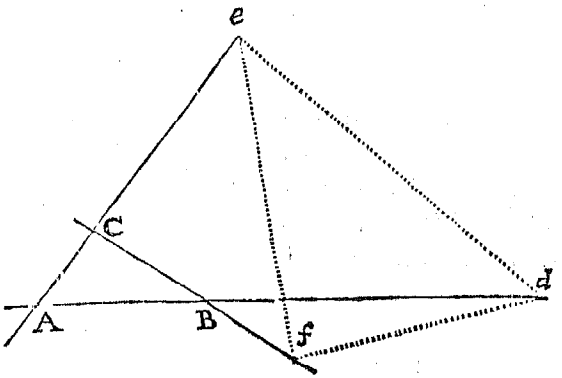
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

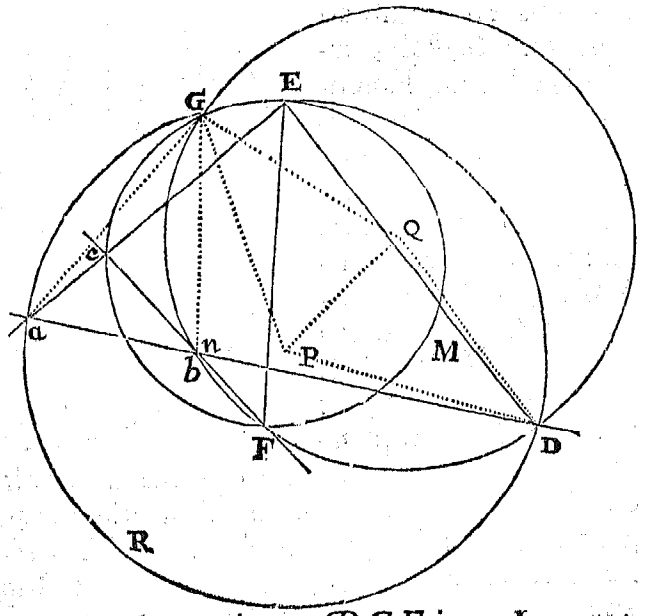
LEMMA

## LEMMA XXVI.

*Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.*

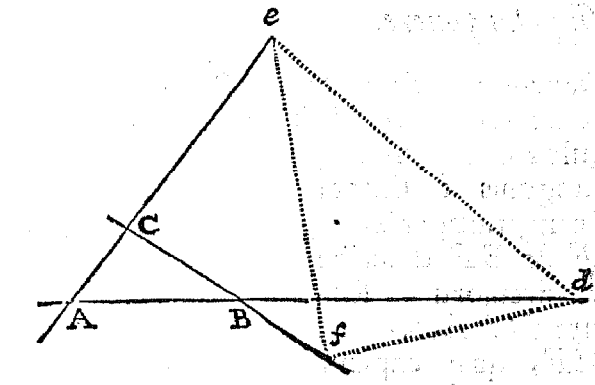
Dantur poſitione tres rectæ infinitæ $AB$, $AC$, $BC$, & oportet triangulum $DEF$ ita locare, ut angulus ejus $D$ lineam $AB$, angulus $E$ lineam $AC$, & angulus $F$ lineam $BC$ tangat. Super $DE$, $DF$ & $EF$ deſcribe tria circulorum ſegmenta $DRE$, $DGF$, $EMF$, quæ capiant angulos angulis $BAC$, $ABC$, $ACB$ æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum $DE$, $DF$, $EF$ ut literæ $DREDE$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in $G$, ſintque centra eorum $P$ & $Q$. Junctis $GP$, $PQ$, cape $Ga$ ad $AB$ ut eſt $GP$ ad $PQ$, & centro $G$, intervallo $Ga$ deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum $DGE$ in $a$. Jungatur tum $aD$ ſecans circulum ſecundum $DFG$ in $b$, tum $aE$ ſecans circulum

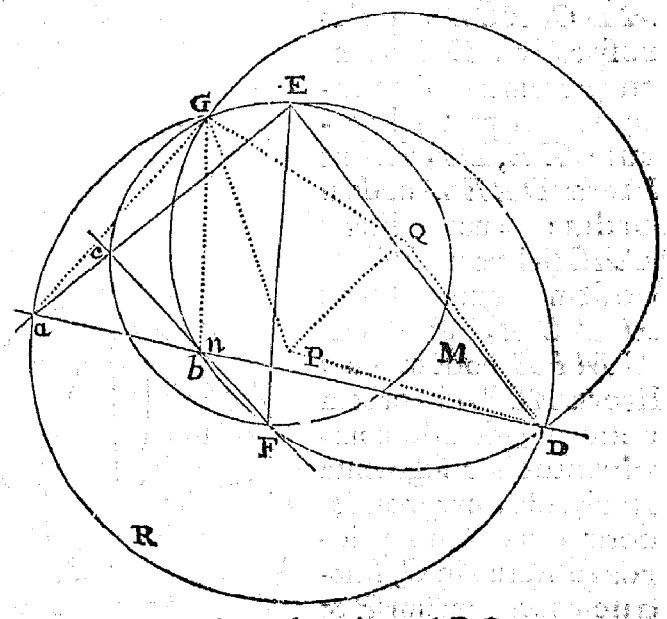


culum tertium $EMF$ in $c$. Et compleatur Figura $ABCdef$ similis & æqualis Figuræ $abcDEF$. Dico factum.

Agatur enim $Fc$ ipsi $aD$ occurrens in $n$, & jungantur $aG$, $bG$, $QG$, $QD$, $PD$. Ex constructione est angulus $EaD$ æqualis angulo $CAB$, & angulus $acF$ æqualis angulo $ACB$, adeoque triangulum $anc$ triangulo $ABC$ æquiangulum. Ergo angulus $anc$ seu $FnD$ angulo $ABC$, adeoque angulo $FbD$ æqualis est; & propterea punctum $n$ incidit in punctum $b$. Porro angulus $GPQ$, qui dimidius est anguli ad centrum $GPD$, æqualis est angulo ad circumferentiam $GaD$; & angulus $GQP$, qui dimidius est anguli ad centrum $GQD$, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam $GbD$, adeoque æqualis angulo $Gba$; suntque ideo triangula $GPQ$, $Gab$ similia; & $Ga$ est ad $ab$ ut $GP$ ad $PQ$; id est (ex constructione) ut $Ga$ ad $AB$. Æquantur itaque $ab$ & $AB$; & propterea triangula $abc$, $ABC$, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli $DEF$ anguli $D$, $E$, $F$ trianguli $abc$ latera $ab$, $ac$, $bc$ respective, compleri potest Figura $ABCdef$ Figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. *Q. E. F.*



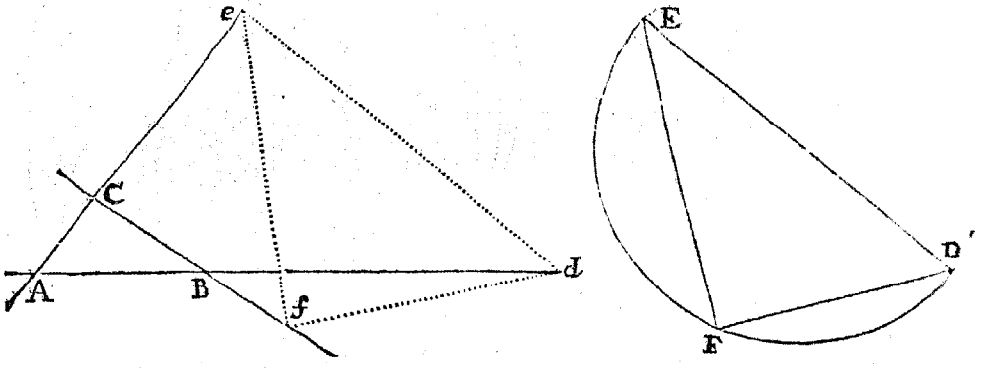

*Corol.*

*Corol.* Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe Triangulum $DEF$, puncto $D$ ad latus $EF$ accedente, & lateribus $DE$, $DF$ in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data $DE$ rectis poſitione datis $AB$, $AC$, & pars data $DF$ rectis poſitione datis $AB$, $BC$ interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

## PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

*Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.*

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis Lineæ curvæ $DEF$, quæque a rectis tribus $AB$, $AC$, $BC$ poſitione datis, in



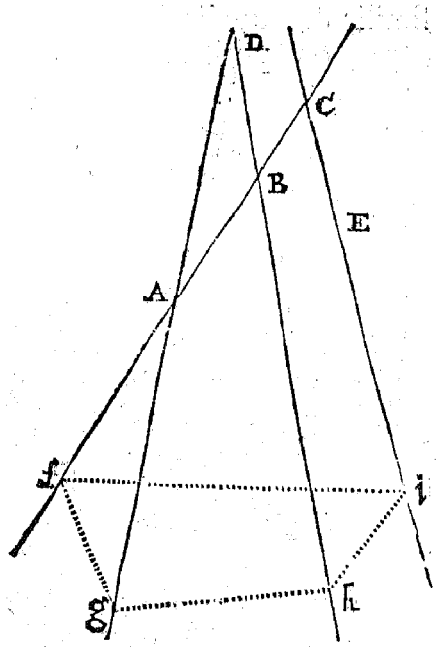

partes datis hujus partibus $DE$ & $EF$ ſimiles & æquales ſecabitur.

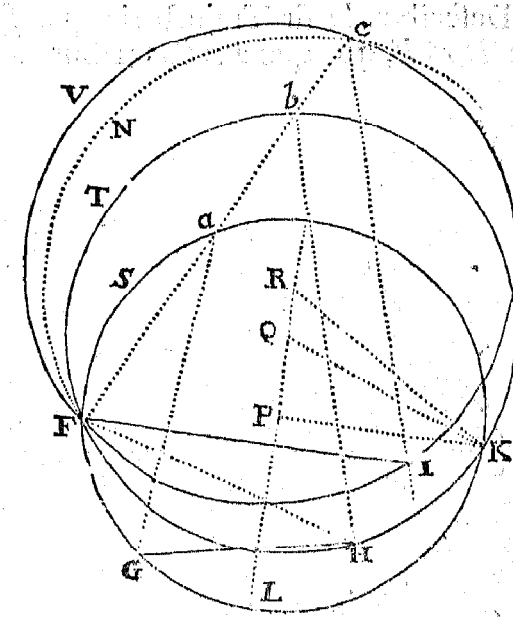
Age rectas $DE$, $EF$, $DF$, & trianguli hujus $DEF$ pone anglos $D$, $E$, $F$ ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam Curvæ $DEF$ ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

## LEMMA XXVII.

*Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.*

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI*




ſimile, & cujus angulus $\widehat{f}$, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum

lum æqualem angulo $BAD$, ſecundum $FTH$ capiat angulum æqualem angulo $CBD$, ac tertium $FVI$ capiat angulum æqualem angulo $ACE$. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum $FG$, $FH$, $FI$, ut literarum $FSGF$ idem ſit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque $P$ centrum circuli primi $FSG$, & $Q$ centrum ſecundi $FTH$. Jungatur & utrinque producatur $PQ$, & in ea capiatur $QR$ in ea ratione ad $PQ$ quam habet $BC$ ad $AB$. Capiatur autem $QR$ ad eas partes puncti $Q$ ut literarum $P$, $Q$, $R$ idem ſit ordo atque literarum $A$, $B$, $C$: centroque $R$ & intervallo $RF$ deſcribatur circulus quartus $FNc$ ſecans circulum tertium $FVI$ in $c$. Jungatur $Fc$ ſecans circulum primum in $a$ & ſecundum in $b$. Agantur $aG$, $bH$, $cI$, & Figuræ $abcFGHI$ ſimilis conſtituatur Figura $ABCfghi$: Eritque Trapezium $fghi$ illud ipſum quod conſtituere oportebat.

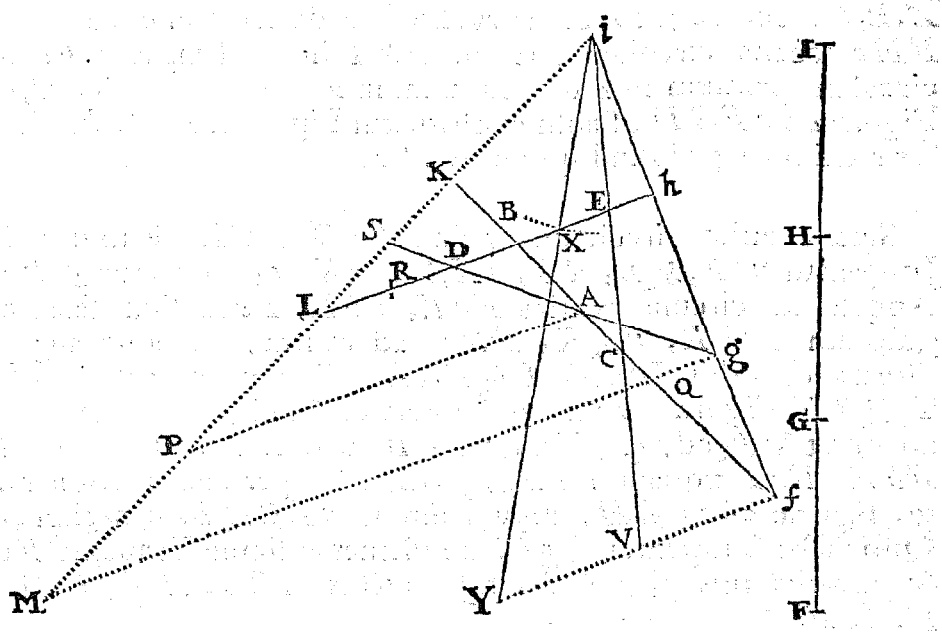
Secent enim circuli duo primi $FSG$, $FTH$ ſe mutuo in $K$. Jungantur $PK$, $QK$, $RK$, $aK$, $bK$, $cK$, & producatur $QP$ ad $L$. Anguli ad circumferentias $FaK$, $FbK$, $FcK$ ſunt ſemiſſes angulorum $FPK$, $FQK$, $FRK$ ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis $LPK$, $LQK$, $LRK$ æquales. Eſt ergo Figura $PQRK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & ſimilis, & propterea $ab$ eſt ad $bc$ ut $PQ$ ad $QR$, id eſt, ut $AB$ ad $BC$. Angulis inſuper $FaG$, $FbH$, $FcI$ æquantur $fAg$, $fBh$, $fCi$ per conſtructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura ſimilis $ABCfghi$ compleri poteſt Quo facto Trapezium $fghi$ conſtituetur ſimile Trapezio $FGHI$ & angulis ſuis $f$, $g$, $h$, $i$ tanget rectas $ABC$, $AD$, $BD$, $CE$ $Q.E.F.$

*Corol.* Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli $FGH$, $GHI$ uſque eo, ut rectæ $FG$, $GH$, $HI$ in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo Problema, ducetur recta $fghi$ cujus partes $fg$, $gh$, $hi$, rectis quatuor poſitione datis $AB$ & $AD$, $AD$ & $BD$, $BD$ & $CE$ interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ $FG$, $GH$, $HI$, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Produ-

Producantur $AB$ ad $K$, & $B\mathcal{D}$ ad $L$, ut ſit $BK$ ad $AB$ ut $HI$ ad $GH$; & $\mathcal{D}L$ ad $B\mathcal{D}$ ut $GI$ ad $FG$; & jungatur $KL$ occurrens rectæ $CE$ in $i$. Producatur $iL$ ad $M$, ut ſit $LM$ ad $iL$ ut $GH$ ad $HI$, & agatur tum $M\mathcal{Q}$ ipſi $LB$ parallela rectæque $A\mathcal{D}$ occurrens in $g$, tum $gi$ ſecans $AB$, $B\mathcal{D}$ in $f$, $h$. Dico factum.

Secet enim $Mg$ rectam $AB$ in $\mathcal{Q}$, & $A\mathcal{D}$ rectam $KL$ in $S$, & agatur $A\mathcal{P}$ quæ ſit ipſi $B\mathcal{D}$ parallela & occurrat $iL$ in $\mathcal{P}$, & erunt $gM$ ad $Lh$ ($gi$ ad $hi$, $Mi$ ad $Li$, $GI$ ad $HI$, $AK$ ad $BK$) & $A\mathcal{P}$ ad $BL$ in eadem ratione. Secetur $\mathcal{D}L$ in $R$ ut ſit




$\mathcal{D}L$ ad $RL$ in eadem illa ratione, & ob proportionales $gS$ ad $gM$, $AS$ ad $A\mathcal{P}$, & $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}L$; erit, ex æquo, ut $gS$ ad $Lh$ ita $AS$ ad $BL$ & $\mathcal{D}S$ ad $RL$; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-\mathcal{D}S$ ad $gS-AS$. Id eſt $BR$ ad $Bh$ ut $A\mathcal{D}$ ad $Ag$ adeoque ut $B\mathcal{D}$ ad $g\mathcal{Q}$. Et viciſſim $BR$ ad $B\mathcal{D}$ ut $Bh$ ad $g\mathcal{Q}$, ſeu $fh$ ad $fg$. Sed ex conſtructione linea $BL$ eadem ratione ſecta fuit in $\mathcal{D}$ & $R$ atque linea $FI$ in $G$ & $H$: ideoque eſt $BR$ ad $B\mathcal{D}$ ut $FH$ ad $FG$. Ergo $fh$ eſt ad $fg$ ut $FH$ ad $FG$. Cum igitur ſit etiam $gi$ ad $hi$ ut $Mi$ ad $Li$, id eſt, ut $GI$ ad $HI$, patet lineas $FI$, $fi$ in $g$ & $h$, $G$ & $H$ ſimiliter ſectas eſſe. $\mathcal{Q}$. $E$. $F$.

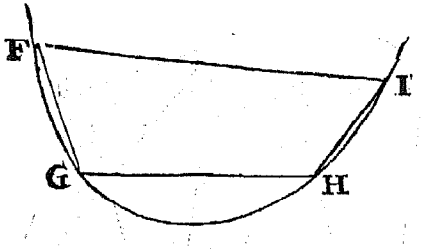
In

In conſtructione Corollarii hujus poſtquam ducitur $LK$ ſecans $CE$ in $i$, producere licet $iE$ ad $V$, ut ſit $EV$ ad $Ei$ ut $FH$ ad $HI$, & agere $Vf$ parallelam ipſi $BD$. Eodem recidit ſi centro $i$, intervallo $IH$, deſcribatur circulus ſecans $BD$ in $X$, & producatur $iX$ ad $\Upsilon$, ut ſit $i\Upsilon$ æqualis $IF$, & agatur $\Upsilon f$ ipſi $BD$ parallela.

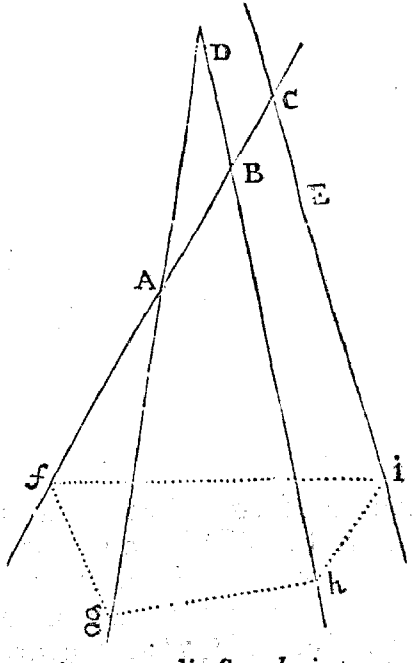
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

*Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.*




Deſcribenda ſit Trajectoria $fghi$, quæ ſimilis ſit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes $fg$, $gh$, $hi$ illius partibus $FG$, $GH$, $HI$ ſimiles & proportionales, rectis $AB$ & $AD$, $AD$ & $BD$, $BD$ & $CE$ poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis $FG$, $GH$, $HI$, $FI$, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium $fghi$ quod ſit Trapezio $FGHI$ ſimile & cujus anguli $f, g, h, i$ tangant rectas illas poſitione datas $AB$, $AD$, $BD$, $CE$, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ conſimilis.

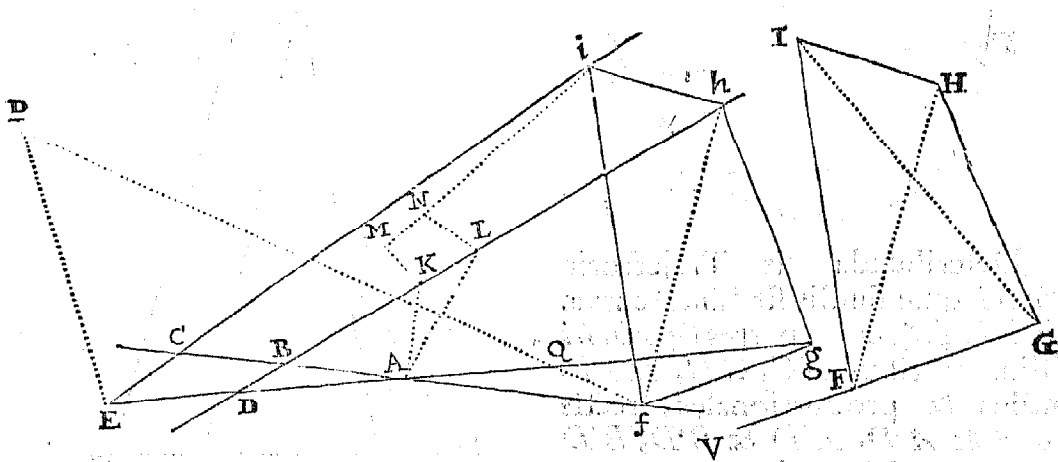



*Scholium.*

DE MOTU CORPORUM

*Scholium.*

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*,




ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Supereſt ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

SECTIO

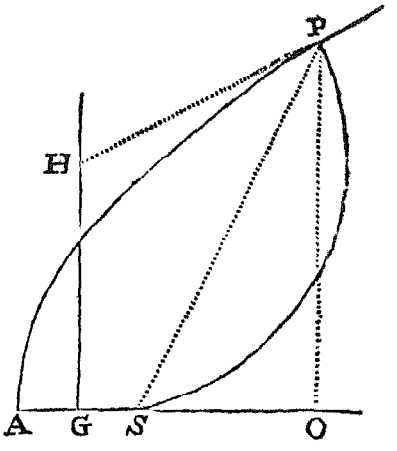
# SECTIO VI.

## *De Inventione Motuum in Orbibus datis.*

## PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

*Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.*

Sit $S$ umbilicus & $A$ vertex principalis Parabolæ, sitque $4AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abscindendæ $APS$, quæ radio $SP$, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Bisecа $AS$ in $G$, erigeque perpendiculum $GH$ æquale 3 M, & Circulus centro $H$, intervallo $HS$ descriptus secabit Parabolam in loco quæsito $P$. Nam, demissa ad axem perpendiculari $PO$ & ducta $PH$, est




$AGq + GHq (= HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO\ (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$. Pro $AOq$ scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{4}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO}$) $=$ areæ $APS$. Sed $GH$ erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area abscissa $APS$ æqualis est abscindendæ $4AS \times M$. *Q.E.D.*

*Corol.* 1. Hinc $GH$ est ad $AS$, ut tempus quo corpus descripsit arcum $AP$ ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem $A$ & perpendiculum ad axem ab umbilico $S$ erectum.

*Corol.* 2. Et Circulo $ASP$ per corpus motum $P$ perpetuo transeunte, velocitas puncti $H$ est ad velocitatem quam corpus habuit in

in vertice $A$, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione eſt linea $GH$ ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab $A$ ad $P$, ea cum velocitate quam habuit in vertice $A$, deſcribere poſſet.

*Corol.* 3. Hinc etiam vice verſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum $AP$. Junge $AP$ & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ $GH$ occurrens in $H$.

## LEMMA XXVIII.

*Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.*

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet Spiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ Ovalis a recta illa abſciſſæ incrementum per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum Spirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, adeoque aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam Circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde

Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum Curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere ſiceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: Curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis interſectiones numero infinitæ, cum Curva hæc ſit ſimplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones Spiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo Spiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

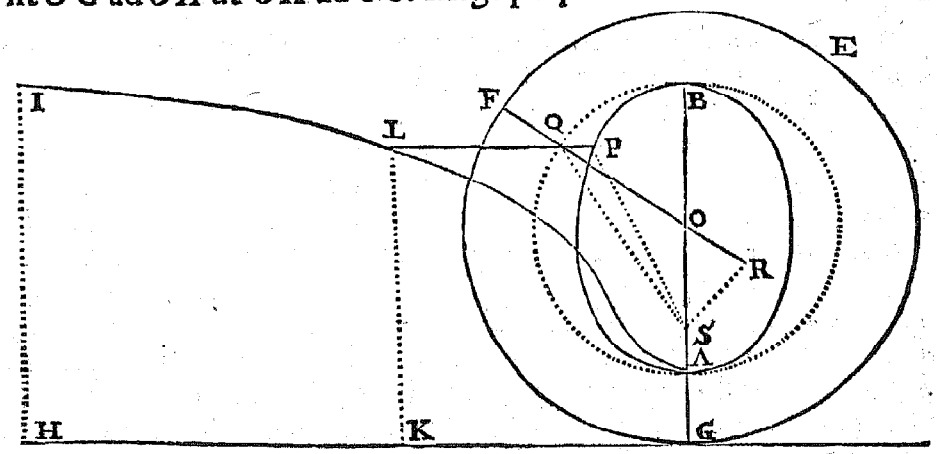
*Corollarium.*

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam Geometrice irrationalem ut ſequitur.

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

*Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.*

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut ſit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque




*O* & intervallo *OG* deſcribe circulum *EFG*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur Rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo Trochoidem *ALI*.

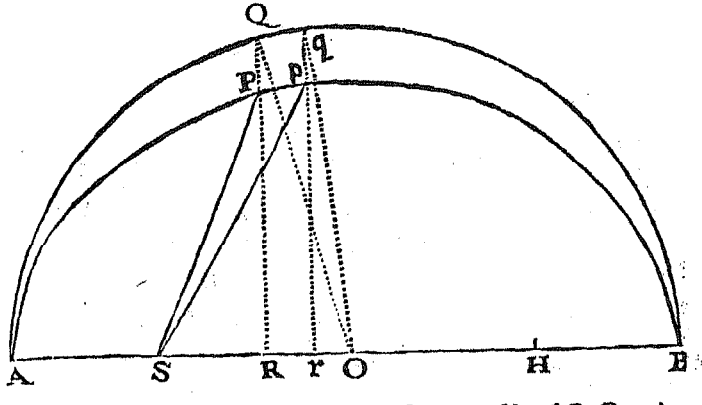
Quo

Quo facto, cape $GK$ in ratione ad Rotæ perimetrum $GEFG$, ut eſt tempus quo corpus progrediendo ab $A$ deſcripſit arcum $AP$, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Erigatur perpendiculum $KL$ occurrens Trochoidi in $L$, & acta $LP$ ipſi $KG$ parallela occurret Ellipſi in corporis loco quæſito $P$.

Nam centro $O$, intervallo $OA$ deſcribatur ſemicirculus $AQB$, & arcui $AQ$ occurrat $LP$ producta in $Q$, junganturque $SQ$, $OQ$. Arcui $EFG$ occurrat $OQ$ in $F$, & in eandem $OQ$ demittatur perpendiculum $SR$. Area $APS$ eſt ut area $AQS$, id eſt, ut differentia inter ſectorem $OQA$ & triangulum $OQS$, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum $AQ$ & rectam $SR$, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum $SR$ ad ſinum arcus $AQ$, $OS$ ad $OA$, $OA$ ad $OG$, $AQ$ ad $GF$, & diviſim $AQ - SR$ ad $GF$ – ſin. arc. $AQ$) ut $GK$ differentia inter arcum $GF$ & ſinum arcus $AQ$. *Q.E.D.*

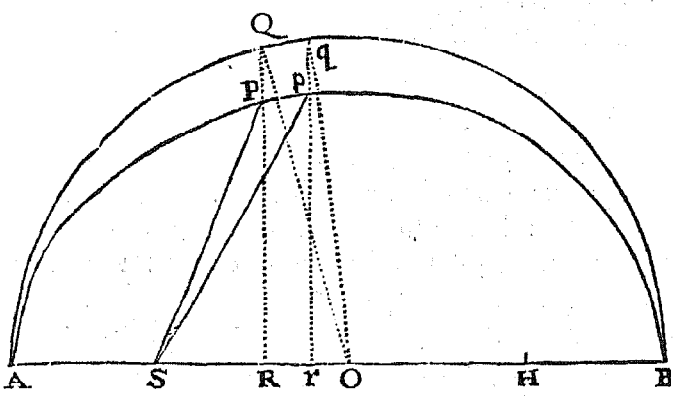
## *Scholium.*

Cæterum, cum difficilis ſit hujus Curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57,29578. quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia $SH$ ad Ellipſeos diametrum $AB$; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps conſit per ſequentem Analyſin. Per conſtructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoſcatur corporis locus $P$ proximus vero ejus loco $p$. Demiſſaque ad axem Ellipſeos ordinatim applicata $PR$, ex proportione diametrorum Ellipſeos, dabitur Circuli circumſcripti $AQB$ ordinatim applicata $RQ$, quæ ſinus eſt anguli $AOQ$ exiſtente $AO$ radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis,



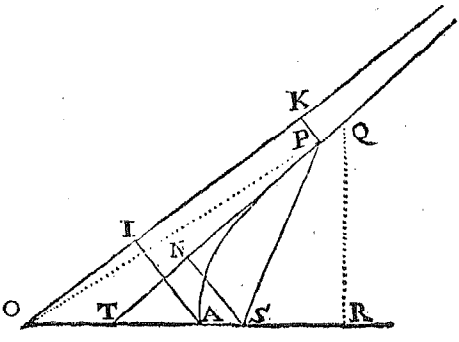
De Motu Corporum

tionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus quo corpus deſcripſit arcum $Ap$, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli $AOQ$ ad radium, & angulus E ad angulum $N-AOQ+D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli $AOQ$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ+E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N-AOQ-E+F$ ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli $AOQ+E$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ+E+G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N-AOQ-E-G+H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $AOQ+E+G$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus $AOq$ æqualis angulo $AOQ+E+G+I+$ &c. et ex coſinu ejus $Or$ & ordinata $pr$, quæ eſt ad ſinum ejus $qr$ ut Ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus $p$. Si quando angulus $N-AOQ+D$ negativus eſt, debet ſignum $+$ ipſius E ubique mutari in $-$, & ſignum $-$ in $+$. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli $N-AOQ-E+F$, & $N-AOQ-E-G+H$ negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita $AOQ+E+G+I+$ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area $APS$ ſit ut differentia inter arcum $AQ$ & rectam ab umbilico $S$ in Radium $OQ$ perpendiculariter demiſſam.

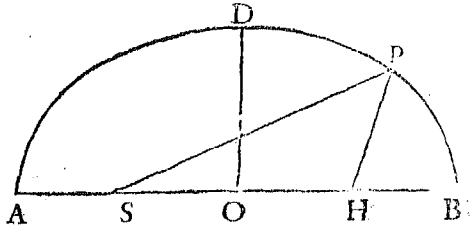



Non diſſimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum $O$, Vertex $A$, Umbilicus $S$ & Aſymptotos $OK$. Cognoſcatur

noſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ $SP$, quæ aream $APS$ abſcindat veræ proximam. Jungatur $OP$, & ab $A$ & $P$ ad Aſymptoton agantur $AI$, $PK$ Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eique æqualis area $OPA$, quæ ſubducta de triangulo $OPS$ relinquet aream abſciſſam $APS$. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ $APS$ differentiam duplam $2APS-2A$ vel $2A-2APS$ ad lineam $SN$, quæ ab umbilico $S$ in tangentem $PT$ perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ $PQ$. Inſcribatur autem chorda illa $PQ$ inter $A$ & $P$, ſi area abſciſſa $APS$ major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti $P$ contrarias partes: & punctum $Q$ erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.



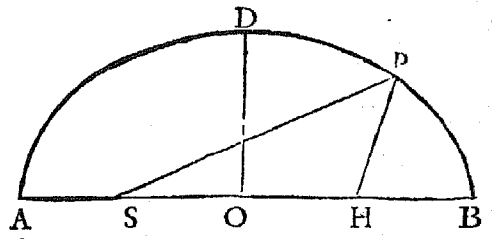

Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus $AO$, $OB$, $OD$ ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem $OD$ & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO+OD$ ad quadratum axis majoris $AB$; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia $SH$ & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris $AO$. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus $BP$ deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut eſt ſinus dupli anguli T ad Radium;




atque

De Motu Corporum

atque angulum X (æquationem ſecundam) ad angulum Z (æquationem maximam ſecundam) ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T + X + V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T + X − V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum $BHP$ (motum medium æquatum;) &, ſi $HP$ occurrat Ellipſi in $P$, acta $SP$ abſcindet aream $BSP$ tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum) figuras duas terſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipſius, cujus Æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati $BHP$, angulus veri motus $BSP$ & diſtantia $SP$ in promptu ſunt per *Wardi* methodum notiſſimam.




Hactenus de Motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi Motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO

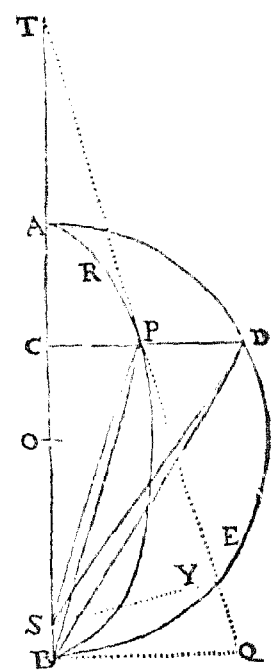
Liber Primus.

# SECTIO VII.

## *De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.*

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

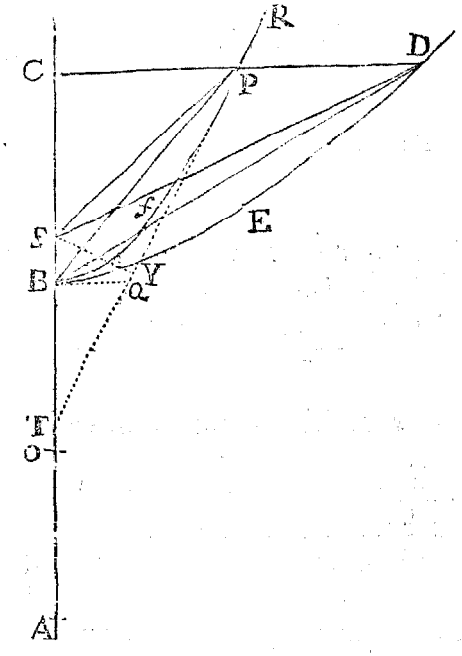
*Poſito quod Vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.*




*Cas.* 1. Si Corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit] Sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo ſi Figura Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur Semicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, Orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q.E.I.*

De Motu Corporum

*Cas.* 2. Si Figura illa *RPB* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



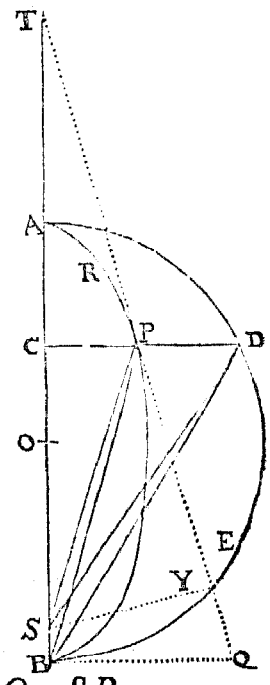

*Cas.* 3. Et ſimili argumento ſi Figura *RPB* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola *BED*, quæ ſemper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

*Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ ſemidiametrum principalem* ½ AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque Figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT* quæ tangat Figuram *RPB* in *P*, atque etiam

etiam ſecet communem illam diametrum $AB$ (ſi opus eſt productam) in $T$; ſitque $ST$ ad hanc rectam, & $BQ$ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ $RPB$ latus rectum ponatur L. Conſtat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea $RPB$ circa centrum $S$ moventis velocitas in loco quovis $P$ ſit ad velocitatem corporis intervallo $SP$ circa idem centrum Circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × $SP$ ad $ST$ quadratum. Eſt autem ex Conicis $ACB$ ad $CPq$ ut 2 $AO$ ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad $ST$ *quad.* Porro ex Conicis eſt $CO$ ad $BO$ ut $BO$ ad $TO$, & compoſite vel diviſim ut $CB$ ad $BT$. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO$ −vel + $CO$ ad $BO$ ut $CT$ ad $BT$, id eſt $AC$ ad $AO$ ut $CP$ ad $BQ$; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ $RPB$ latitudo $CP$, ſic ut punctum $P$ coeat cum puncto $C$, punctumque $S$ cum puncto $B$, & linea $SP$ cum linea $BC$, lineaque $ST$ cum linea $BQ$; & corporis jam recta deſcendentis in linea $CB$ velocitas fiet ad velocitatem corporis centro $B$ intervallo $BC$ Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad $STq$, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus $SP$ ad $BC$ & $BQq$ ad $STq$) in ſubduplicata ratione $AC$ ad $AO$ ſive $\frac{1}{2}$ $AB$. *Q. E. D.*

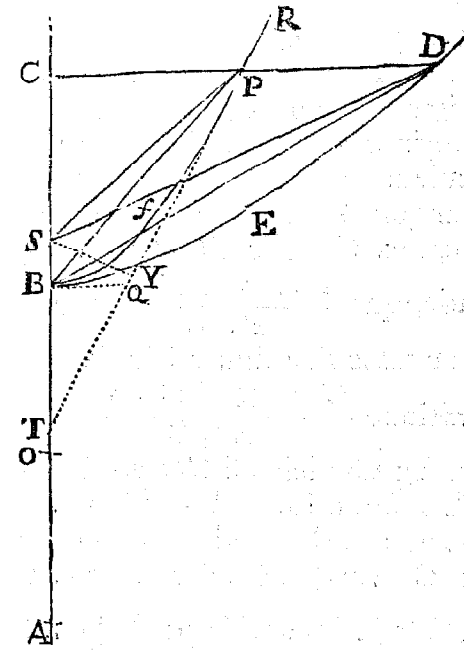



*Corol.* 1. Punctis $B$ & $S$ coeuntibus, fit $TC$ ad $TS$ ut $AC$ ad $AO$.

*Corol.* 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in Circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

## PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

*Si Figura* B E D *Parabola eſt, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* B C *Circulum uniformiter deſcribere poteſt.*




Nam corporis Paraboſam *RPB* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per Corol. 7. Prop. XVI) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* Circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit Propoſitio. *Q. E. D.*

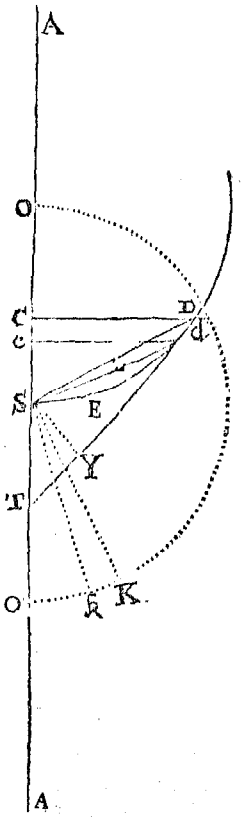
## PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

*Iiſdem poſitis, dico quod area Figuræ* D E S, *radio indefinito* S D *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* D E S *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in Circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia Figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

*Caſ.*

*Caſ.* 1. Jam ſi Figura $\mathcal{D}ES$ Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus tranſverſa diameter $AS$ in $O$, & erit $SO$ dimidium lateris recti. Et quoniam eſt $TC$ ad $T\mathcal{D}$ ut $Cc$ ad $\mathcal{D}d$, & $T\mathcal{D}$ ad $TS$ ut $C\mathcal{D}$ ad $S\Upsilon$, erit ex æquo $TC$ ad $TS$ ut $C\mathcal{D}\times Cc$ ad $S\Upsilon\times\mathcal{D}d$. Sed per Corol. 1. Prop. XXXIII, eſt $TC$ ad $TS$ ut $AC$ ad $AO$, puta ſi in coitu punctorum $\mathcal{D}$, $d$ capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo $AC$ eſt ad ($AO$ ſeu) $SK$ ut $C\mathcal{D}\times Cc$ ad $S\Upsilon\times\mathcal{D}d$. Porro corporis deſcendentis velocitas in $C$ eſt ad velocitatem corporis Circulum intervallo $SC$ circa centrum $S$ deſcribentis in ſubduplicata ratione $AC$ ad ($AO$ vel) $SK$ (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis Circulum $OKk$ in ſubduplicata ratione $SK$ ad $SC$ per Cor. 6. Prop. IV, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola $Cc$ ad arcum $Kk$ in ſubduplicata ratione $AC$ ad $SC$, id eſt in ratione $AC$ ad $C\mathcal{D}$. Quare eſt $C\mathcal{D}\times Cc$ æquale $AC\times Kk$, & propterea $AC$ ad $SK$ ut $AC\times Kk$ ad $S\Upsilon\times\mathcal{D}d$, indeq; $SK\times Kk$ æquale $S\Upsilon\times\mathcal{D}d$, & $\frac{1}{2}SK\times Kk$ æquale $\frac{1}{2}S\Upsilon\times\mathcal{D}d$, id eſt area $KSk$ æqualis areæ $S\mathcal{D}d$. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ $KSk$, & $S\mathcal{D}d$, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*



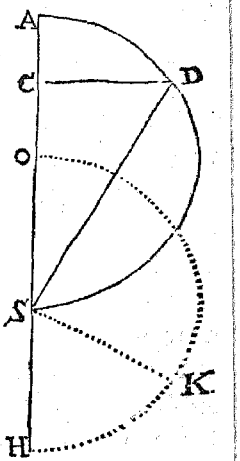

*Caſ.* 2. Quod ſi Figura $\mathcal{D}ES$ Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $C\mathcal{D}\times Cc$ ad $S\Upsilon\times\mathcal{D}d$ ut $TC$ ad $TS$, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4}C\mathcal{D}\times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2}S\Upsilon\times\mathcal{D}d$. Sed corporis cadentis velocitas in $C$ æqualis eſt velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. XXXIV) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio $SK$ deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola $Cc$ ad arcum $Kk$ (per Corol. 6. Prop. IV) eſt in ſubduplicata ratione $SK$ ad $\frac{1}{2}SC$, id eſt, in ratione $SK$ ad $\frac{1}{2}C\mathcal{D}$. Quare eſt $\frac{1}{2}SK\times Kk$ æquale $\frac{1}{4}C\mathcal{D}\times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2}S\Upsilon\times\mathcal{D}d$, hoc eſt, area $KSk$ æqualis areæ $S\mathcal{D}d$, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPO-

## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare Tempora descensus.*

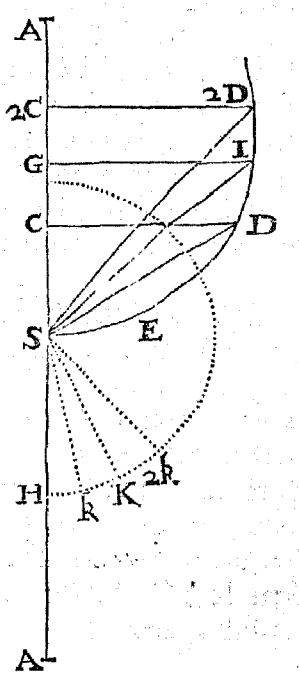
Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem Semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. Patet per Prop. xxxv, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q. E. F.*




## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

*Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire Tempora ascensus vel descensus.*

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu Parabola vertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Prop. xxxiii. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in *I* ac *D*.



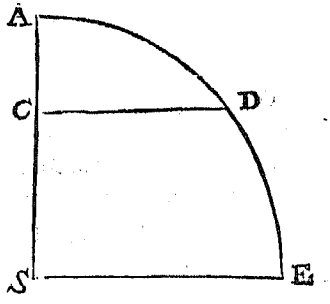

Dein

Dein junctis $SI$, $S\mathcal{D}$, fiant ſegmentis $SEIS$, $SE\mathcal{D}S$, ſectores $HSK$, $HSk$ æquales, & per Prop. xxxv, corpus $G$ deſcribet ſpatium $GC$ eodem Tempore quo corpus $K$ deſcribere poteſt arcum $Kk$. *Q. E. F.*

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

*Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.*

Cadat corpus de loco quovis $A$ ſecundum rectam $AS$; & centro virium $S$, intervallo $AS$, deſcribatur Circuli quadrans $AE$, ſitque $C\mathcal{D}$ ſinus rectus arcus cujuſvis $A\mathcal{D}$; & corpus $A$, Tempore $A\mathcal{D}$, cadendo deſcribet Spatium $AC$, inque loco $C$ acquiret Velocitatem $C\mathcal{D}$.




Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione x, quo Propoſitio xxxii, ex Propoſitione xi demonſtrata fuit.

*Corol.* 1. Hinc æqualia ſunt Tempora quibus corpus unum de loco $A$ cadendo pervenit ad centrum $S$, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem $A\mathcal{D}E$.

*Corol.* 2. Proinde æqualia ſunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

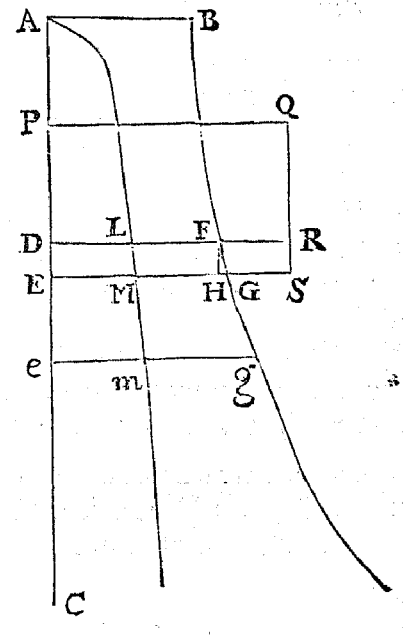
PROPO-

De Motu Corporum

## PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

*Posita cujuscunque generis Vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum Velocitas in locis singulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.*

De loco quovis $A$ in recta $ADEC$ cadat corpus $E$, deque loco ejus $E$ erigatur semper perpendicularis $EG$, vi centripetæ in loco illo ad centrum $C$ tendenti proportionalis: Sitque $BFG$ linea curva quam punctum $G$ perpetuo tangit. Coincidat autem $EG$ ipso motus initio cum perpendiculari $AB$, & erit corporis Velocitas in loco quovis $E$ ut areæ curvilineæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. I.*




In $EG$ capiatur $EM$ lateri quadrato areæ $ABGE$ reciproce proportionalis, & sit $ALM$ linea curva quam punctum $M$ perpetuo tangit, & erit Tempus quo corpus cadendo describit lineam $AE$ ut area curvilinea $ALME$. *Q. E. I.*

Etenim in recta $AE$ capiatur linea quam minima $DE$ datæ longitudinis, sitque $DLF$ locus lineæ $EMG$ ubi corpus versabatur in $D$; & si ea sit vis centripeta, ut areæ $ABGE$ latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in $D$ & $E$ scribantur V & V + I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2 V I + II, & divisim area $DFGE$ ut 2 V I + II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo $DF$ ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus

corpus cadendo describit lineolam $\mathcal{D}E$, ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{\mathcal{D}E}$, hoc est, ut longitudo $\mathcal{D}F$. Ergo Vis ipsi $\mathcal{D}F$ vel $EG$ proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate descendat quæ sit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola $\mathcal{D}E$ describatur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ $ABF\mathcal{D}$ latus quadratum inverse; sitque $\mathcal{D}L$, atque adeo area nascens $\mathcal{D}LME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $\mathcal{D}LME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV) Tempus totum quo linea $AE$ describitur ut area tota $AME$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si $\mathcal{P}$ sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco $\mathcal{D}$ æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco $\mathcal{D}$, & in perpendiculari $\mathcal{D}F$ capiatur $\mathcal{D}R$, quæ sit ad $\mathcal{D}F$ ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco $\mathcal{D}$, & compleatur rectangulum $\mathcal{P}\mathcal{D}R\mathcal{Q}$, eique æqualis abscindatur area $ABF\mathcal{D}$; erit $A$ locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $\mathcal{D}RSE$, cum sit area $ABF\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}FGE$ ut VV ad 2 V I, adeoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}RSE$ ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ $\mathcal{D}F$, $\mathcal{D}R$, adeoque ut areæ nascentes $\mathcal{D}FGE$, $\mathcal{D}RSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABF\mathcal{D}$, $\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

*Corol.* 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque $\mathcal{D}$ data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco $e$, erigendo ordinatam $eg$, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco $\mathcal{D}$ ut est latus quadratum rectanguli $\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ area curvilinea $\mathcal{D}Fge$ vel aucti, si locus $e$ est loco $\mathcal{D}$ inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius $\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D}$, id est, ut $\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D} \pm \text{vel} - \mathcal{D}Fge}$ ad $\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{Q}R\mathcal{D}}$.

*Corol.* 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam $em$ reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD+\text{vel}-DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam $De$ ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a $P$ & cadendo pervenit ad $D$, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam $PD$ eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam $PE$ in ſubduplicata ratione $PD$ ad $PE$, id eſt (lineola $DE$ jamjam naſcente) in ratione $PD$ ad $PD+\frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD+DE$, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam $DE$ ut $2PD$ ad $DE$, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam $DE$ ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam $De$ ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

# SECTIO VIII.

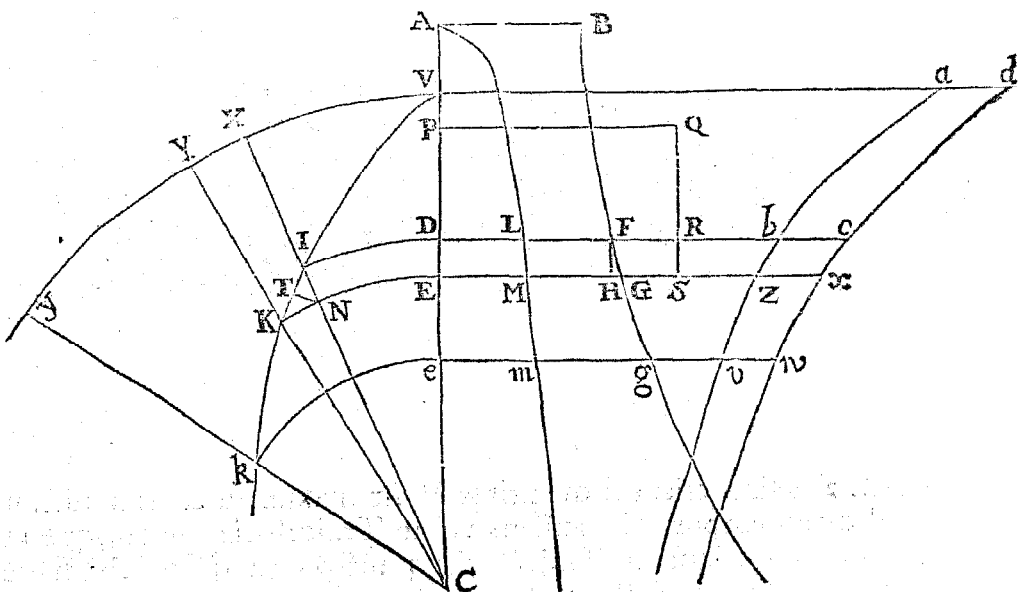
## *De Inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.*

### PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.*

Deſcendat corpus aliquod ab $A$ per $D$, $E$, ad centrum $C$, & moveatur corpus aliud a $V$ in linea curva $VIKk$. Centro $C$ intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici $DI$, $EK$ rectæ $AC$ in $D$ & $E$, curvæque $VIK$ in $I$ & $K$ occurrentes. Jungatur $IC$ occurrens ipſi $KE$ in $N$; & in $IK$ demittatur perpendiculum $NT$; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum $DE$ vel $IN$ quam minimum, & habeant corpora in $D$ & $I$ velocitates

tes æquales. Quoniam diſtantiæ $CD$, $CI$ æquantur, erunt vires centripetæ in $D$ & $I$ æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas $DE$, $IN$; & ſi vis una $IN$ (per Legum Corol. 2.) reſolvatur in duas $NT$ & $IT$, vis $NT$, agendo ſecundum lineam $NT$ corporis curſui $ITk$ perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietque ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera $IT$, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in $D$ & $I$ acceleratione æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium $DE$, $IN$, $IK$, $IT$, $NT$ rationes primæ) ſunt ut lineæ $DE$, $IT$: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus $DE$ & $IK$ deſcribuntur, ob æqualitatem velocita-




tum ſunt ut viæ deſcriptæ $DE$ & $IK$, adeoque acceleraciones, in curſu corporum per lineas $DE$ & $IK$, ſunt ut $DE$ & $IT$, $DE$ & $IK$ conjunctim, id eſt ut $DE$ *quad* & $IT \times IK$ *rectangulum*. Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt $IN$ *quadrato*, hoc eſt, æquale $DE$ *quadrato*; & propterea acceleraciones in tranſitu corporum a $D$ & $I$ ad $E$ & $K$ æquales generantur. Æquales igitur ſunt cor-

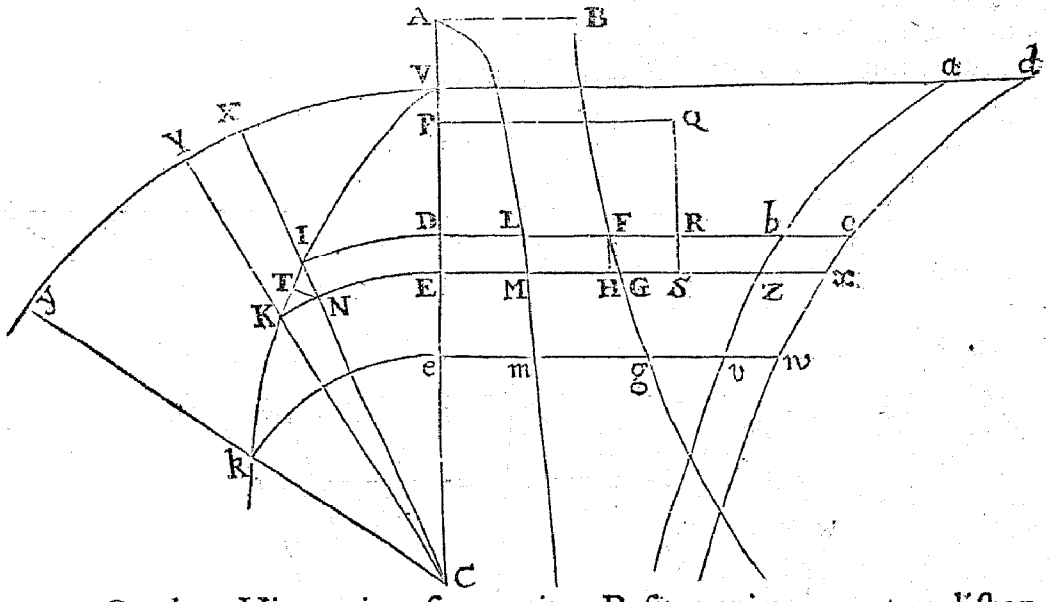
 porum

De Motu Corporum

porum velocitates in $E$ & $K$ & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q. E. D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa $NT$. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.




*Corol.* 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet $A^{n-1}$, cujus Index $n-1$ est numerus quilibet $n$ unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX) est in hac ipsa ratione.

PROPO-

## PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

*Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.*

Tendat vis quælibet ad centrum $C$ & invenienda sit Trajectoria $VITKk$. Detur Circulus $VXT$ centro $C$ intervallo quovis $CV$ descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli $ID$, $KE$ Trajectoriam secantes in $I$ & $K$ rectamque $CV$ in $D$ & $E$. Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos $KE$, $VT$ in $N$ & $X$, tum rectam $CKT$ occurrentem circulo $VXT$ in $T$. Sint autem puncta $I$ & $K$ sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab $V$ per $I$, $T$ & $K$ ad $k$; sitque punctum $A$ locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco $D$ velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in $I$; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, lineola $IK$, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ $ABFD$, & triangulum $ICK$ tempori proportionale dabitur, adeoque $KN$ erit reciproce ut altitudo $IC$, id est, si detur quantitas aliqua $Q$, & altitudo $IC$ nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius $Q$ ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est $IK$ ad $KN$, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut $IK$ ad $KN$, & $ABFD$ ad ZZ ut $IK\,q.$ ad $KN\,q.$ & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut $IN$ *quad* ad $KN$ *quad*, adeoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad (Z seu) $\frac{Q}{A}$ ut $IN$ ad $KN$, & propterea A $\times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $TX \times XC$ sit ad A $\times KN$ ut $CX\,q$ ad AA, erit rectangulum $TX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\,quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo $DF$ capiantur semper $Db$, $Dc$ ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\,quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ $ab$, $cd$ quas

puncta

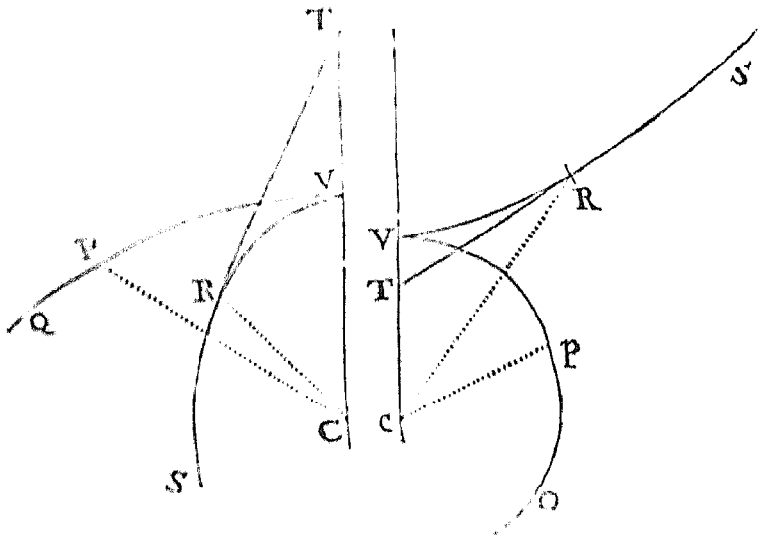
puncta $b$, $c$ perpetuo tangunt; deque puncto $V$ ad lineam $AC$ erigatur perpendiculum $Vad$ abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDcd$, & erigantur etiam ordinatæ $Ez$, $Ex$: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $Dbz E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$, seu triangulo $ICK$; & rectangulum $Dc \times IN$ seu $Dcx E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$, seu triangulo $XCY$; hoc est, quoniam arearum $VDba$, $VIC$ æquales semper sunt nascentes particulæ $Dbz E$, $ICK$, & arearum $VDcd$, $VCX$ æquales semper sunt nascentes particulæ $Dcx E$, $XCY$, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ $VIC$, adeoque tempori proportionalis, & area genita $VDcd$ æqualis Sectori genito $VCX$. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco $V$, dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo $CD$ vel $CI$; & area $VDcd$, eique æqualis Sector $VCX$ una cum ejus angulo $VCI$. Datis autem angulo $VCI$ & altitudine $CI$ datur locus $I$, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apsides puncta illa in quibus recta $IC$ per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam $VIK$: id quod fit ubi rectæ $IK$ & $NK$ æquantur, adeoque ubi area $ABFD$ æqualis est $ZZ$.

*Corol.* 2. Sed & angulus $KIN$, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam $IC$, ex data corporis altitudine $IC$ expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut $KN$ ad $IK$, id est, ut $Z$ ad latus quadratum areæ $ABFD$.

*Corol.* 3. Si centro $C$ & vertice principali $V$ describatur Sectio quælibet Conica $VRS$, & a quovis ejus puncto $R$ agatur Tangens $RT$ occurrens axi infinite producto $CV$ in puncto $T$; dein juncta $CR$ ducatur recta $CP$, quæ æqualis sit abscissæ $CT$, angulumque $VCP$ Sectori $VCR$ proportionalem constituat; tendat autem ad centrum $C$ Vis centripeta Cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco $V$ justa cum Velocitate secundum lineam rectæ $CV$ perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum $P$ perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio $CVRS$ Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum Velocitate exeat de loco $V$, & perinde ut incæperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

lique aſcendere, Figura $CVRS$ vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt Trajectoria augendo vel minuendo angulum $VCP$ in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam verſa, 



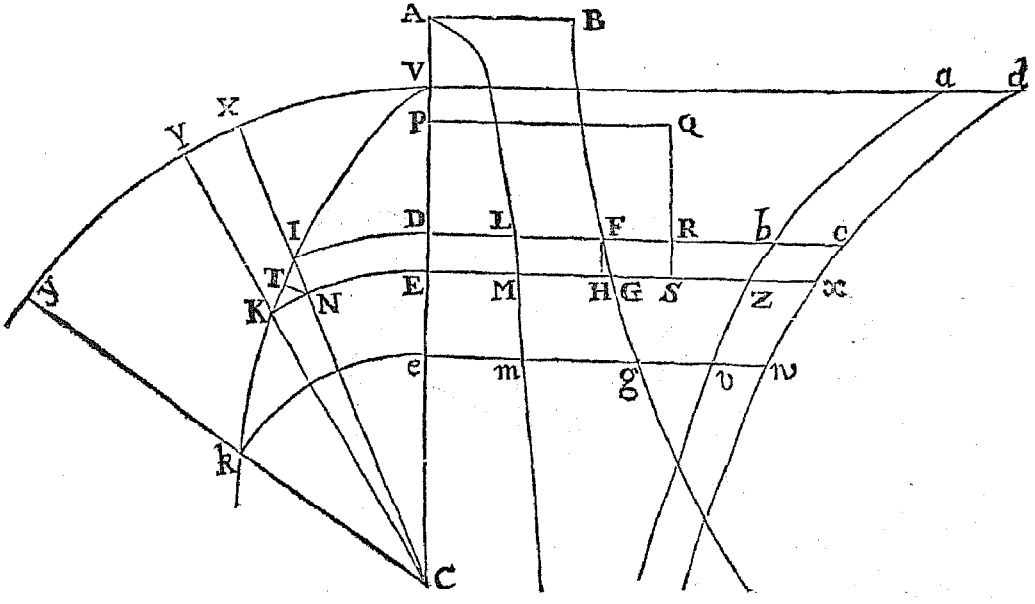

aſcendet corpus oblique in Trajectoria $VPQ$ quæ invenitur capiendo angulum $VCP$ Sectori Elliptico $CVRC$ proportionalem, & longitudinem $CP$ longitudini $CT$ æqualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex Propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratia miſſam facio.

## PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

*Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum Velocitate ſecundum datam rectam egreſſi.*

Stantibus quæ in tribus Propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco $I$ ſecundum lineolam $IT$, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco $P$ cadendo acquirere poſſet in $D$: ſitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum

primum urgetur in *I*, ut *D R* ad *D F*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *C k* describatur circulus *k e* occurrens rectæ *P D* in *e*, & erigantur curvarum *A L Mm*, *B F Gg*, *a b z v*, *d c x w*




ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *P D R Q*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *B F Gg*, *A L Mm*, per constructionem Problematis XXVII, & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo *C I T* datur proportio nascentium *I K*, *K N*, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis *a b z v*, *d c x w*: adeoque completo tempore quovis *D b v e*, datur tum corporis altitudo *C e* vel *C k*, tum area *D c w e*, eique æqualis Sector *X C y*, angulusque *I C k* & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undeque eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

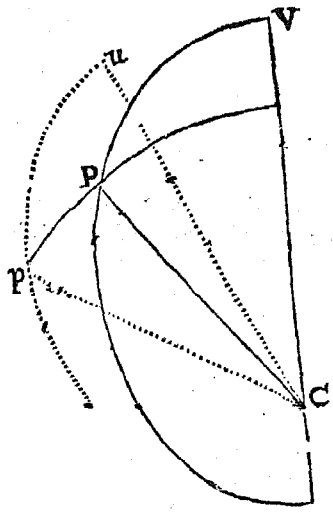
SECTIO

# SECTIO IX.

## *De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apſidum.*

## PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

*Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quieſcente.*



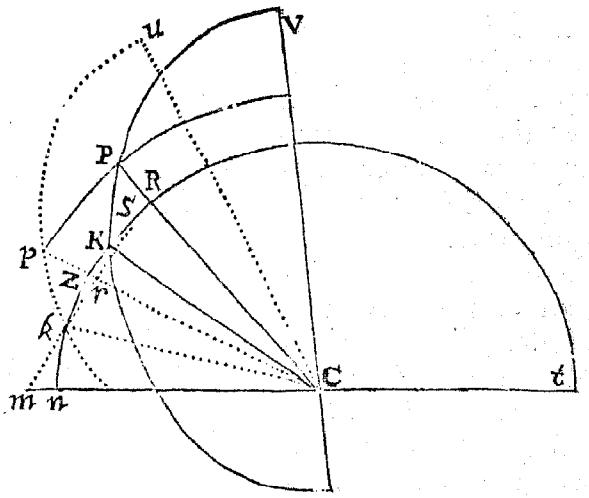

In Orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & area quam linea *Cp* deſcribit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis Vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in Curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque Figura *uCp* Figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in

De Motu Corporum

perimetro Figuræ revolventis $uCp$, eodemque tempore describet arcum ejus $up$ quo corpus aliud $P$ arcum ipsi similem & æqualem $VP$ in Figura quiescente $VPK$ describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propositionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum $p$ describit in plano immobili, & solvetur Problema. *Q. E. F.*

## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

*Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.*




Partibus Orbis quiescentis $VP$, $PK$ sunto similes & æquales Orbis revolventis partes $up$, $pk$; & punctorum $P$, $K$ distantia intelligatur esse quam minima. A puncto $k$ in rectam $pC$ demitte perpendiculum $kr$, idemque produc ad $m$, ut sit $mr$ ad $kr$ ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$. Quoniam corporum altitudines $PC$ & $pC$, $KC$ & $kC$ semper æquantur, manifestum est quod linearum $PC$ & $pC$ incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis $P$ & $p$ existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas $PC$, $pC$ determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis $PC$, $pC$ perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis $p$ erit ad motum transversum corporis $P$, ut motus angularis lineæ $pC$, ad motum angularem lineæ $PC$, id est, ut

ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$. Igitur eodem tempore quo corpus $P$ motu ſuo utroque pervenit ad punctum $K$, corpus $p$ æquali in centrum motu æqualiter movebitur a $p$ verſus $C$, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea $mkr$, quæ per punctum $k$ in lineam $pC$ perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea $pC$, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum $P$ acquirit a linea $PC$, ut eſt motus tranſverſus corporis $p$ ad motum tranſverſum corporis alterius $P$. Quare cum $kr$ æqualis ſit diſtantiæ quam corpus $P$ acquirit a linea $PC$, ſitque $mr$ ad $kr$ ut angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis $p$ ad motum tranſverſum corporis $P$, manifeſtum eſt quod corpus $p$ completo illo tempore reperietur in loco $m$. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora $p$ & $P$ æqualiter ſecundum lineas $pC$ & $PC$ moventur, adeoque æqualibus Viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum $pCn$ ad angulum $pCk$ ut eſt angulus $VCp$ ad angulus $VCP$, ſitque $nC$ æqualis $kC$, & corpus $p$ completo illo tempore revera reperietur in $n$; adeoque Vi majore urgetur quam corpus $P$, ſi modo angulus $mCp$ angulo $kCp$ major eſt, id eſt ſi Orbis $upk$ vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus qua linea $CP$ in conſequentia fertur; & Vi minore ſi Orbis tardius movetur in antecedentia. Eſtque Virium differentia ut locorum intervallum $mn$, per quod corpus illud $p$ ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro $C$ intervallo $Cn$ vel $Ck$ deſcribi intelligatur Circulus ſecans lineas $mr$, $mn$ productas in $s$ & $t$, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque $mn$ æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula $pCk$, $pCn$ dentur magnitudine, ſunt $kr$ & $mr$, earumque differentia $mk$ & ſumma $ms$ reciproce ut altitudo $pC$, adeoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciproce ut quadratum altitudinis $pC$. Eſt & $mt$ directe ut $\frac{1}{2}mt$, id eſt, ut altitudo $pC$. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens $mn$, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis $pC$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc differentia virium in locis $P$ & $p$ vel $K$ & $k$, eſt ad vim qua corpus motu Circulari revolvi poſſit ab $R$ ad $K$ eodem tempore quo corpus $P$ in Orbe immobili deſcribit arcum $PK$, ut lineola naſcens $mn$ ad ſinum verſum arcus naſcentis $RK$, id eſt

ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad $rk$ quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus $VC\mathcal{P}$ ad angulum $VCp$, ut GG − FF ad FF. Et propterea, ſi centro $C$ intervallo quovis $C\mathcal{P}$ vel $Cp$ deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti $V\mathcal{P}C$, quam corpus $\mathcal{P}$ tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus $\mathcal{P}$ in Orbe immobili & corpus $p$ in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area $V\mathcal{P}C$ uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG − FF ad FF. Namque Sector ille & area $pCk$ ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

*Corol.* 2. Si Orbis $V\mathcal{P}K$ Ellipſis ſit umbilicum habens $C$ & Apſidem ſummam $V$; eique ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis $upk$, ita ut ſit ſemper $pC$ æqualis $\mathcal{P}C$, & angulus $VCp$ ſit ad angulum $VC\mathcal{P}$ in data ratione G ad F; pro altitudine autem $\mathcal{P}C$ vel $pC$ ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & *contra*. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in $V$ erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad diſtantiam $CV$ ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in $V$, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide $V$, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad Circuli ſemidiametrum $CV$, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut GG − FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in $V$ quibus corpus $\mathcal{P}$ in Ellipſi immota $V\mathcal{P}K$, & corpus $p$ in Ellipſi mobili $upk$ revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine $CV$ ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili $V\mathcal{P}K$, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$

qua

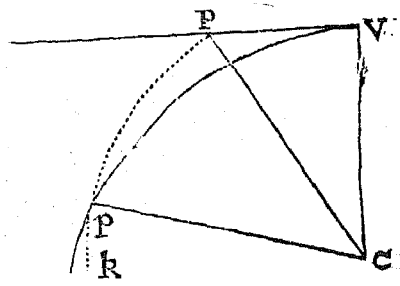
qua corpus in Ellipſi mobili *u p k* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

*Corol.* 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi Orbis immobilis *VPK* Ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *u p k*; ſitque 2 R Ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ reſpective.

*Corol.* 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi poteſt, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria *u p k* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG-VRFF}{A\,cub.}$.

*Corol.* 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

*Corol.* 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam



De Motu Corporum curvam $Vpk$. Eſt autem hæc Curva $Vpk$ eadem cum Curva illa $VPQ$ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta oblique aſcendere.

## PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

*Orbium qui ſunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apſidum.*

Problema ſolvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2, vel 3) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apſides requiruntur, & quærendo Apſides Orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum $V$ Apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima $CV$, A pro altitudine quavis alia $CP$ vel $Cp$, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum $C$ (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\,cub.}$, ſubſtituendo T − X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\,cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res Exemplis patebit.

*Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, adeoque ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, ſive (ſcribendo T − X pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3TTX + 3TXX - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad T *cub.* ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\,cub.$ ſive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut $-FF$ ad $-3TT$ seu GG ad TT ut FF ad $3TT$ & vicissim GG ad FF ut TT ad $3TT$ id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum $VCP$ (ut ita dicam) gradum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum $VCp$ gradum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

*Exempl.* 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet $A^{n-3}$ seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & $n$ significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille $A^n$ seu $\overline{T-X}^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad $T^n$ ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad $T^n$ ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad $T^{n-1}$ ut FF ad $nT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $T^{n-1}$ ad $nT^{n-1}$ id est ut 1 ad $n$; adeoque G ad F, id est angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, ut

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus $VCP$, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus $VCp$, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati $A^{n-3}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit $n$ æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit $n$ æqualis 2, adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127*gr.* 16*m.* 45*sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit $n$ æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

*Exempl.* 3. Assumentes $m$ & $n$ pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & $b$, $c$ pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\,cub.}$, id est, ut $\frac{b\text{ in }T-X^m + c\text{ in }T-X^n}{A\,cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}$ &c.

$A\,cub.$

&

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et fumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit $GG$ ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut $FF$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim $GG$ ad $FF$ ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam $CV$ ſeu T Arithmetice per Unitatem, fit $GG$ ad $FF$ ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus $VCp$ ad angulum $VCP$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus $VCP$ inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus $VCp$ inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter Apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in Series convergentes denominatorem habentes $A\ cub.$ Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

*Corol.* 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis $m$ ad numerum alium $n$, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-

dex est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deque Apside discedens, si cæperit descendere nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud, de Apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim Curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6, Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut cæperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apside ad Apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apside summa ad Apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit $m$ ad $n$ ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apsidem eandem immotam; erit $m$ ad $n$ ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{-2}$ seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apsidem eandem redierit; erit $m$ ad $n$ ut $\frac{1}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$, vel $A^{\frac{2}{4}-3}$ vel $A^{9-3}$ vel $A^{16-3}$; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut $A^{6}$ vel $A^{13}$. Denique si corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit $m$ ad $n$ ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

*Corol.* 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut $cA$, adeoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A\,cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) $b$ æqualis 1, $m$ æqualis 1, $n$ æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est $c$ esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180,7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.*

Hactenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Supereſt ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque centra

De Motu Corporum

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege Motus corporum in ſuperficiebus Curvis peractos ſubinde determinamus.

# SECTIO X.

## *De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.*

### PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

*Poſita cujuſcunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, ſecundum rectam in Plano illo datam egreſſi.*

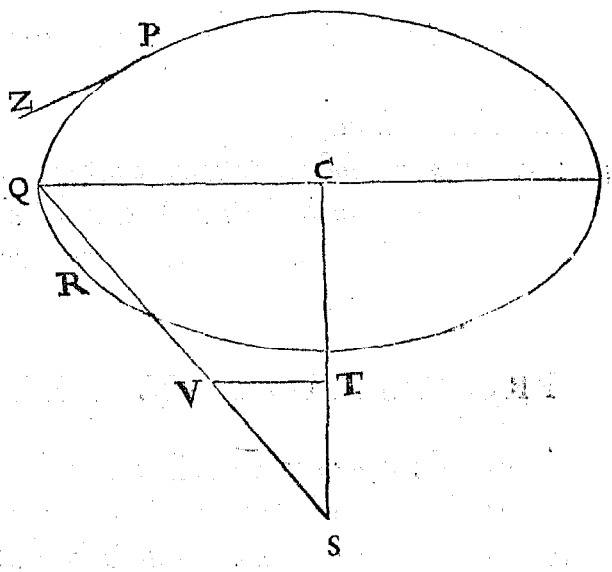
Sit $S$ centrum Virium, $SC$ diſtantia minima centri hujus a Plano dato, $P$ corpus de loco $P$ ſecundum rectam $PZ$ egrediens, $Q$ corpus idem in Trajectoria ſua revolvens, & $PQR$ Trajectoria illa, in Plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur $CQ$ $QS$, & ſi in $QS$ capiatur $SV$ proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum $S$, & agatur $VT$ quæ ſit parallela $CQ$ & occurrat $SC$ in $T$: Vis $SV$ reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires $ST$, $TV$; quarum $ST$ trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera $TV$, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus punctum $C$ in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac ſi vis $ST$ tolleretur, & corpus vi ſola $TV$ revolveretur circa centrum $C$ in ſpatio libero. Data autem

vi

vi centripeta $TV$ qua corpus $Q$ in ſpatio libero circa centrum datum $C$ revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria $PQR$ quam corpus deſcribit, tum locus $Q$ in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo $Q$; & contra. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

*Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem Temporibus abſolvent.*




Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore Propoſitione, vis $SV$ qua corpus $Q$ in plano quovis $PQR$ revolvens trahitur verſus centrum $S$ eſt ut diſtantia $SQ$; atque adeo ob proportionales $SV$ & $SQ$, $TV$ & $CQ$, vis $TV$ qua corpus trahitur verſus punctum $C$ in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia $CQ$. Vires igitur, quibus corpora in plano $PQR$ verſantia trahuntur verſus punctum $C$, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum $S$; & propterea corpora movebuntur iiſdem Temporibus, in iiſdem Figuris, in plano quovis $PQR$ circa punctum $C$, atque in ſpatiis liberis circa centrum $S$; adeoque (per Corol. 2. Prop. X, & Corol. 2. Prop. XXXVIII) Temporibus ſemper æqua-

æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

*Scholium.*

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum Virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

## PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

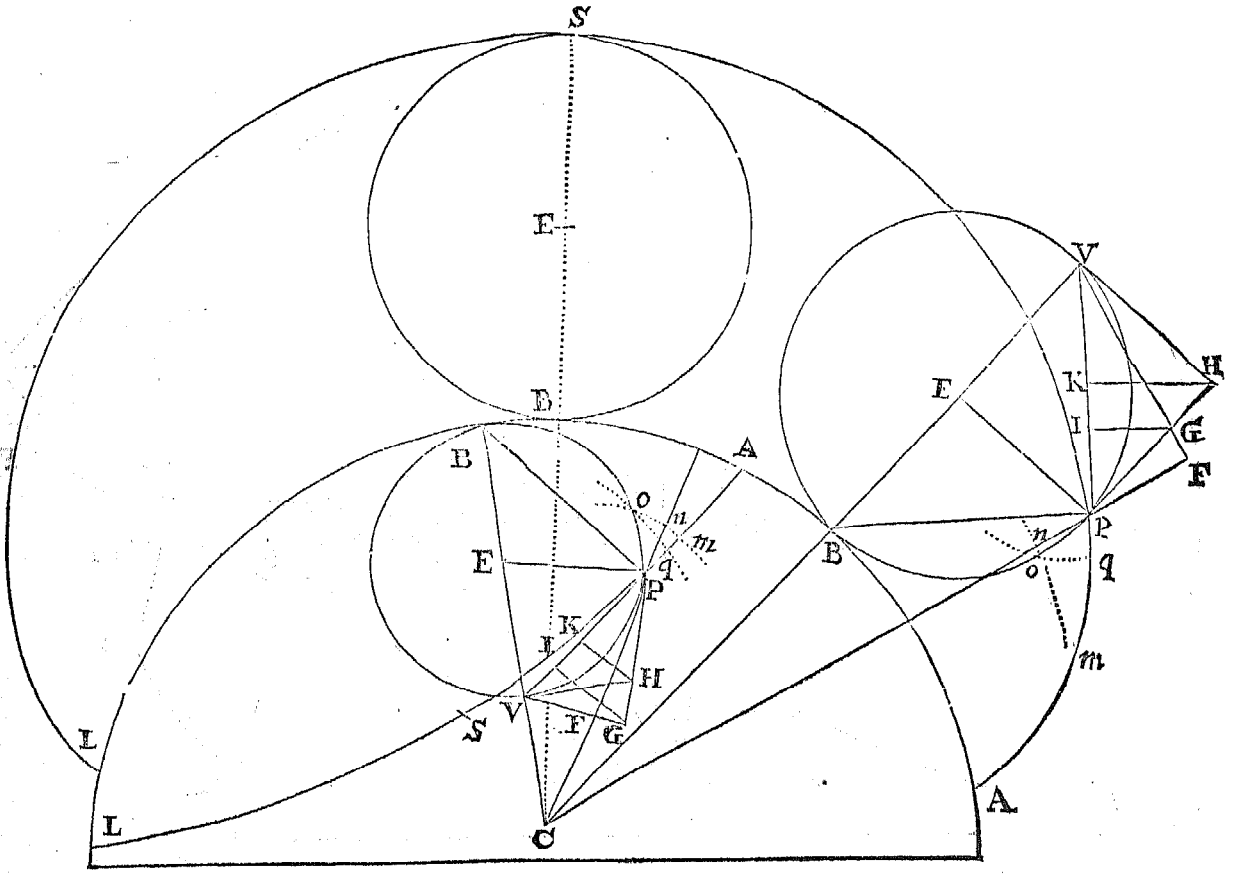
*Si Rota Globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.*

## PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

*Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.*

Sit

Sit $ABL$ Globus, $C$ centrum ejus, $BPV$ Rota ei inſiſtens, $E$ centrum Rotæ, $B$ punctum contactus, & $P$ punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo $ABL$ ab $A$ per $B$ verſus $L$, & inter eundum ita revolvi ut arcus $AB$, $PB$ ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud $P$ in perimetro Rotæ datum interea deſcribere Viam curvilineam $AP$. Sit autem $AP$ Via tota curvilinea deſcripta ex quo Rota Globum tetigit in $A$, & erit Viæ hujus longitudo $AP$ ad duplum



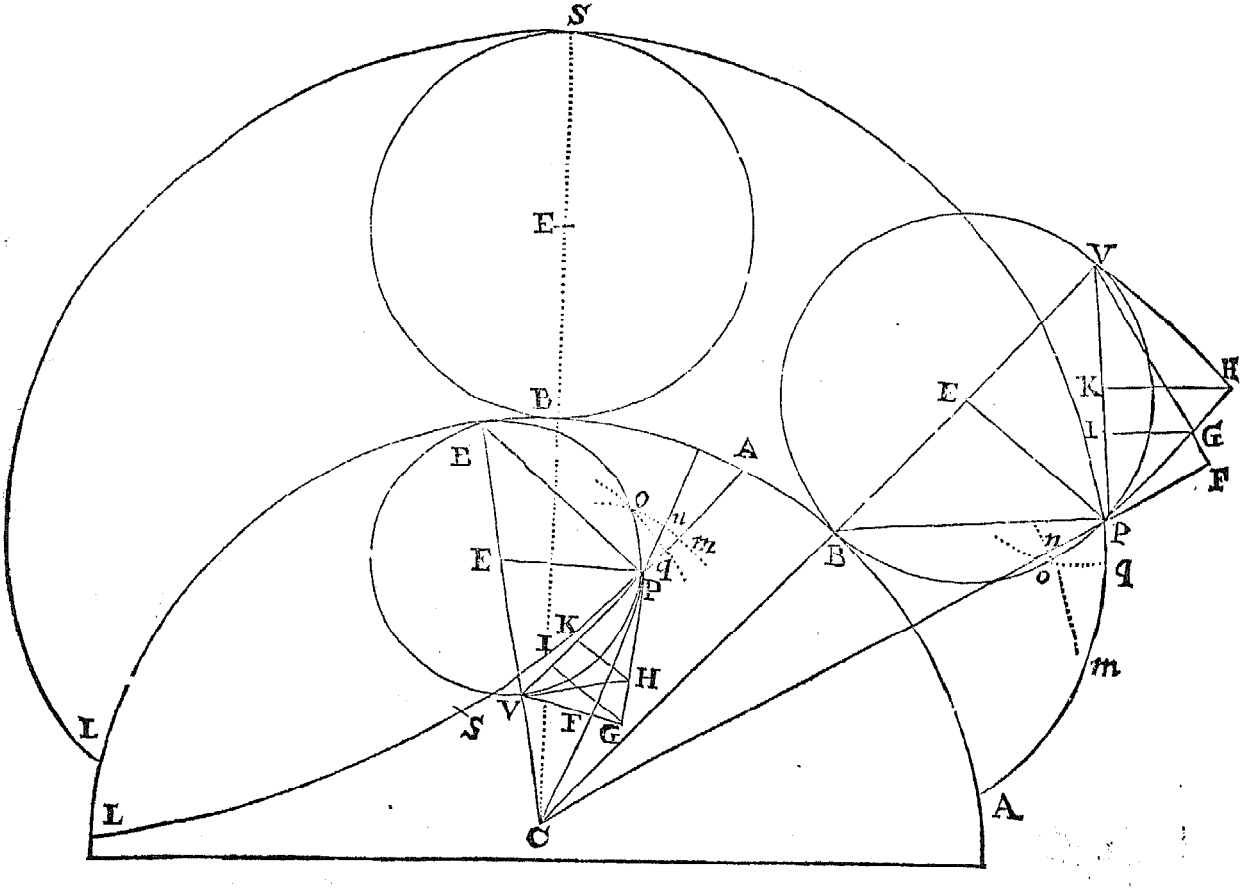

ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2CE$ ad $CB$. Nam recta $CE$ (ſi opus eſt producta) occurrat Rotæ in $V$, junganturque $CP$, $BP$, $EP$, $VP$, & in $CP$ productam demittatur normalis $VF$. Tangant $PH$, $VH$ Circulum in $P$ & $V$ concurrentes in $H$, ſecetque $PH$ ipſam $VF$ in $G$, & ad $VP$ demittantur normales $GI$, $HK$.

Centro

De Motu Corporum

Centro item $C$ & intervallo quovis deſcribatur circulus $nom$ ſecans rectam $CP$ in $n$, Rotæ perimetrum $Bp$ in $o$, & Viam curvilineam $AP$ in $m$; centroque $V$ & intervallo $Vo$ deſcribatur circulus ſecans $VP$ productam in $q$.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus $B$, manifeſtum eſt quod recta $BP$ perpendicularis eſt ad




lineam illam curvam $AP$ quam Rotæ punctum $P$ deſcribit, atque adeo quod recta $VP$ tanget hanc curvam in puncto $P$. Circuli $nom$ radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ $CP$; &, ob ſimilitudinem Figuræ evaneſcentis $Pnomq$ & Figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evaneſcentium $Pm$, $Pn$, $Po$, $Pq$,

id

id est, ratio mutationum momentanearum curvæ $AP$, rectæ $CP$, arcus circularis $BP$, ac rectæ $VP$, eadem erit quæ linearum $PV$, $PF$, $PG$, $PI$ respective. Cum autem $VF$ ad $CF$ & $VH$ ad $CV$ perpendiculares sunt, angulique $HVG$, $VCF$ propterea æquales; & angulus $VHG$ (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad $V$ & $P$ rectos) angulo $CEP$ æqualis est, similia erunt triangula $VHG$, $CEP$; & inde fiet ut $EP$ ad $CE$ ita $HG$ ad $HV$ seu $HP$ & ita $KI$ ad $KP$, & composite vel divisim ut $CB$ ad $CE$ ita $PI$ ad $PK$, & duplicatis consequentibus ut $CB$ ad $2CE$ ita $PI$ ad $PV$, atque ita adeo $Pq$ ad $Pm$. Est igitur decrementum lineæ $VP$, id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ $AP$ in data ratione $CB$ ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & $AP$, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente $BV$ radio, est $VP$ co-sinus anguli $BVP$ seu $\frac{1}{2}BEP$, adeoque $BV-VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo $AP$ est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad $CB$. *Q. E. D.*

Lineam autem $AP$ in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

*Corol.* 1. Hinc si describatur Cyclois integra $ASL$ & bisecetur ea in $S$, erit longitudo partis $PS$ ad longitudinem $VP$ (quæ duplus est sinus anguli $VBP$, existente $EB$ radio) ut $2CE$ ad $CB$, atque adeo in ratione data.

*Corol.* 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis $AS$ æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum $BV$, ut $2CE$ ad $CB$.

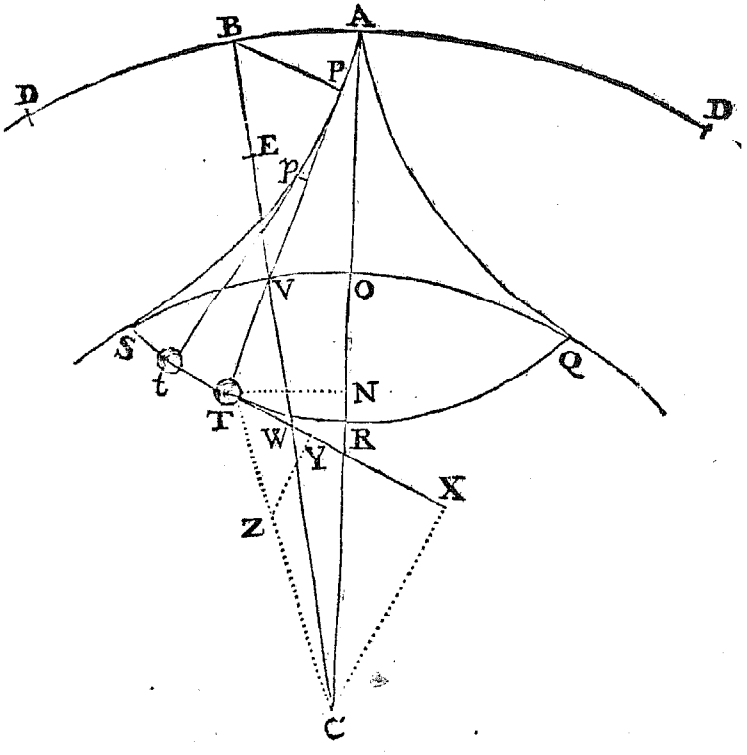
## PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

### *Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.*

Intra Globum $QVS$, centro $C$ descriptum, detur Cyclois $QRS$ bisecta in $R$ & punctis suis extremis $Q$ & $S$ superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur $CR$ bisecans arcum $QS$ in $O$, & producatur ea ad $A$, ut sit $CA$ ad $CO$ ut $CO$ ad $CR$. Centro $C$ in-

De Motu Corporum

tervallo $CA$ describatur Globus exterior $ABD$, & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter sit $AO$, describantur duæ Semicycloides $AQ$, $AS$, quæ Globum interiorem tangant in $Q$ & $S$ & Globo exteriori occurrant in $A$. A puncto illo $A$, Filo $APT$ longitudinem $AR$ æquante, pendeat corpus $T$, & ita intra Semicycloides $AQ$, $AS$ oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo $AR$,




Filum parte sui superiore $AP$ applicetur ad Semicycloidem illam $APS$ versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua $PT$ cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus $T$ oscillabitur in Cycloide data $QRS$. *Q. E. F.*

Occurrat enim Filum $PT$ tum Cycloidi $QRS$ in $T$, tum circulo $QOS$ in $V$, agaturque $CV$; & ad Fili partem rectam $PT$, e punctis extremis $P$ ac $T$, erigantur perpendicula $PB$, $TW$, occurrentia rectæ $CV$ in $B$ & $W$. Patet, ex constructione & genesi similium Figurarum $AS$, $SR$, perpendicula illa $PB$, $TW$ abscindere de $CV$ longitudines $VB$, $VW$ Rotarum diametris $OA$, $OR$ æquales. Est igitur $TP$ ad $VP$ (duplum sinum anguli $VBP$ existente $\frac{1}{2}BV$ radio)

dio) ut $BW$ ad $BV$, seu $AO+OR$ ad $AO$, id est (cum sint $CA$ ad $CO$, $CO$ ad $CR$ & divisim $AO$ ad $OR$ proportionales,) ut $CA+CO$ ad $CA$ vel, si bisecetur $BV$ in $E$, ut $2CE$ ad $CB$. Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili $PT$ æquatur semper Cycloidis arcui $PS$, & Filum totum $APT$ æquatur semper Cycloidis arcui dimidio $APS$, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini $AR$. Et propterea vicissim si Filum manet semper æquale longitudini $AR$ movebitur punctum $T$ in Cycloide data $QRS$. *Q. E. D.*

*Corol.* Filum $AR$ æquatur Semicycloidi $AS$, adeoque ad semidiametrum $AC$ eandem habet rationem quam similis illi Semicycloidis $SR$ habet ad semidiametrum $CO$.

## PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

*Si Vis centripeta tendens undique ad Globi centrum* C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem $TW$ infinite productam cadat perpendiculum $CX$ & jungatur $CT$. Quoniam vis centripeta qua corpus $T$ impellitur versus $C$ est ut distantia $CT$, atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes $CX$, $TX$, quarum $CX$ impellendo corpus directe a $P$ distendit filum $PT$ & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera $TX$, urgendo corpus transversim seu versus $X$, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo $TX$, id est, (ob datas $CV$, $WV$ iisque proportionales $TX$, $TW$,) ut longitudo $TW$, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis $TR$. Pendulis igitur duobus $APT$, $Apt$ de perpendiculo $AR$ inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi $TR$, $tR$. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describen-

De Motu Corporum dæ & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum $AR$. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo $R$, per eoſdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ $RS$ & $R\mathcal{Q}$ ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

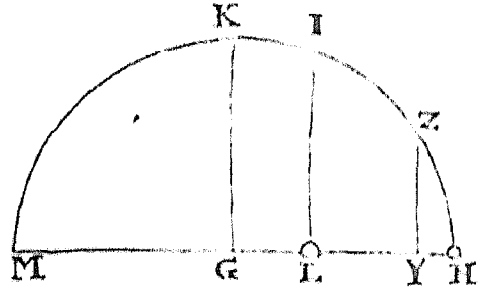
*Corol.* Vis qua corpus $T$ in loco quovis $T$ acceleratur vel retartur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem Pondus in loco altiſſimo $S$ vel $\mathcal{Q}$, ut Cycloidis arcus $TR$ ad ejuſdem arcum $SR$ vel $\mathcal{Q}R$.

## PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

*Deſinire & Velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.*

Centro quovis $G$, intervallo $GH$ Cycloidis arcum $RS$ æquante, deſcribe ſemicirculum $HKMG$ ſemidiametro $GK$ biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum $G$, ſitque ea in perimetro $HIK$ æqualis vi centripetæ in perimetro Globi $\mathcal{Q}OS$ (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum $T$ dimittitur e loco ſupremo $S$, cadat corpus aliquod $L$ ab $H$ ad $G$: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis $TR$, $LG$ ſemper proportionales, atque adeo, ſi æquantur $TR$ & $LG$, æquales in locis $T$ & $L$; patet corpora illa deſcribere ſpatia $ST$, $HL$ æqualia ſub initio, adeoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus deſcribit arcum $ST$ eſt ad tempus oſcil-

oſcillationis unius, ut arcus $II$ (tempus quo corpus $II$ perveniet ad $L$) ad ſemiperipheriam $IIKM$ (tempus quo corpus $II$ perveniet ad $M$.) Et velocitas corporis penduli in loco $T$ eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo $R$, (hoc eſt, velocitas corporis $II$ in loco $L$ ad velocitatem ejus in loco $G$, ſeu incrementum momentaneum lineæ $IIL$ ad incrementum momentaneum lineæ $IIG$, arcubus $II$, $IK$ æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata $LI$ ad radium $GK$, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad $SR$. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.




Oſcillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diverſis intra Globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam Vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi Vis abſoluta Globi cujuſvis $QOS$ dicatur V, Vis acceleratrix qua Pendulũ urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia Corporis penduli a centro illo & Vis abſoluta Globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola $IT$, quæ ſit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, deſcriberetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis $TZ$ circumferentiæ occurrens in $Z$, arcus naſcens $IZ$ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens $IZ$ in ſubduplicata ratione rectanguli $GIT$, adeoque ut $\sqrt{GII \times CO \times V}$. Unde Tempus oſcillationis integræ in Cycloide $QRS$ (cum ſit ut ſemiperipheria $IKM$, quæ oſcillationem illam integram denotat, directe, utque arcus $IZ$, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſe) fiet ut $GII$ directe & $\sqrt{GII \times CO \times V}$ inverſe, hoc eſt, ob æquales $GII$ & $SR$, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. I.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque Oſcillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum Viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione longitudinis Fili directe, & ſubduplicata ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi

DE MOTU CORPORUM

Globi inverſe, & ſubduplicata ratione Vis abſolutæ Globi etiam inverſe. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc etiam Oſcillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi Rotæ, qua Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi tranſiens, & Oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per Caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quavis $QRS$ ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

*Corol.* 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, Viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* Et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius.* Sed & Deſcenſus gravium, tempore Oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

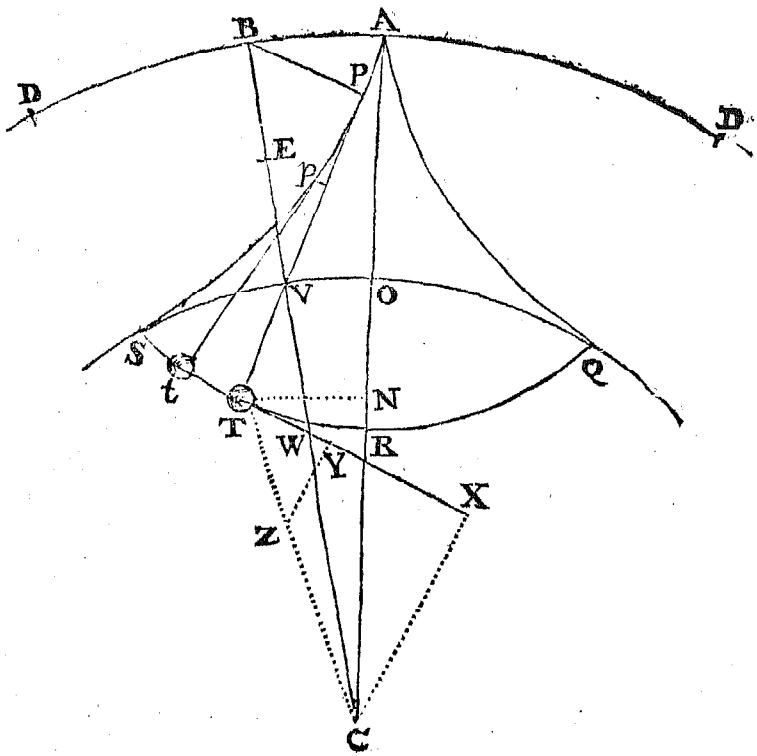
Aptantur autem Propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu Clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos Oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PROPO-

## PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

*Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.*

Oſcilletur corpus $T$ in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis ſit $OR$ tranſiens per virium centrum $C$. Agatur $TX$ quæ curvam illam in corporis loco quovis $T$ contingat, inque hac tangente $TX$




capiatur $TY$ æqualis arcui $TR$. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innoteſcit. De puncto $Y$ educatur recta $YZ$ tangenti perpendicularis. Agatur $CT$ perpendiculari illi occurrens in $Z$, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ $TZ$. *Q. E. I.*

Nam

Nam si vis, qua corpus trahitur de $T$ versus $C$, exponatur per rectam $TZ$ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires $TY$, $YZ$; quarum $YZ$ trahendo corpus secundum longitudinem Fili $PT$, motum ejus nil mutat, vis autem altera $TY$ motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda $TR$, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si corpus $T$ Filo rectilineo $AT$ a centro $A$ pendens, describat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus $TR$ ad ejus sinum $TN$: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas $TZ$, $AR$, similia erunt triangula $ATN$, $ZTY$; & propterea $TZ$ erit ad $AT$ ut $TY$ ad $TN$; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam $AT$) vis $TZ$, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis $AT$, ut arcus $TR$ ipsi $TY$ æqualis ad arcus illius sinum $TN$.

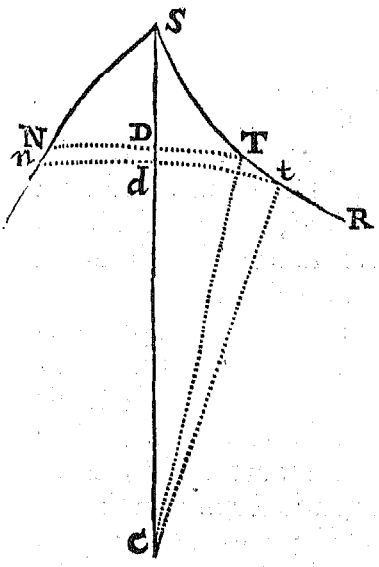
*Corol.* 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu $TR$ & radio $AR$ ad sinum $TN$, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

## PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora Vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.*

Descendat corpus de loco quovis $S$ per lineam quamvis curvam $STtR$, in plano per virium centrum $C$ transeunte datam. Jungatur $CS$ & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque $Dd$ partium

partium illarum aliqua. Centro $C$, intervallis $C\mathcal{D}$, $Cd$ describantur circuli $\mathcal{D}T$, $dt$, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in $T$ & $t$. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine $CS$ de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine $CT$, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam $Tt$, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli $tTC$) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata $\mathcal{D}N$ ad rectam $CS$ per punctum $\mathcal{D}$ perpendicularis, & ob datam $\mathcal{D}d$ erit rectangulum $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}N$, hoc est area $\mathcal{D}Nnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si $SNn$ sit curva illa linea quam punctum $N$ perpetuo tangit, erit area $SN\mathcal{D}S$ proportionalis tempori quo corpus descendendo describit lineam $ST$; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*



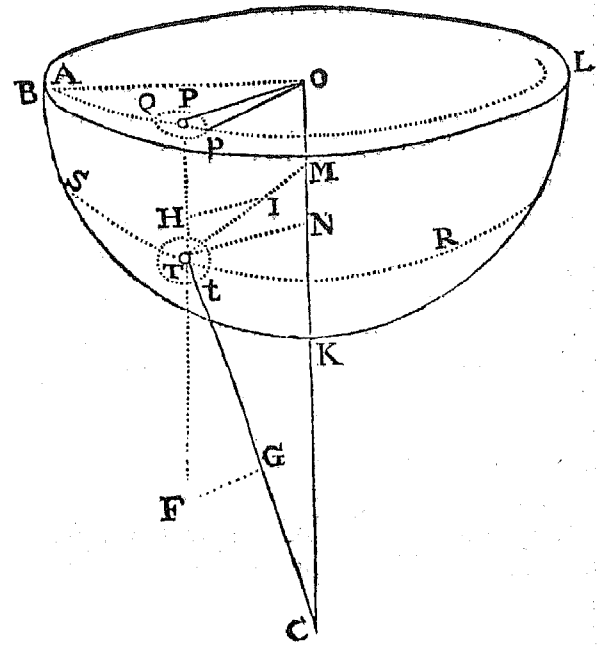

## PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

*Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.*

Sit $BSKL$ superficies curva, $T$ corpus in ea revolvens, $STtR$ Trajectoria quam corpus in eadem describit, $S$ initium Trajectoriæ, $OMNK$ axis superficiei curvæ, $TN$ recta a corpore in axem perpendicularis, $OP$ huic parallela & æqualis a puncto $O$ quod in axe datur educta, $AP$ vestigium Trajectoriæ a puncto $P$ in lineæ volubilis $OP$ plano $AOP$ descriptum, $A$ vestigii initium puncto $S$ respondens, $TC$ recta a corpore ad centrum ducta; $TG$ pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum $C$ proportionalis; $TM$ recta ad superficiem curvam perpendicularis, $TI$ pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem viciſſimque urgetur versus $M$

De Motu Corporum

a ſuperficie, proportionalis; $PHTF$ recta axi parallela per corpus tranſiens, & $GF$, $IH$ rectæ a punctis $G$ & $I$ in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demiſſæ. Dico jam quod area $AOP$, radio $OP$ ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis $TG$ (per Legum Corol: 2.) reſolvitur in vires $TF$, $FG$; & vis $TI$ in vires $TH$, $HI$: Vires autem $TF$, $TH$ agendo ſecundum lineam $PF$ plano $AOP$ perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus, hoc eſt, motus puncti $P$ quo Trajectoriæ veſtigium $AP$ in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires $TF$, $TH$ tollerentur, & corpus ſolis viribus $FG$, $HI$ agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano $AOP$, vi centripeta ad centrum $O$ tendente & ſummam virium $FG$ & $HI$ æquante, deſcriberet curvam $AP$. Sed vi tali deſcribitur area $AOP$ (per Prop. 1.) tempori proportionalis. *Q.E.D.*




*Corol.* Eodem argumento ſi corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta $CO$ data tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam $ST$; foret area $AOP$ tempori ſemper proportionalis.

## PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

*Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curva cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt Trajectoria quam corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, data cum Velocitate, verſus plagam in ſuperficie illa datam egreſſum.*

Stanti-

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco $S$ in Trajectoriam inveniendam $STtR$; &, ex data ejus velocitate in altitudine $SC$, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine $TC$. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam $Tt$, ſitque $Pp$ veſtigium ejus in plano $AOP$ deſcriptum. Jungatur $Op$, & Circelli centro $T$ intervallo $Tt$ in ſuperficie curva deſcripti ſit $PpQ$ veſtigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione Circellum, dabitur Ellipſis illa $PpQ$. Cumque area $POp$ ſit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur $Op$ poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio $p$, una cum angulo $OPp$, in quo Trajectoriæ veſtigium $APp$ ſecat lineam $OP$. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud $APp$, eadem methodo qua curva linea $VIKk$, in Propoſitione XLI, ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis $P$ erigendo ad planum $AOP$ perpendicula $PT$ ſuperficiei curvæ occurrentia in $T$, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta $T$. *Q. E. I.* Liber Primus.

# SECTIO XI.

## *De Motu Corporum Viribus centripetis ſe mutuo petentium.*

Hactenus expoſui Motus corporum attractorum ad centrum Immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo Motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

## PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

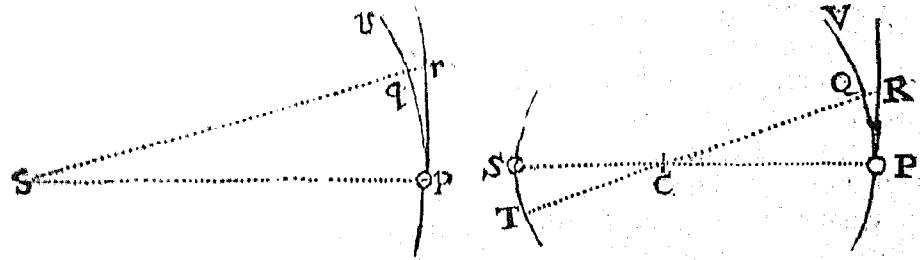
*Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuo, Figuras ſimiles.*

Sunt enim diſtantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminos ſuos communi motu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, Figuras circum eoſdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quieſcunt vel motu quovis non angulari moventur) deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt Figuræ quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

*Si corpora duo Viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt Figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iiſdem deſcribi.*

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis




*SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & Curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, deſcribit,

deſcribit, erit ſimilis & æqualis Curvis quas corpora $S$, $P$ deſcribunt circum ſe mutuo: proindeque (per Theor. xx) ſimilis Curvis $ST$ & $PQV$, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum $C$: id adeo quia proportiones linearum $SC$, $CP$ & $SP$ vel $sp$ ad invicem dantur.

*Cas.* 1. Commune illud gravitatis centrum $C$, per Legum Corollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inque $s$ & $p$ locentur corpora duo, immobile in $s$, mobile in $p$, corporibus $S$ & $P$ ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ $PR$ & $pr$ Curvas $PQ$ & $pq$ in $P$ & $p$, & producantur $CQ$ & $sq$ ad $R$ & $r$. Et, ob ſimilitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit $RQ$ ad $rq$ ut $CP$ ad $sp$, adeoque in data ratione. Proinde ſi vis qua corpus $P$ verſus corpus $S$, atque adeo verſus centrum intermedium $C$ attrahitur, eſſet ad vim qua corpus $p$ verſus centrum $s$ attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus $PR$, $pr$ ad arcus $PQ$, $pq$, per intervalla ipſis proportionalia $RQ$, $rq$; adeoque vis poſterior efficeret ut corpus $p$ gyraretur in Curva $pqv$, quæ ſimilis eſſet Curvæ $PQV$, in qua vis prior efficit ut corpus $P$ gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione $CP$ ad $sp$, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum $S$ & $s$, $P$ & $p$, & æqualitatem diſtantiarum $SP$, $sp$) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius $p$ trahatur per intervallum majus $rq$, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) ſpatia, ipſo motus initio deſcripta, ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis $p$ eſſe ad velocitatem corporis $P$ in ſubduplicata ratione diſtantiæ $sp$ ad diſtantiam $CP$, eo ut temporibus quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione deſcribantur arcus $pq$, $PQ$, qui ſunt in ratione integra: Et corpora $P$, $p$ viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia $C$ & $s$ Figuras ſimiles $PQV$, $pqv$, quarum poſterior $pqv$ ſimilis eſt & æqualis Figuræ quam corpus $P$ circum corpus mobile $S$ deſcribit. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoque corpora deſcribent

bent circum se mutuo Figuras easdem ac prius, & propterea Figuræ *p q v* similes & æquales. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc corpora duo Viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales Figuræ describuntur, sunt Vires distantiæ proportionales.

*Corol.* 2. Et corpora duo Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. xi, xii, xiii) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ describuntur. Et vice versa, si tales Figuræ describuntur, Vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

*Corol.* 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

## PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

*Corporum duorum* S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum esse ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum se mutuo describunt Figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namque, ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes $PQ$ & $pq$ describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum $CP$ & $SP$ vel $sp$, hoc est, in subduplicata ratione corporis $S$ ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes $PQ$ & $pq$ describuntur, hoc est, tempora tota quibus Figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO-

## PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

*Si corpora duo* S *&* P, *Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema ſuperius) forent in ſubduplicata ratione corporis $S$ ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipſeos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio $S$ ad $S+P$ eſt triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipſeos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & $S$ ad $S+P$. Et inverſe, axis principalis Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & $S$. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

*Si corpora duo Viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto Viribus iiſdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.*

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

dium, adeoque eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.*

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur ac ſi a corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per Hypotheſin; & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. XXV,) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.*

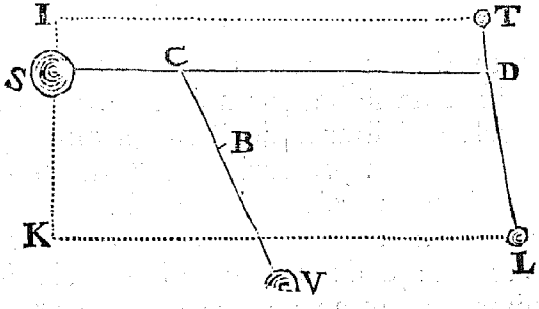
Ex

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

*Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter ſe.*

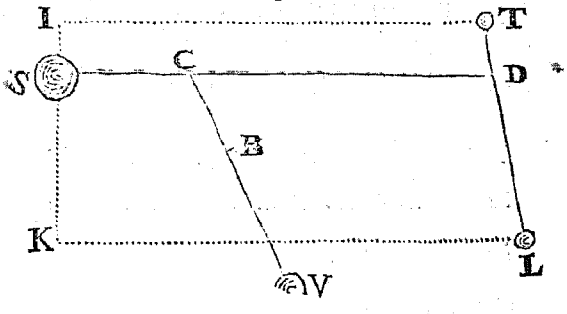
Ponantur primo corpora duo $T$ & $L$ commune habentia gravitatis centrum $D$. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipſes centra habentes in $D$, quarum magnitudo ex Problemate V, innoteſcit.




Trahat jam corpus tertium $S$ priora duo $T$ & $L$ viribus acceleratricibus $ST, SL$, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis $ST$ (per Legum Cor. 2.) reſolvitur in vires $SD, DT$; & vis $SL$ in vires $SD, DL$. Vires autem $DT, DL$, quæ ſunt ut ipſarum ſumma $TL$, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora $T$ & $L$ ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum $T$ & $L$, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis $DT$ ac $DL$ proportionales, ut prius, ſed

De Motu Corporum

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. IV) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices $SD$ & $SD$, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas $TI$, $LK$, ipſi $DS$ parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam $IK$; quam ductam concipe per medium corporis $S$, & lineæ $DS$ perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam $IK$ acceſſus faciendo ut Syſtema corporum $T$ & $L$ ex una parte, & corpus $S$ ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum $C$. Tali motu corpus $S$ (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ $CS$ proportionalium, tendit verſus centrum $C$) deſcribit Ellipſin circa idem $C$; & punctum $D$, ob proportionales $CS$, $CD$, deſcribet Ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem $T$ & $L$ viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas $TI$ & $LK$ (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile $D$ Ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*




Addatur jam corpus quartum $V$, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum $C$ Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis $B$ deſcribere; manentibus motibus priorum corporum $T$, $L$ & $S$ circa centra $D$ & $C$, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ubi corpora $T$ & $L$ trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum $B$, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PRO-

## PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.



*Corpora plura, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.*

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt ut corpora, ſecundum Legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

*Cas.* 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſque errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſque donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, abſque errore qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

*Cas.* 2. Fingamus jam Syſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Syſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Syſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum,

De Motu Corporum

nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsin fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

*Corol.* 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

*Corol.* 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

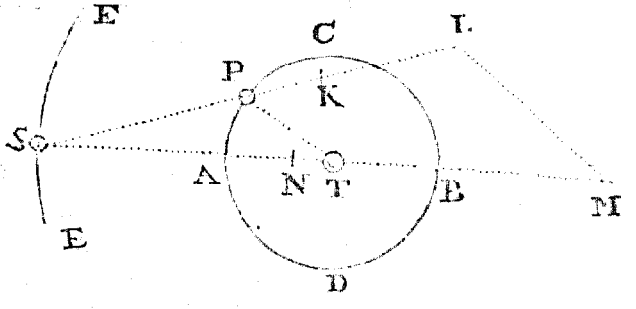
*Corol.* 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni movcantur; manifestum est, quod eædem

eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter & ſecundum lineas parallelas quamproxime. Lætis Pariter.

## PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

*Si Corpora tria, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.*

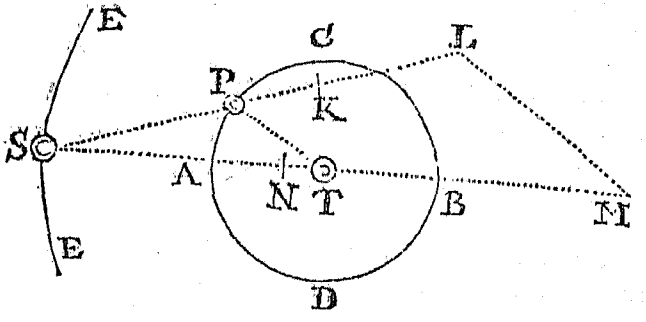
Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.




*Cas.* 1. Revolvantur corpora minora $P$ & $S$ in eodem plano circa maximum $T$, quorum $P$ deſcribat Orbem interiorem $PAB$, & $S$ exteriorem $SE$. Sit $SK$ mediocris diſtantia corporum $P$ & $S$; & corporis $P$ verſus $S$ attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione $SK$ ad $SP$ capiatur $SL$ ad $SK$, & erit $SL$ attractio acceleratrix corporis $P$ verſus $S$ in diſtantia quavis $SP$. Junge $PT$, eique parallelam age $LM$ occurrentem $ST$ in $M$, & attractio $SL$ reſolvetur (per Legum Corol 2.) in attractiones $SM$, $LM$. Et ſic urgebitur corpus $P$ vi acceleratrice triplici: una

De Motu Corporum

una tendente ad $T$ & oriunda a mutua attractione corporum $T$ & $P$. Hac vi ſola corpus $P$ circum corpus $T$, ſive immotum ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio $PT$, temporibus proportionales, & Ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis $T$. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3 Theor. XXI. Vis altera eſt attractionis $LM$, quæ quoniam tendit a $P$ ad $T$, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ $PT$ reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. XI, & per Corol. 2. Theor. XXI) vis qua Ellipſis circa umbilicum $T$ deſcribitur tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ $PT$ reciproce proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis $PAB$ aberret a forma Ellipſeos umbilicum habentis in $S$; idque eo magis quo major eſt aberratio ab hac proportione; atque adeo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ $LM$ ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia $SM$, trahendo corpus $P$ ſecundum lineam ipſi $ST$ parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a $P$ in $T$, quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus $P$, radio $TP$, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero $PAB$ aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a $P$ ad $T$, tum etiam quod non ſit proportionalis quadrato diſtantiæ $PT$. Quibus intellectis, manifeſtum eſt quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis $PAB$ tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.




Expo-

Exponatur corporis $T$ attractio acceleratrix verſus $S$ per lineam $SN$; & ſi attractiones acceleratrices $SM$, $SN$ æquales eſſent; hæ, trahendo corpora $T$ & $P$ æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per Legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio $SN$ minor eſſet attractione $SM$, tolleret ipſa attractionis $SM$ partem $SN$, & maneret pars ſola $MN$, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio $SN$ major eſſet attractione $SM$, oriretur ex differentia ſola $MN$ perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem $SN$ reducitur ſemper attractio tertia ſuperior $SM$ ad attractionem $MN$, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita $PAB$ ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio $MN$ vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum $P$ & $T$ attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus $S$, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio $SN$ non eſt nulla, neque minor minima attractionum omnium $SM$, ſed inter attractionum omnium $SM$ maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione $SK$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Revolvantur jam corpora minora $P$, $S$ circa maximum $T$ in planis diverſis; & vis $LM$, agendo ſecundum lineam $PT$ in plano Orbitæ $PAB$ ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus $P$ de plano Orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera $NM$, agendo ſecundum lineam quæ ipſi $ST$ parallela eſt, (atque adeo, quando corpus $S$ verſatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ $PAB$;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus $P$ de plano ſuæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum $P$ & $T$ ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans $MN$, adeoque minima evadet ubi $MN$ eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio $SN$ non eſt multo major, neque multo minor attractione $SK$. *Q. E. D.*

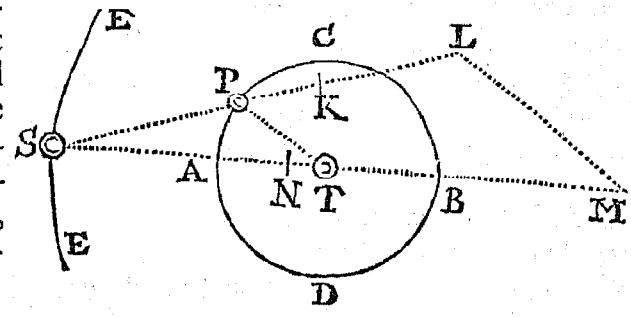
*Corol.* 1. Ex his facile colligitur quod, ſi corpora plura minora $P$, $S$, $R$, &c. revolvantur circa maximum $T$, motus corporis intimi $P$ minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum $T$ pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cætera a ſe mutuo.

*Corol.*

*Corol.* 2. In Syſtemate vero trium corporum $T$, $P$, $S$, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus $P$, radio $PT$, aream circa corpus $T$ velocius deſcribet prope Conjunctionem $A$ & Oppoſitionem $B$, quam prope Quadraturas $C$, $D$. Namque vis omnis qua corpus $P$ urgetur & corpus $T$ non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam $PT$ accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis $NM$. Hæc in tranſitu corporis $P$ a $C$ ad $A$ tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad $D$ in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad $B$, & ultimo in antecedentia tranſeundo a $B$ ad $C$.

*Corol.* 3. Et eodem argumento patet quod corpus $P$, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppoſitione quam in Quadraturis.

*Corol.* 4. Orbita corporis $P$, cæteris paribus, curvior eſt in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis $KL$ vel $NM$, in Conjunctione & Oppoſitione, contraria eſt vi qua corpus $T$ trahit corpus $P$, adeoque vim illam minuit; corpus autem $P$ minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus $T$.




*Corol.* 5. Unde corpus $P$, cæteris paribus, longius recedet a corpore $T$ in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu Excentricitatis. Nam ſi Orbita corporis $P$ excentrica ſit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi Apſides ſunt in Syzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus $P$, ad Apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore $T$ in Syzygiis quam in Quadraturis.

*Corol.* 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis $T$, qua corpus $P$ retinetur in Orbe ſuo, augetur in Quadraturis per additionem vis $LM$, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis $KL$, & ob magnitudinem vis $KL$, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii $TP$ directe & ratione duplicata tempo-

ris

ris periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis $KL$, adeoque tempus periodicum, ſi maneat Orbis radius $TP$, augeri, idque in ſubduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus $P$ minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro $T$; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui $S$, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur ſimul ac diminuetur Radius $TP$ per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione ſubduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis $T$, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui $S$, diminuitur vel augetur.

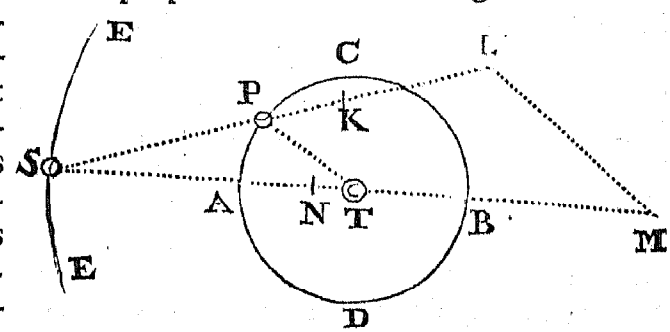
*Corol.* 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore $P$ deſcriptæ Axis, ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus $P$ urgetur in corpus $T$ in Quadraturis, ubi vis $MN$ evanuit, componitur ex vi $LM$ & vi centripeta qua corpus $T$ trahit corpus $P$. Vis prior $LM$, ſi augeatur diſtantia $PT$, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ $PT$, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux, ſeu Apſis ſumma, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus $P$ urgetur in corpus $T$ differentia eſt inter vim qua corpus $T$ trahit corpus $P$ & vim $KL$; & differentia illa, propterea quod vis $KL$ augetur quamproxime in ratione diſtantiæ $PT$, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ $PT$, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis $KL$ in Syzygiis ſit quaſi duplo major quam vis $LM$ in Quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim $KL$, transferetque Augem ſingulis revolutionibus in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Syſtema corporum duorum $T$, $P$ corporibus pluribus $S$, $S$, $S$, &c. in Orbe $ESE$ conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus

De Motu Corporum

bus actio ipsius $T$ minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiæ.

*Corol.* 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ $TP$, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam $KL$ seu $NM-LM$, progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam $LM$. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

*Corol.* 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente




in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum $T$, $P$, $S$, ubi Apsides Orbis $PAB$ sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est,

&

& maxima fit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in Quadraturis, ratio prope Apſides minor eſt & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires $LM$ in Quadraturis additæ viribus corporis $T$ componunt vires in ratione minore, & vires $KL$ in Syzygiis ſubductæ viribus corporis $T$ relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter Apſides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

*Corol.* 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis $EST$ immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt quod, ex viribus $NM$, $ML$, quæ ſunt cauſa illa tota, vis $ML$ agendo ſemper ſecundum planum Orbis $PAB$, nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis $NM$, ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſque $P$ de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt Quadraturas, id eſt, inter $C$ & $A$, $D$ & $B$, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis $P$ a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in Nodo ſubſequente quam in præcedente.

dente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi ſunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſque ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

*Corol.* 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi ſunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idque in partem verſus *S*, in tranſitu ſuo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a Nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad Nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius; adeoque, ſemper vel retrogradi vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

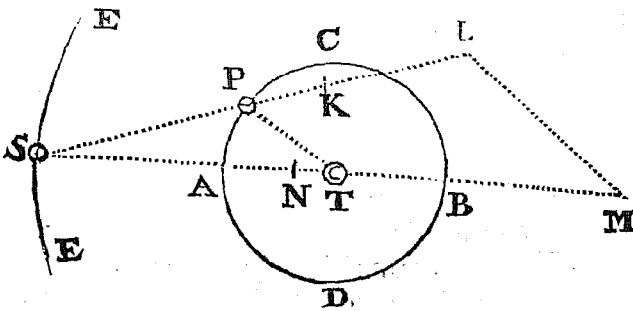
*Corol.* 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti Errores ſunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppoſitione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

*Corol.* 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum Syſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

*Corol.* 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præcedentibus

dentibus Corollariis: manifeſtum eſt quod effectus illi omnes, ſtante corporum $T$ & $P$ Syſtemate, & mutatis tantum diſtantia $ST$ & vi abſoluta corporis $S$, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis $S$ & ratione triplicata inverſa diſtantiæ $ST$. Unde ſi Syſtema corporum $T$ & $P$ revolvatur circa corpus longinquum $S$, vires illæ $NM$, $ML$ & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis $S$ proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ $NM$, $ML$ & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis $S$ e corpore $T$ ſpectati, & vice verſa. Namque hæ rationes eædem ſunt atque ratio ſuperior compoſita.

*Corol.* 15. Et quoniam ſi, manentibus Orbium $ESE$ & $PAB$ forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum $S$ & $T$ vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc eſt, vis corporis $T$ qua corpus $P$ de recto tramite in Orbitam $PAB$ deflectere, & vis corporis $S$ qua corpus idem $P$ de Orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

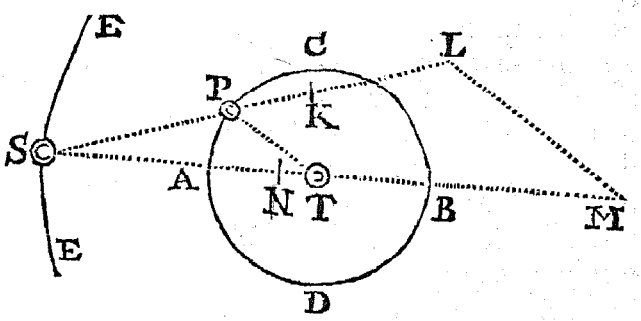



*Corol.* 16. Unde, ſi dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires $NM$, $ML$, cæteris ſtantibus, ſunt ut Radius $TP$, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis $P$ conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis $P$; & hinc errores angulares e centro $T$ ſpectati (id eſt, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis $P$, ut quadratum temporis revo-

De Motu Corporum

revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum $T$, $P$, $S$ Syſtemate, ubi $P$ circum $T$ ſibi propinquum, & $T$ circum $S$ longinquum revolvitur, errores angulares corporis $P$, de centro $T$ apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius $P$, ut quadratum temporis periodici corporis $P$ directe & quadratum temporis periodici corporis $T$ inverſe. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut quadratum temporis periodici corporis $P$ directe & quadratum temporis periodici corporis $T$ inverſe. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis $PAB$ non mutantur motus Augis & Nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

*Corol.* 17. Cum autem linea $LM$ nunc major ſit nunc minor quam radius $PT$, exponatur vis mediocris $LM$ per radium illum $PT$; & erit hæc ad vim mediocrem $SK$ vel $SN$ (quam exponere licet per $ST$) ut longitudo $PT$ ad longitudinem $ST$. Eſt autem vis mediocris $SN$ vel $ST$, qua corpus $T$ retinetur in Orbe ſuo circum $S$, ad vim qua corpus $P$ retinetur in Orbe ſuo circum $T$, in ratione compoſita ex ratione radii $ST$ ad radium $PT$, & ratione duplicata temporis periodici corporis $P$ circum $T$ ad tempus periodicum corporis $T$ circum $S$. Et ex æquo, vis mediocris $LM$, ad vim qua corpus $P$ retinetur in Orbe ſuo circum $T$ (quave corpus idem $P$, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile $T$ ad diſtantiam $PT$ revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia $PT$, datur vis mediocris $LM$; & ea data, datur etiam vis $MN$ quamproxime per analogiam linearum $PT$, $MN$.




*Corol.* 18. Iiſdem legibus quibus corpus $P$ circum corpus $T$ revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem $T$ ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori $T$ concentricum; & ſingulæ Annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis $P$ peragendo,

agendo, propius accedent ad corpus $T$, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppoſitione ipſarum & corporis $S$, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus ſeu interſectiones ejus cum plano Orbitæ corporis $\overset{10}{T}$ vel $T$, quieſcent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur.

*Corol.* 19. Fingas jam Globum corporis $T$, ex materia non fluida conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam ſuperficies Globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis $S$ nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum ſuum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de curſu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus $S$, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem $LM$ trahet aquam deorſum in Quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad Syzygias; & vis $KL$ trahet eandem ſurſum in Syzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſque ad Quadraturas.

*Corol.* 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed Oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque Oſcillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in Syzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum uſque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione

tione maximus decreſcentis inclinationis motus ſit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

*Corol.* 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

*Corol.* 22. Et inde viciſſim, ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus ſit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: Generabunt hi eundem motum circularem

cularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu (per Corol. 21) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.



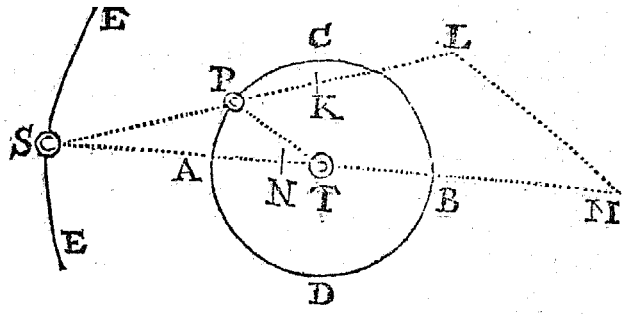
## PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

*Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis $S$ attractiones verſus $T$ & $P$ componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum $T$ & $P$ commune gravitatis centrum $C$, quam in corpus maximum $T$, quæque quadrato diſtantiæ $SC$ magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ $ST$: ut rem perpendenti facile conſtabit.

## PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

*Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*




Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis noviſſimæ liquet centrum in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Propos. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magisque agitatur.

*Corol.*

*Coról.* Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ deſcriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

## PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

*In Syſtemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt Abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex Hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æqua-

les. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

*Corol.* 2. Eodem argumento, ſi ſingula Syſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum Legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

*Corol.* 3. In Syſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII collatum cum hujus Corol. 1.

## *Scholium.*

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem Attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per Spiritus emiſſos ſe invicem agitantium, ſive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem Impulſus, non ſpecies virium

&

De Motu Corporum

# SECTIO VI.

## *De Motu & Reſiſtentia Corporum Funependulorum.*

### PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

*Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.*

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

*Corol.* 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

*Corol.* 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

*Corol.*

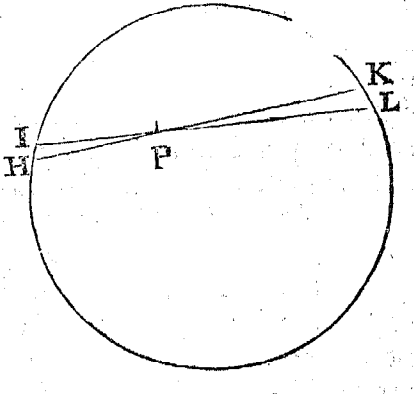
& qualitates Phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequuntur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus Phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur.

# SECTIO XII.

## *De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

*Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*




Sit $HIKL$ ſuperficies illa Sphærica, & $P$ corpuſculum intus conſtitutum. Per $P$ agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ $HK$, $IL$, arcus quam minimos $HI$, $KL$ intercipientes; &, ob triangula $HPI$, $LPK$ (per Corol. 3. Lem. VII) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis $HP$, $LP$ proportionales; & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis ad $HI$ & $KL$, rectis per punctum $P$ tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus $P$ exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æquali-

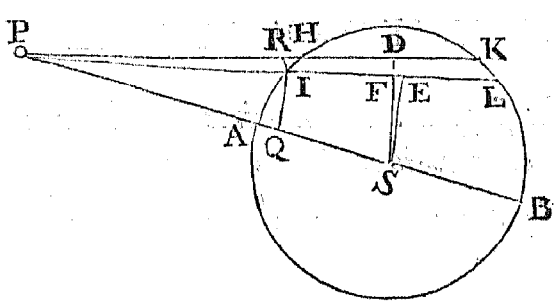
De Motu Corporum

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus $P$ nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

*Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.*

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ superficies Sphæricæ, centris $S$, $s$, diametris $AB$, $ab$ descriptæ, & $P$, $p$ corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ




$PHK$, $PIL$, $phk$, $pil$, auferentes a circulis maximis $AHB$, $ahb$, æquales arcus $HK$, $hk$ & $IL$, $il$: Et ad eas demittantur perpendicula $SD$, $sd$; $SE$, $se$; $IR$, $ir$; quorum $SD$, $sd$ secent $PL$, $pl$ in $F$ & $f$: Demittantur etiam ad diametros perpendicula $IQ$, $iq$. Evanescant anguli $DPE$, $dpe$: & (ob æquales $DS$ & $ds$, $ES$ & $es$,) lineæ $PE$, $PF$ & $pe$, $pf$ & lineolæ $DF$, $df$ pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis $DPE$, $dpe$ simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit $PI$ ad $PF$ ut $RI$ ad $DF$, & $pf$ ad $pi$ ut $df$ vel $DF$ ad $ri$; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut $RI$ ad $ri$, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII,) ut arcus $IH$ ad arcum $ih$. Rursus $PI$ ad $PS$ ut $IQ$ ad $SE$, & $ps$ ad $pi$ ut $se$ vel $SE$ ad $iq$; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut $IQ$ ad $iq$. Et conjunctis rationibus $PI$ *quad.* $\times pf \times ps$ ad $pi$ *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus

arcus $IH$ convolutione ſemicirculi $AKB$ circa diametrum $AB$ deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus $ih$ convolutione ſemicirculi $akb$ circa diametrum $ab$ deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula $P$ & $p$, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas $PS$, $ps$ ad centra tendunt, ut $PI$ ad $PQ$, & $pi$ ad $pq$; id eſt (ob ſimilia triangula $PIQ$ & $PSF$, $piq$ & $psf$) ut $PS$ ad $PF$ & $ps$ ad $pf$. Unde, ex æquo, ſit attractio corpuſculi hujus $P$ verſus $S$ ad attractionem corpuſculi $p$ verſus $s$, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut $ps$ *quad.* ad $PS$ *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum $KL$, $kl$ deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut $ps$ *quad.* ad $PS$ *quad.*; inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper $sd$ æqualem $SD$ & $se$ æqualem $SE$, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ denſitas, tum ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.*

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & diſtantias eorum a Sphærarum centris proportionales eſſe diametris Sphærarum reſpective, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe.

verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi corpuſcula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

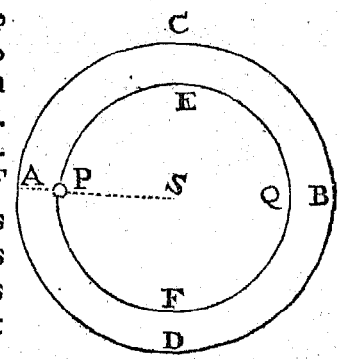
*Corol.* 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

*Corol.* 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqualiter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus corpuſcula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

## PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.*

In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Prop. LXX, quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII, hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*




### *Scholium.*

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili ſit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per Puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

## PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

*Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutam attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.*

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione Sphærarum.

*Corol.* 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

*Corol.* 3. Si corpuſculum, extra Sphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

## PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

*Si ad Sphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.*

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV) & propterea

terea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Prop. LXXIV) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ eſt in eadem ratione. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Attractiones Sphærarum, verſus alias Sphæras homogeneas, ſunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum quas attrahunt.

*Corol.* 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius, eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

*Corol.* 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

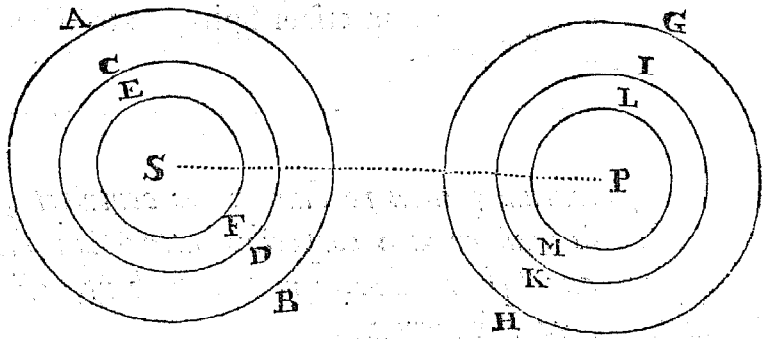
*Corol.* 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

## PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

*Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæra una attrahit aliam ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.*

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ ſimilares $AB$, $CD$, $EF$, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem

denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis quas Sphæra tota ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunque creſcat vel decreſcat: &, ad-




dita materia non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes.

*Corol.* 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

*Corol.* 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

*Corol.* 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

*Corol.* 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

*Corol.* 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

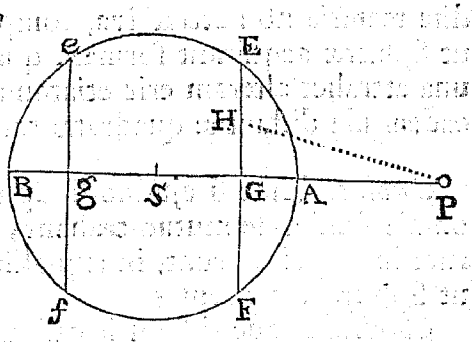
*Corol.* 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

*Corol.* 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

*Corol.* 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

## PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.*




*Cas.* 1. Sit $AEBF$ Sphæra, $S$ centrum ejus, $P$ corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, $EF$, $ef$ plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; $G$, $g$ intersectiones planorum & axis, & $H$ punctum quodvis in plano $EF$. Puncti $H$ vis centripeta in corpusculum $P$, secundum lineam $PH$ exercita, est ut distantia $PH$; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam $PG$, seu versus centrum $S$, ut longitudo $PG$. Igitur punctorum omnium in plano $EF$, hoc est plani totius vis, qua corpusculum $P$ trahitur versus centrum $S$, est ut numerus punctorum ductus in distantiam $PG$: id est, ut contentum sub plano ipso $EF$ & distantia illa $PG$. Et similiter vis plani $ef$, qua corpusculum $P$ trahitur

trahitur versus centrum $S$, est ut planum illud ductum in distantiam suam $Pg$, sive ut huic æquale planum $EF$ ductum in distantiam illam $Pg$; & summa virium plani utriusque ut planum $EF$ ductum in summam distantiarum $PG+Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam $PS$, hoc est, ut duplum planum $EF$ ductum in distantiam $PS$, vel ut summa æqualium planorum $EF+ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam $PS$, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui $S$ a corpusculo $P$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Trahat jam corpusculum $P$ Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia $PS$. *Q. E. D.*

*Cas.* 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris $P$; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

*Cas.* 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

*Cas.* 5. Locetur jam corpusculum $p$ intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani $ef$ in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia $pg$; & vis contraria plani $EF$ ut contentum sub plano illo & distantia $pG$; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in $pS$ distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium $EF$, $ef$ in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in $pS$ distantiam corpusculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

*Cas.* 6. Et si ex corpusculis innumeris $p$ componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum $pS$. *Q. E. D.*

PRO-

## PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.*

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVI ex Propoſitione LXXV demonſtrata fuit.

*Corol.* Quæ ſuperius in Propoſitionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis jam deſcriptæ, ſuntque corpora attracta Sphæræ conditionis ejuſdem.

### *Scholium.*

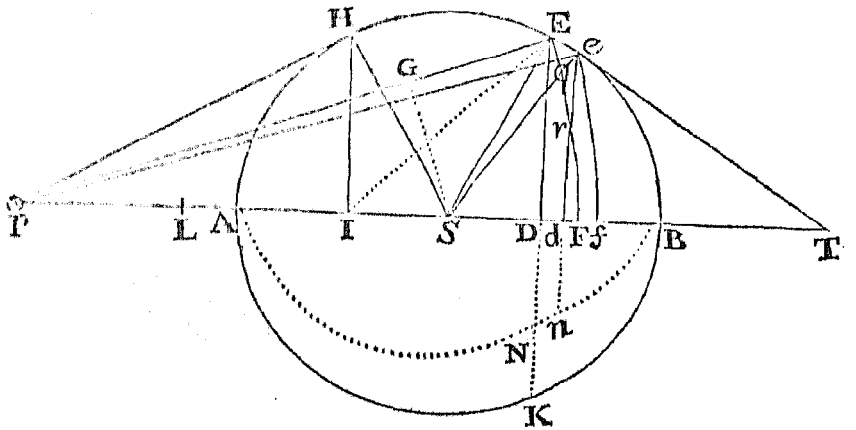
Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi Vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in receſſu a centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

## LEMMA XXIX.

*Si deſcribantur centro* S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam ſi linea $Pe$ ſecet arcum $EF$ in $q$; & recta $Ee$, quæ cum arcu evaneſcente $Ee$ coincidit, producta occurrat rectæ $PS$ in $T$; & ab $S$ demittatur in $PE$ normalis $SG$: ob ſimilia triangula $DTE, dTe, DES$; erit $Dd$ ad $Ee$, ut $DT$ ad $TE$, ſeu $DE$ ad




$ES$; & ob triangula $Eeq$, $ESG$ (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem. VII) ſimilia, erit $Ee$ ad $eq$ ſeu $Ff$, ut $ES$ ad $SG$; & ex æquo, $Dd$ ad $Ff$ ut $DE$ ad $SG$; hoc eſt (ob ſimilia triangula $PDE$, $PGS$) ut $PE$ ad $PS$. *Q. E. D.*

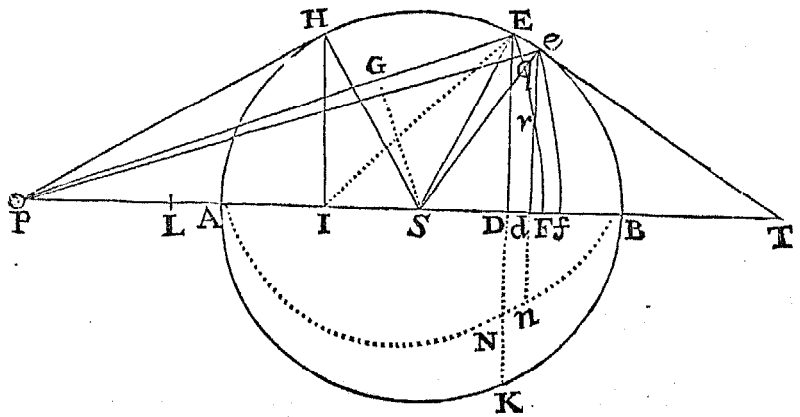
## PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

*Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens* EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione composita ex ratione ſolidi* DE*q* × Ff *& ratione vis qua particula data in loco* F*f traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ $FE$, quæ convolutione arcus $FE$ generatur, & a linea $de$ ubivis ſecatur in $r$; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus $rE$ genita, ut lineola $Dd$, manente Sphæræ radio $PE$, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra & Cylindro.*) Et hujus vis ſecundum lineas $PE$ vel $Pr$ undique in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola $Dd$ vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio $PE$ & lineola

De Motu Corporum

lineola illa $\mathcal{D}d$: at ſecundum lineam $\mathcal{P}S$ ad centrum $S$ tendentem minor, in ratione $\mathcal{P}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}E$, adeoque ut $\mathcal{P}\mathcal{D} \times \mathcal{D}d$. Dividi jam intelligatur linea $\mathcal{D}F$ in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur $\mathcal{D}d$; & ſuperficies $FE$ dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $\mathcal{P}\mathcal{D} \times \mathcal{D}d$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}Fq - \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{D}q$, adeoque ut $\mathcal{D}E$ *quad.* Ducatur




jam ſuperficies $FE$ in altitudinem $Ff$; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum $\mathcal{P}$ ut $\mathcal{D}Eq \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data $Ff$ in diſtantia $\mathcal{P}F$ exercet in corpuſculum $\mathcal{P}$. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $\mathcal{D}Eq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

*Si ad Sphæræ alicujus* ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ $AB$ dividi in particulas innumeras æquales $Dd$, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum $dn$. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum $P$ eſt ut $DEq \times Ef$ & vis particulæ unius ad diſtantiam $PE$ vel $PF$ exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, $Dd$ ad $Ff$ ut $PE$ ad $PS$, & inde $Ef$ æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ef$ æquale $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam $PF$ exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus $P$ exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. *Q.E.D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

*Corol.* 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpuſculum $P$ a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

*Corol.* 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

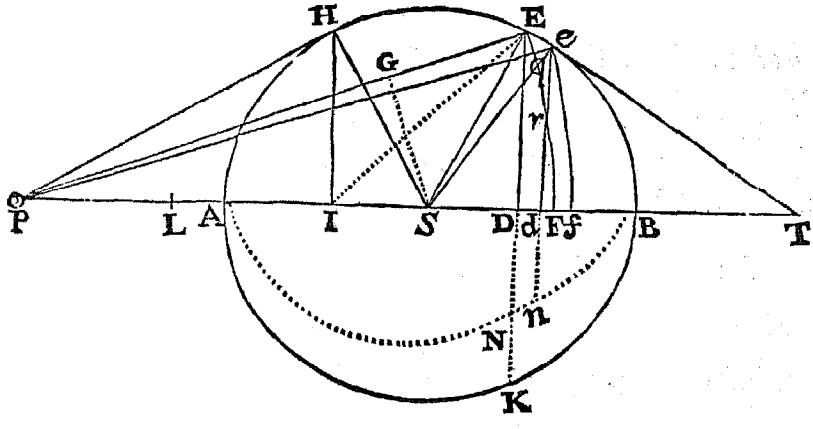
*Corol.* 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, ſiat autem $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

De Motu Corporum

## PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

*Stantibus jam positis, mensuranda est Area* ABNA.

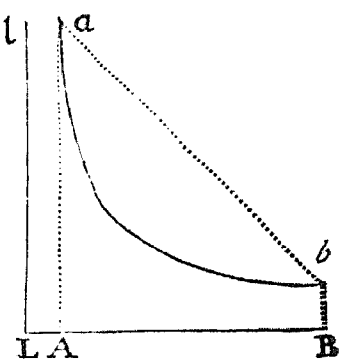
A puncto $P$ ducatur recta $PH$ Sphæram tangens in $H$, & ad axem $PAB$ demissa normali $HI$, bisecetur $PI$ in $L$; & erit (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) $PEq$ æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem $SEq$ seu $SHq$ (ob similitudinem triangulorum $SPH$, $SHI$) æquale rectangulo $PSI$. Ergo $PEq$ æquale est contento sub $PS$ & $PS+SI+2SD$, hoc est, sub $PS$ & $2LS+2SD$, id est, sub $PS$ & $2LD$. Porro $DE$ *quad* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$




(per Prop. 6, Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo $ALB$. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro $DEq$; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ $DN$, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro $PE$ medium proportionale inter $PS$ & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

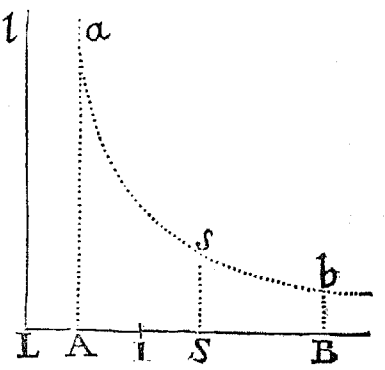
*Ex-*

*Exempl.* 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro $V$ ſcribe diſtantiam $PE$; dein $2PS \times LD$ pro $PEq$, & fiet $DN$ ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone $DN$ æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem $AB$ deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita $LD$ ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini $LD$, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta $L$, $A$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Bb$, quorum $Aa$ ipſi $LB$, & $Bb$ ipſi $LA$ æquetur. Aſymptotis $Ll$, $LB$, per puncta $a$, $b$ deſcribatur Hyperbola $ab$. Et acta chorda $ba$ claudet aream $aba$ areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.




*Exempl.* 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub}{2ASq}$ pro $V$, dein $2PS \times LD$ pro $PEq$; & fiet $DN$ ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales $PS$, $AS$, $SI$) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem $AB$, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam;

bolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta $L$, $A$, $S$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Ss$, $Bb$, quorum $Ss$ ipſi $SI$ æquetur, perque punctum $s$ Aſymptotis $Ll$, $LB$ deſcribatur Hyperbola $asb$ occurrens perpendiculis $Aa$, $Bb$ in $a$ & $b$; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area Hyperbolica $AasbB$ reliquet aream quæſitam $ABNA$.




*Exempl.* 3. Si Vis centripeta, ad ſingulas Sphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2AScub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro $PE$, & fiet $DN$ ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem $AB$, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2}SI}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2}SI}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2}SI}$ in $\frac{1}{\sqrt{LAcub}} - \frac{1}{\sqrt{LBcub}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, $SIq$, & $SIq + \frac{2SIcub}{3LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpuſculum $P$ in Sphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SIcub}{PI}$, id eſt, reciproce ut $PS\,cub \times PI$. *Q. E. I.*

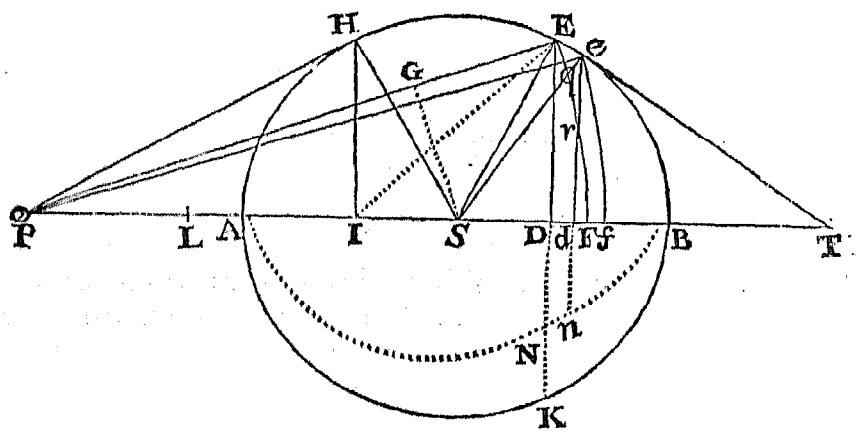
Eadem Methodo determinari poteſt Attractio corpuſculi ſiti intra Sphæram, ſed expeditius per Theorema ſequens.

PRO-

## PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In Sphæra centro* S *intervallo* S A *descripta, si capiantur* S I, S A, S P *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* I S, P S *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione




composita ex subduplicata ratione distantiæ *S I* ad distantiam *S P* & ratione subduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum *S I*, *S P* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *S P* ad Sphæræ semidiametrum *S A*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem

De Motu Corporum

cem ut $SP$ *quad* ad $SA$ *quad:* Si in quadruplicata, ut $SP$ *cub* ad $SA$ *cub.* Unde cum attractio in $P$, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut $PS\,cub \times PI$, attractio in $I$ erit reciproce ut $SA\,cub \times PI$, id est (ob datum $SA$ *cub*) reciproce ut $PI$. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

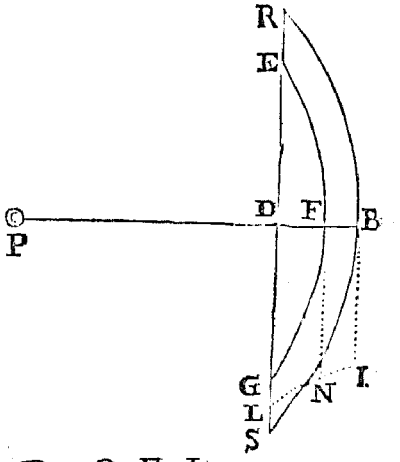
Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis $P$, ordinatim applicata $DN$ inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur $IE$, ordinata illa ad alium quemvis locum $I$, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis $E$ manantes, esse ad invicem in distantiis $IE$, $PE$, ut $PE^n$ ad $IE^n$, (ubi numerus $n$ designet indicem potestatum $PE$ & $IE$) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula $SPE$, $SEI$, fit $IE$ ad $PE$ ut $IS$ ad $SE$ vel $SA$; pro ratione $IE$ ad $PE$ scribe rationem $IS$ ad $SA$; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed $PS$ ad $SA$ subduplicata est ratio distantiarum $PS$, $SI$; & $IE^n$ ad $PE^n$ subduplicata est ratio virium in distantiis $PS$, $IS$. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

*Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.*

Sit $P$ corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano $RDS$ & superficie Sphærica $RBS$ contentum. Superficie Sphærica $EFG$ centro $P$ descripta secetur $DB$ in $F$, ac distinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O,

tas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $\mathcal{P}F \times \mathcal{D}F \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt $n$; & vis qua ſuperficies $FE$ trahit corpus $\mathcal{P}$ erit ut $\frac{\mathcal{D}F \times O}{\mathcal{P}F^{n-1}}$. Huic proportionale ſit perpendiculum $FN$ ductum in O; & area curvilinea $B\mathcal{D}LIB$, quam ordinatim applicata $FN$ in longitudinem $\mathcal{D}B$ per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBS\mathcal{D}$ trahit corpus $\mathcal{P}$. *Q. E. I.*




## PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

*Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.*

A Segmento $EBK$ trahatur corpus $\mathcal{P}$ (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI) in ejus axe $A\mathcal{D}B$ locatum. Centro $\mathcal{P}$ intervallo $\mathcal{P}E$ deſcribatur ſuperficies Sphærica $EFK$, qua diſtinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFK\mathcal{D}$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis Segmenti totius $EBK\mathcal{D}$. *Q. E. I.*

### *Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO

# SECTIO XIII.

## *De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.*

### PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.*

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PRO-

## PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

*Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.*

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI, in Exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus Orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra Orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

*Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materia æqualiter attractiva conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis ſimiliter poſitas.*

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

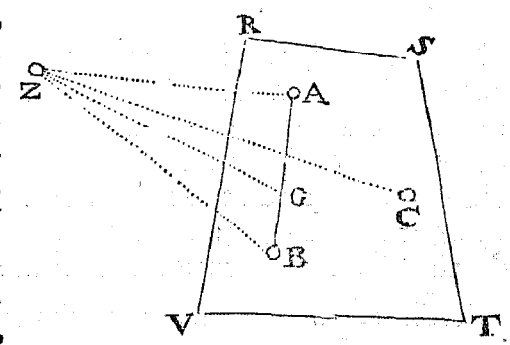
*Corol.* 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis

cujuſvis diſtantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$ id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,q\,q.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,q\,q.}$ id eſt, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

*Corol.* 2. Unde viciſſim, ex viribus quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

## PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

*Si particularum æqualium Corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.*




Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa *A*×*AZ* & *B*×*BZ*. Jungatur *AB*, & ſecetur ea in *G* ut ſit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*;

&c

& erit $G$ commune centrum gravitatis particularum $A$ & $B$. Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales $A$ ad $B$ & $BG$ ad $AG$, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum $G$, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ $A$ & $B$ consisterent in eorum communi gravitatis centro $G$, Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia $C$, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum $G$; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis Globi illius $G$ & particulæ $C$; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum $A$, $B$, $C$; & eadem erit ac si Globus & particula $C$ consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc motus corporis attracti $Z$ idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

## PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

*Si Corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.*

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

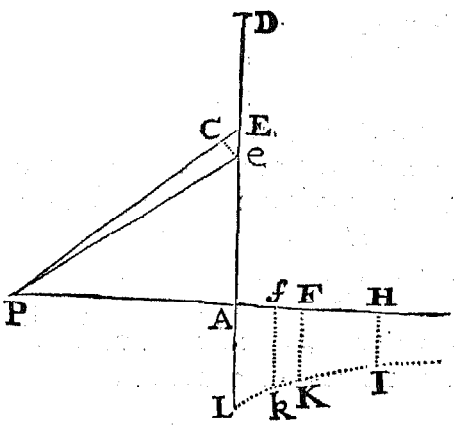
*Corol.* Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

De Motu Corporum

## PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

*Si ad ſingula Circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.*

Centro $A$ intervallo quovis $AD$, in plano cui recta $AP$ perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & invenienda ſit vis qua corpuſculum quodvis $P$ in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis $E$ ad corpuſculum attractum $P$ agatur recta $PE$: In recta $PA$ capiatur $PF$ ipſi $PE$ æqualis, & erigatur normalis $FK$, quæ ſit ut vis qua punctum $E$ trahit corpuſculum $P$. Sitque $IKL$ curva linea quam punctum $K$ perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in $L$. In $PA$ capiatur $PH$ æqualis $PD$, & erigatur perpendiculum $HI$ curvæ prædictæ occurrens in $I$; & erit corpuſculi $P$ attractio in Circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem $AP$. *Q. E. I.*




Etenim in $AE$ capiatur linea quam minima $Ee$. Jungatur $Pe$, & in $PE$, $PA$ capiantur $PC$, $Pf$ ipſi $Pe$ æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis $E$ trahit ad ſe corpus $P$, ponitur eſſe ut $FK$, & inde vis qua punctum illud trahit corpus $P$ verſus $A$ eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus $P$ verſus $A$, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio $AE$ & latitudine $Ee$, & hoc rectangulum (ob proportionales $PE$ & $AE$, $Ee$ & $CE$) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iſte trahit corpus $P$ verſus $A$, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in $AP$. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro $A$ & intervallo

tervallo $AD$ describitur, trahunt corpus $P$ versus $A$, est ut area tota $AHIKL$ ducta in $AP$. *Q. E. D.*

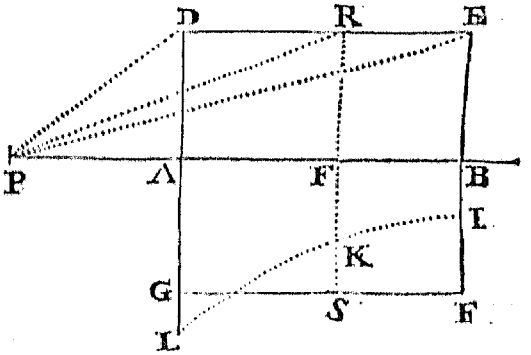
*Corol.* 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit $FK$ ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi $P$ in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

*Corol.* 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet $D^n$, hoc est, si sit $FK$ ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi $P$ in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

*Corol* 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus $n$ sit unitate major; attractio corpusculi $P$ in planum totum infinitum erit reciproce ut $PA^{n-2}$, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

## PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

*Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.*

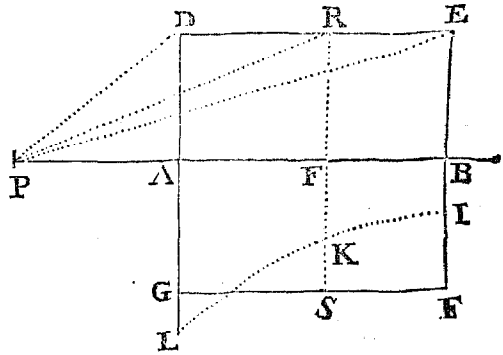



In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum $P$, situm in ejus axe $AB$. Circulo quolibet $RFS$ ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro $FS$, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per Prop. xc) longitudo $FK$ vi qua corpusculum $P$ in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum $K$ curvam lineam $LKI$, planis extimorum circulorum $AL$ & $BI$ occurrentem in $L$ & $I$; & erit attractio corpusculi $P$ in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*

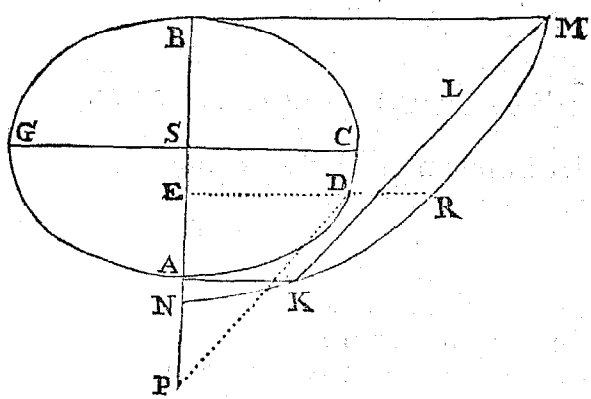
*Corol.*

De Motu Corporum

*Corol.* 1. Unde ſi Solidum Cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem $AB$ revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi $P$ in hunc Cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata $FK$ (per Corol. 1. Prop. xc) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem $AB$, deſcribit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem $PB$, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ $LIK$ quadratura facile oſtendi poteſt:) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem $PA$ deſcribit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipſarum $PB$, $PA$ differentiam $AB$ deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.



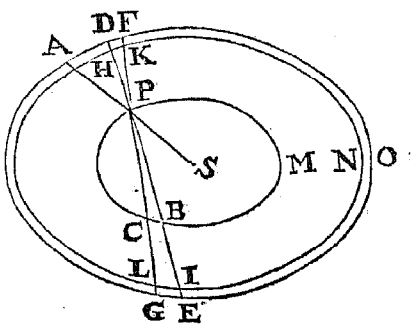

*Corol.* 2. Hinc etiam vis innoteſcit qua Sphærois $AGBCD$ attrahit corpus quodvis $P$, exterius in axe ſuo $AB$ ſitum. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata $ER$, ipſi $PE$ perpendicularis, æquetur ſemper longitudini $PD$, quæ ducitur ad punctum illud $D$, in quo applicata iſta Sphæroidem ſecat. A Sphæroidis verticibus $A$, $B$ ad ejus axem $AB$ erigantur perpendicula $AK$, $BM$ ipſis $AP$, $BP$ æqualia reſpective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in $K$ & $M$; & jungatur $KM$ auferens ab eadem ſegmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum $S$ & ſemidiameter maxima $SC$: & vis




qua

qua Sphærois trahit corpus $P$ erit ad vim qua Sphæra, diametro $AB$ descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub}{3\ PS\ quad}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

*Corol.* 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, $S$ centrum ejus & $P$ corpus attractum. Per corpus illud $P$ agantur tum semidiameter $SPA$, tum rectæ duæ quævis $DE$, $FG$ Sphæroidi hinc inde occurrentes in $D$ & $E$, $F$ & $G$: Sintque $PCM$, $HLN$ superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus $P$ & secet rectas $DE$ & $FG$ in $B$ & $C$, posterior secet easdem rectas in $H$, $I$ & $K$, $L$. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ $DP$ & $BE$, $FP$ & $CG$, $DH$ & $IE$, $FK$ & $LG$ sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ $DE$, $PB$ & $HI$ bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ $FG$, $PC$ & $KL$. Concipe jam $DPF$, $EPG$ designare Conos oppositos, angulis verticalibus $DPF$, $EPG$ infinite parvis descriptos, & lineas etiam $DH$, $EI$ infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF$, $GLIE$, ob æqualitatem linearum $DH$, $EI$, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo $P$, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia $DPF$, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus $P$ in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni $DPF$ & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus $P$ a sola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII) attractio ejus est ad vim, qua corpus $A$ trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia $PS$ ad distantiam $AS$. *Q. E. D.*




PRO-

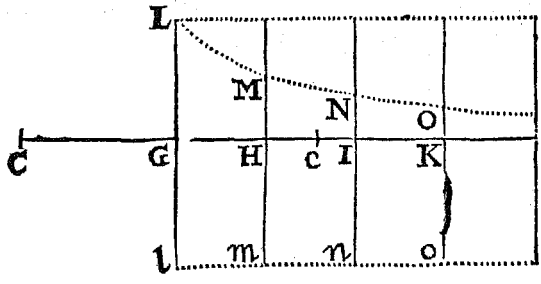
## PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

## PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

*Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.*




*Cas.* 1. Sit *L G l* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus *I*, inque plana innumera *m H M*, *n I N*, &c. ipsi *G L* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra Solidum. Agatur autem *C G H I* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis

vis qua planum quodvis $mHM$ trahit punctum $C$ eſt reciproce ut $CH^{n-2}$. In plano $mHM$ capiatur longitudo $HM$ ipſi $CH^{n-2}$ reciproce proportionalis, & erit vis illa ut $HM$. Similiter in planis ſingulis $lGL$, $nIN$, $oKO$, &c. capiantur longitudines $GL$, $IN$, $KO$, &c. ipſis $CG^{n-2}$, $CI^{n-2}$, $CK^{n-2}$, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum verſus $OK$ producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciproce ut $CG^{n-3}$, & propterea vis Solidi totius eſt reciproce ut $CG^{n-3}$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Collocetur jam corpuſculum $C$ ex parte plani $lGL$ intra Solidum, & capiatur diſtantia $CK$ æqualis diſtantiæ $CG$. Et Solidi pars $LGloKO$, planis parallelis $lGL$, $oKO$ terminata, corpuſculum $C$ in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum $C$ ſola vi Solidi ultra planum $OK$ ſiti trahitur. Hæc autem vis (per Caſum primum) eſt reciproce ut $CK^{n-3}$, hoc eſt (ob æquales $CG$, $CK$) reciproce ut $CG^{n-3}$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis $LG$, $IN$ utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NICO$, in infinitum verſus $KO$ productæ.

*Corol.* 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis $CG^{n-3}$.

*Corol.* 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

*Scholium.*

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. xxxix) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^3$: adeoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de Motu, quas nondum attigi.

SECTIO

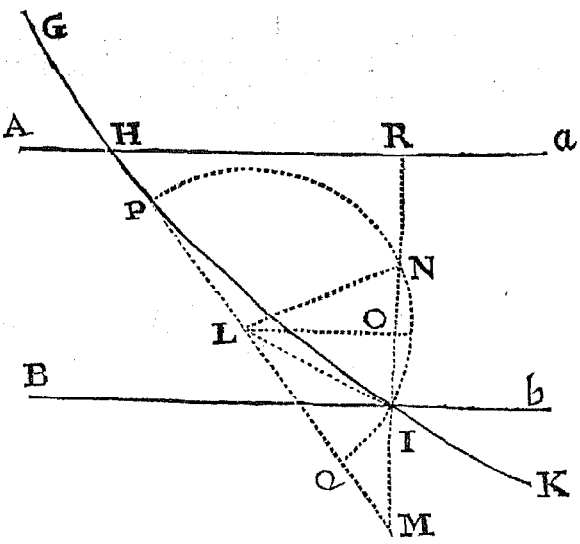
# SECTIO XIV.

*De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*

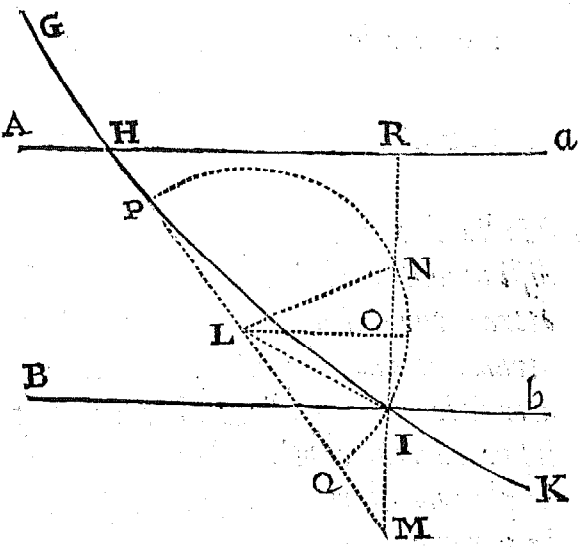
## PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

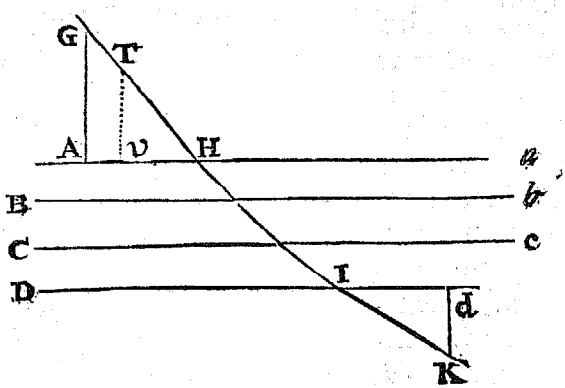
*Si Media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.*

*Cas.* 1. Sunto *A a*, *B b* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *A a* ſecundum lineam *G H*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus Medium incidentiæ, eaque actione deſcribat lineam curvam *H I*, & emergat ſecundum lineam *I K*. Ad planum emergentiæ *B b* erigatur perpendiculum *I M*, occurrens tum lineæ incidentiæ *G H* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *A a* in *R*; & linea emergentiæ *K I* producta occurrat *H M* in *L*. Centro *L* intervallo *L I* deſcribatur Circulus, ſecans



secans tam $HM$ in $P$ & $Q$, quam $MI$ productam in $N$; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva $HI$ Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea $IM$ æquale sit $HM$ quadrato; sed & linea $HM$ bisecabitur in $L$. Unde si ad $MI$ demittatur perpendiculum $LO$, æquales erunt $MO$, $OR$; & additis æqualibus $ON$, $OI$, fient totæ æquales $MN$, $IR$. Proinde cum $IR$ detur, datur etiam $MN$; estque rectangulum $NMI$ ad rectangulum sub latere recto & $IM$, hoc est, ad $HMq$, in data ratione. Sed rectangulum $NMI$ æquale est rectangulo $PMQ$, id est, differentiæ quadratorum $MLq$, & $PLq$ seu $LIq$; & $HMq$ datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem $MLq$: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad $MLq$, & divisim, ratio $LIq$ ad $MLq$, & ratio dimidiata $LI$ ad $ML$. Sed in omni triangulo $LMI$, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ $LMR$ ad sinum anguli emergentiæ $LIR$. *Q.E.D.*




*Cas.* 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis

ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

*Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.*

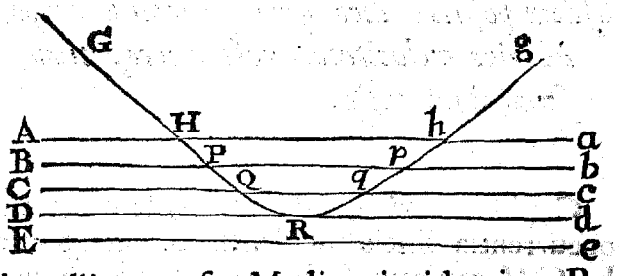
Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per Legum Corol. 2) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PRO-

## PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

*Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.*

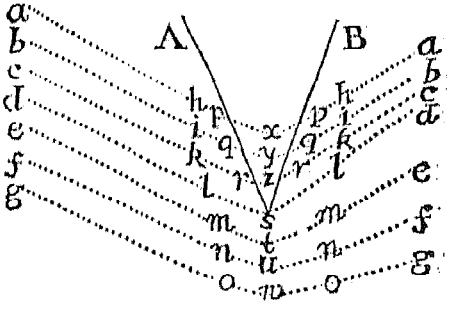
Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*




*Scholium.*

*Scholium.*

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam Sinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque Lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam conſtat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Obſervationibus diverſorum Aſtronomorum confirmata. Radii autem in aere exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus Opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.

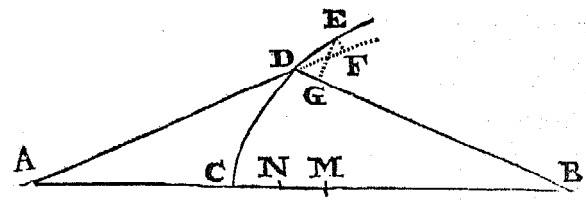



PROPO-

## PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

*Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.*

Sit $A$ locus a quo corpuscula divergunt; $B$ locus in quem convergere debent; $CDE$ curva linea quæ circa axem $AB$ revoluta describat superficiem quæsitam; $D$, $E$ curvæ illius puncta duo quævis; & $EF$, $EG$ perpendicula in corporis vias $AD$, $DB$ demissa. Accedat punctum $D$ ad punctum $E$; & lineæ $DF$ qua $AD$ augetur, ad lineam $DG$ qua $DB$ diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio

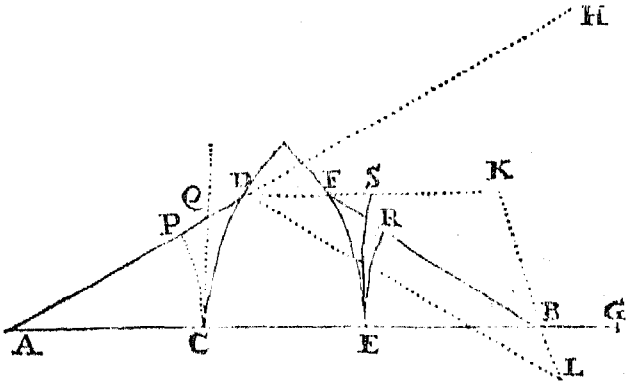



incrementi lineæ $AD$ ad decrementum lineæ $DB$; & propterea si in axe $AB$ sumatur ubivis punctum $C$, per quod curva $CDE$ transire debet, & capiatur ipsius $AC$ incrementum $CM$, ad ipsius $BC$ decrementum $CN$ in data illa ratione; centrisque $A$, $B$, & intervallis $AM$, $BN$ describantur circuli duo se mutuo secantes in $D$: punctum illud $D$ tanget curvam quæsitam $CDE$, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Faciendo autem ut punctum $A$ vel $B$ nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti $C$, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad Refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

*Corol.*

*Corol.* 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis $CD$, ſecundum lineam rectam $AD$ lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam $DK$, & a puncto $C$ duci intelligantur Lineæ curvæ $CP$, $CQ$ ipſis $AD$, $DK$ ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum $PD$, $QD$, atq; adeo lineæ ipſæ $PD$, $QD$, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



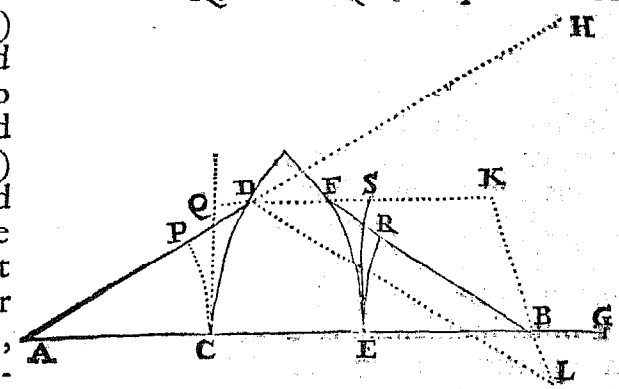

## PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

*Iiſdem poſitis, & circa axem* AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta $AB$ ſecet ſuperficiem primam in $C$ & ſecundam in $E$, puncto $D$ utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum $AB$ ad $G$ ut ſit $BG$ ad $CE$ ut M—N ad N, tum $AD$ ad $H$ ut ſit $AH$ æqualis $AG$, tum etiam $DF$ ad $K$ ut ſit $DK$ ad $DH$ ut N ad M. Junge $KB$, & centro $D$ intervallo $DH$ deſcribe circulum occurrentem $KB$ productæ in $L$, ipſique $DL$ parallelam age $BF$: & punctum $F$ tanget Lineam $EF$, quæ circa axem $AB$ revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas $CP$, $CQ$ ipſis $AD$, $DF$ reſpective, & Lineas $ER$, $ES$ ipſis $FB$, $FD$ ubique perpendiculares eſſe, adeoque $QS$ ipſi $CE$ ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII) $PD$ ad $QD$ ut M ad N, adeoque ut $DL$ ad $DK$ vel $FB$ ad $FK$;

De Motu Corporum & divisim ut $\mathcal{D}L - FB$ seu $\mathcal{P}H - \mathcal{P}\mathcal{D} - FB$ ad $F\mathcal{D}$ seu $F\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{D}$; & compositè ut $\mathcal{P}H - FB$ ad $F\mathcal{Q}$, id est (ob æquales $\mathcal{P}H$ & $CG$, $\mathcal{Q}S$ & $CE$) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales $BG$ ad $CE$ & M − N ad N) est etiam $CE + BG$ ad $CE$ ut M ad N: adeoque divisim $FR$ ad $FS$ ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, superficies $EF$ cogit corpus, in ipsam secundum lineam $\mathcal{D}F$ incidens, pergere in linea $FR$ ad locum $B$. $\mathcal{Q}.E.\mathcal{D}$.




*Scholium.*

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

DE

# MOTU CORPORUM

## LIBER SECUNDUS.

---

## SECTIO I.

### *De Motu Corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.*

### PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.*

NAm cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q.E.D.*

*Corol.* Igitur ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

### LEMMA I.

*Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.*

Sit A ad A − B ut B ad B − C & C ad C − D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

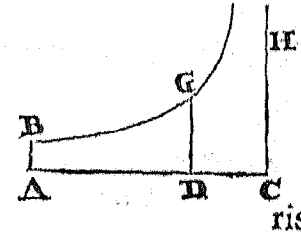
## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Si Corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per Medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione Geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.*

*Cas.* 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulso unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. 1. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc si Asymptotis rectangulis $ADC$, $CH$ describatur Hyperbola $BG$, sintque $AB$, $DG$ ad Asymptoton $AC$ perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam $AC$, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam $DC$: exponi potest tempus per aream $ABGD$, & spatium eo tempore descriptum per lineam $AD$. Nam si area illa per motum puncti $D$ augeatur uniformiter ad modum tempo-

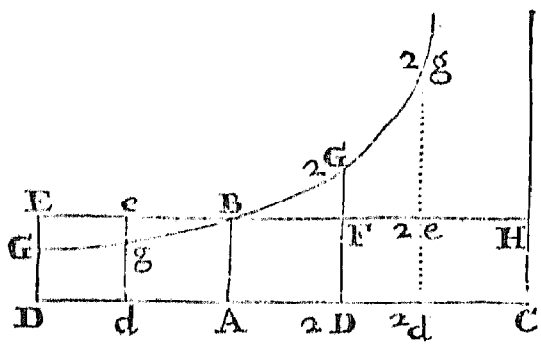



ris,

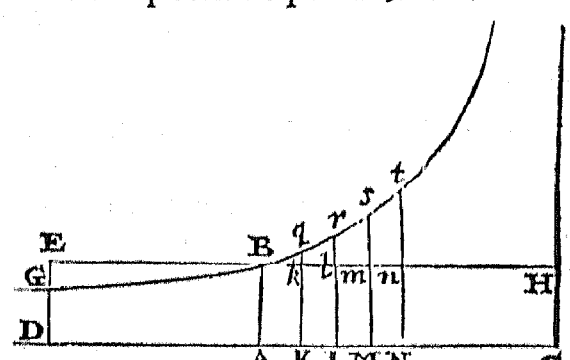
ris, decreſcet recta $DC$ in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ $AC$ æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione. 

## PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

*Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.*

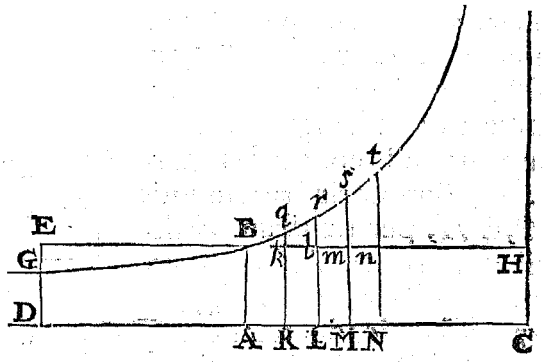



Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum $BC$, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum $BD$ ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis $AC, CH$, per punctum $B$ deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula $DE$, $de$ in $G, g$; & corpus aſcendendo, tempore $DGgd$, deſcribet ſpatium $EGge$, tempore $DGBA$ ſpatium aſcenſus totius $EGB$; tempore $ABGD$ ſpatium deſcenſus $BF2G$, atque tempore $2D2G2g2d$ ſpatium deſcenſus $2GF2e2g$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABF2D$, $AB2e2d$ reſpective; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit $BC$.




Reſolvatur enim rectangulum $AH$ in rectangula innumera $Ak, Kl, Lm, Mn$, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, $Ak, Al, Am, An$, &c. ut velocitates totæ, atque adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentiæ Medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat $AC$ ad $AK$ vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis

tatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem II) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula $Ak$, $Kl$, $Lm$, $Mn$, &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II) in progressione Geometrica. Quare si rectæ $Kk$, $Ll$, $Mm$, $Nn$, &c. productæ occurrant Hyperbolæ in $q$, $r$, $s$, $t$, &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area $ABqK$ (per Corol. 3. Lem. VII, & Lem. VIII, Lib. I) ad aream $Bkq$ ut $Kq$ ad $\frac{1}{2}kq$ seu $AC$ ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ $Bkq$, $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per Hypothesin) velocitatibus, atque adeo descriptis spatiis analogæ. Summantur analogarum summæ, & erunt areæ $Bkq$, $Blr$, $Bms$, $Bnt$, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $ABrL$, describit spatium $Blr$, & tempore $LrtN$ spatium $rlnt$. *Q. E. D.* Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

*Corol.* 2. Tempore autem aucto in progressione Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atque etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressione Geometrica.

*Corol.* 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione Geometrica.

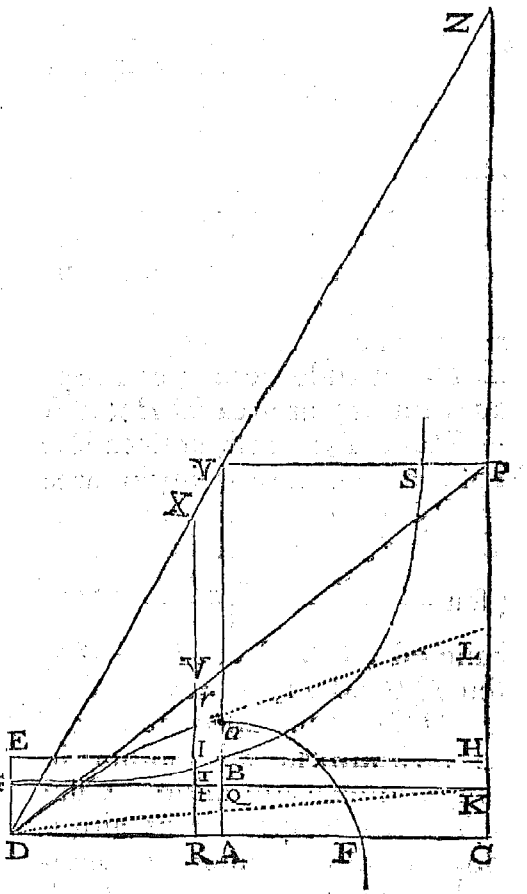
*Corol.*

*Corol.* 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

## PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

*Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.*

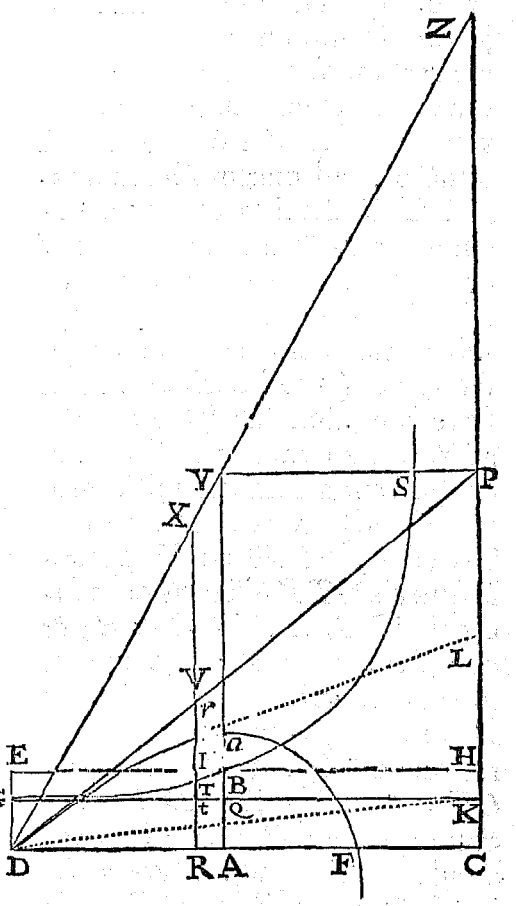
E loco quovis $D$ egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam $DP$, & per longitudinem $DP$ exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto $P$ ad lineam Horizontalem $DC$ demittatur perpendiculum $PC$, & secetur $DC$ in $A$ ut sit $DA$ ad $AC$ ut resistentia Medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub $DA$ & $DP$ ad rectangulum sub $AC$ & $CP$ ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis $DC, CP$, describatur Hyperbola quævis $GTBS$ secans perpendicula $DG$, $AB$ in $G$ & $B$; & compleatur parallelogrammum $DGKC$, cujus latus $GK$ secet $AB$ in $Q$. Capiatur linea N in ratione ad $QB$ qua $DC$ sit ad $CP$; & ad rectæ $DC$ punctum quodvis $R$ erecto perpendiculo $RT$, quod Hyperbolæ in $T$, & rectis $EH$, $GK$, $DP$ in $I$, $t$ & $V$ occurrat; in eo cape $Vr$ æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde



De Motu Corporum

inde est, cape $Rr$ æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore $\mathcal{D}RTG$ perveniet ad punctum $r$, describens curvam lineam $\mathcal{D}raF$, quam punctum $r$ semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem $a$ in perpendiculo $AB$, & postea semper appropinquans ad Asymptoton $\mathcal{P}LC$. Estque velocitas ejus in puncto quovis $r$ ut Curvæ Tangens $rL$. *Q. E. I.*

Est enim N ad $\mathcal{Q}B$ ut $\mathcal{D}C$ ad $C\mathcal{P}$ seu $\mathcal{D}R$ ad $RV$, adeoque $RV$ æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times \mathcal{Q}B}{N}$, & $Rr$ (id est $RV - Vr$ seu $\frac{\mathcal{D}R \times \mathcal{Q}B - tGT}{N}$) æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB - R\mathcal{D}GT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $R\mathcal{D}GT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis *in duos, unum* ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. 11. hujus) ut linea $\mathcal{D}R$, altitudo vero (per Prop. 111. hujus) ut area $\mathcal{D}R \times AB - R\mathcal{D}GT$, hoc est, ut linea $Rr$. Ipso autem motus initio area $R\mathcal{D}GT$ æqualis est rectangulo $\mathcal{D}R \times A\mathcal{Q}$, ideoque linea illa $Rr$ (seu $\frac{\mathcal{D}R \times AB - \mathcal{D}R \times A\mathcal{Q}}{N}$) tunc est ad $\mathcal{D}R$ ut $AB - A\mathcal{Q}$ seu $\mathcal{Q}B$ ad N, id est, ut $C\mathcal{P}$ ad $\mathcal{D}C$; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur $Rr$ semper sit ut altitudo, ac $\mathcal{D}R$ semper ut longitudo, atque $Rr$ ad $\mathcal{D}R$ sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut $Rr$ semper sit ad $\mathcal{D}R$ ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $\mathcal{D}raF$, quam punctum $r$ perpetuo tangit. *Q. E. D.*




*Corol.*

*Corol.* 1. Eſt igitur $Rr$ æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N} - \frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, ideoque ſi producatur $RT$ ad $X$ ut ſit $RX$ æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N}$, (id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $AC\mathcal{P}\Upsilon$, jungatur $\mathcal{D}\Upsilon$ ſecans $C\mathcal{P}$ in $Z$, & producatur $RT$ donec occurrat $\mathcal{D}\Upsilon$ in $X$;) erit $Xr$ æqualis $\frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

*Corol.* 2. Unde ſi capiantur innumeræ $CR$ vel, quod perinde eſt, innumeræ $ZX$, in progreſſione Geometrica; erunt totidem $Xr$ in progreſſione Arithmetica. Et hinc Curva $\mathcal{D}raF$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

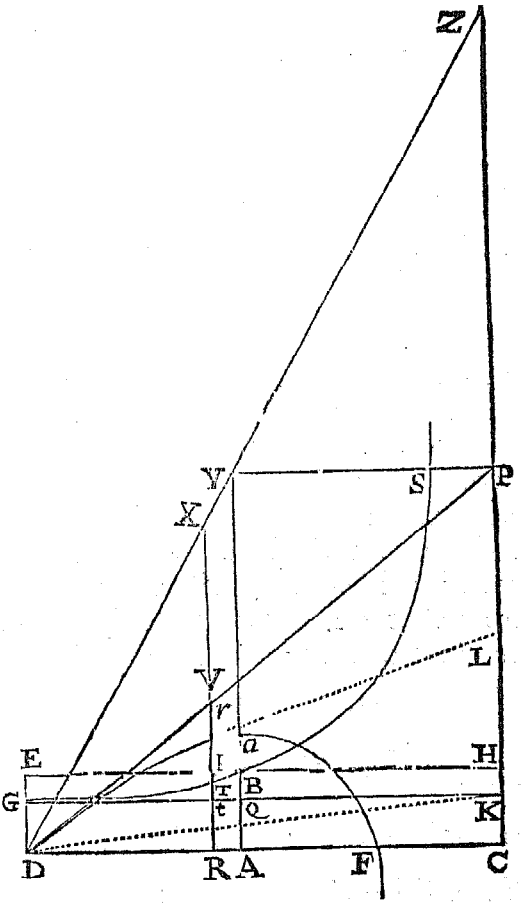
*Corol.* 3. Si vertice $\mathcal{D}$, diametro $\mathcal{D}E$ deorſum producta, & Latere recto quod ſit ad $2\mathcal{D}\mathcal{P}$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco $\mathcal{D}$ ſecundum rectam $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam $\mathcal{D}raF$, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco $\mathcal{D}$, ſecundum eandem rectam $\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ & $Vr$ eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{\mathcal{D}R \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, Hyperbolam $GTB$ tangeret in $G$, parallela eſt ipſi $\mathcal{D}K$, ideoque $Tt$ eſt $\frac{CK \times \mathcal{D}R}{\mathcal{D}C}$ & N erat $\frac{\mathcal{Q}B \times \mathcal{D}C}{C\mathcal{P}}$. Et propterea $Vr$ eſt $\frac{\mathcal{D}Rq \times CK \times C\mathcal{P}}{2\mathcal{D}Cq \times \mathcal{Q}B}$, id eſt, (ob proportionales $\mathcal{D}R$ & $\mathcal{D}C$, $\mathcal{D}V$ & $\mathcal{D}\mathcal{P}$) $\frac{\mathcal{D}Vq \times CK \times C\mathcal{P}}{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{Q}B}$, & Latus rectum $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{Q}B}{CK \times C\mathcal{P}}$, id eſt (ob proportionales $\mathcal{Q}B$ & $CK$, $\mathcal{D}A$ & $AC$) $\frac{2\mathcal{D}\mathcal{P}q \times \mathcal{D}A}{AC \times C\mathcal{P}}$, adeoque ad $2\mathcal{D}\mathcal{P}$, ut $\mathcal{D}\mathcal{P} \times \mathcal{D}A$ ad $C\mathcal{P} \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

*Corol.* 4. Unde ſi corpus de loco quovis $\mathcal{D}$, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam $\mathcal{D}\mathcal{P}$ projiciatur; & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt Curva $\mathcal{D}raF$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate

De Motu Corporum

datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2\mathcal{D}P$ ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur $\mathcal{D}P$. Dein secando $\mathcal{D}C$ in $A$, ut sit $CP \times AC$ ad $\mathcal{D}P \times \mathcal{D}A$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum $A$. Et inde datur Curva $\mathcal{D}raF$.

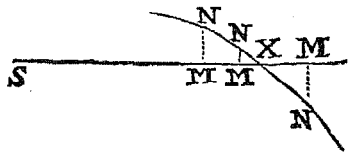
*Corol.* 5. Et contra, si datur Curva $\mathcal{D}raF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis $r$. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $\mathcal{D}P \times \mathcal{D}A$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis $rL$, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis $r$.




*Corol.* 6. Cum autem longitudo $2\mathcal{D}P$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in $\mathcal{D}$; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2\mathcal{D}P$ augeri in ratione illa simplici, adeoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo $C\mathcal{D}P$ mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

*Corol.* 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $\mathcal{D}raF$ ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco $\mathcal{D}$, secundum angulos diversos $C\mathcal{D}P$, $c\mathcal{D}p$ (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca $F, f$, ubi incidunt in horizontale planum $\mathcal{D}C$. Tum, assumpta quacunque longitudine pro $\mathcal{D}P$ vel $\mathcal{D}p$, fingatur quod resistentia in $\mathcal{D}$ sit ad gravitatem in ratione

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis $SM$. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta $DP$, inveniantur longitudines $DF$, $Df$, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum $MN$. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem $SM$, & colligendo novam differentiam $MN$. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ $SM$, & negativæ ad alteram; & per puncta $N$, $N$, $N$ agatur curva regularis $NNN$ secans rectam $SMMM$ in $X$, & erit $SX$ vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo $DF$ per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem $DP$, ut longitudo $DF$ per experimentum cognita ad longitudinem $DF$ modo inventam, erit vera longitudo $DP$. Qua inventa, habetur tum Curva linea $DraF$ quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.




## *Scholium.*

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus Legem II & III) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

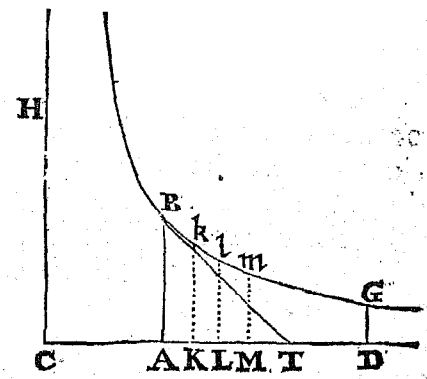
De Motu Corporum

# SECTIO II.

## *De motu Corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione Velocitatum.*

### PROPOSITIO V. THEOREMA III.

*Si Corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare movetur; tempora vero ſumantur in progreſſione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione Geometrica inverſe, & quod ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.*




Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia Medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ $AK$, $KL$, $LM$, &c. in recta $CD$ ſumptæ, & erigantur perpendicula $AB$, $Kk$, $Ll$, $Mm$, &c. Hyperbolæ $Bklm G$, centro $C$ Aſymptotis rectangulis $CD$, $CH$ deſcriptæ, occurrentia in $B$, $k$, $l$, $m$, &c. & erit $AB$ ad $Kk$ ut $CK$ ad $CA$, & diviſim $AB-Kk$ ad $Kk$ ut $AK$ ad $CA$, & viciſſim $AB-Kk$ ad $AK$ ut $Kk$ ad $CA$, adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum $AK$ & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt $AB$ & $Kk$, ut $ABq$. Et ſimili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kkq$, $Llq$, &c. Linearum igitur $AB$, $Kk$, $Ll$, $Mm$ qua-

quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis $AK$ exponatur per lineam $AB$, & velocitas initio ſecundi $KL$ per lineam $Kk$, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes $Ll$, $Mm$, &c. & longitudines deſcriptæ per areas $Kl$, $Lm$, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum $AM$, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus $AM$ ita dividi in partes $AK$, $KL$, $LM$, &c. ut ſint $CA$, $CK$, $CL$, $CM$, &c. in progreſſione Geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates $AB$, $Kk$, $Ll$, $Mm$, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta $Ak$, $Kl$, $Lm$, &c. æqualia. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis $AD$, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam $AB$; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam $DG$, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore $AD$, velocitate prima $AB$, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum $AB \times AD$.

*Corol.* 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi $AB$ in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

*Corol.* 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore $AC$, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem $AB$. Nam ſi ducatur $BT$ quæ tangat Hyperbolam in $B$, & occurrat Aſymptoto in $T$; recta $AT$ æqualis erit ipſi $AC$, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam $AB$.

*Corol* 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

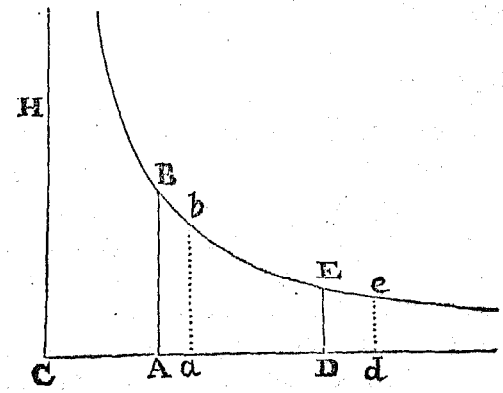
*Corol.* 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus $AC$, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis $AB$: & inde

De Motu Corporum

de datur punctum $B$ per quod Hyperbola, Asymptotis $CH$, $C\mathcal{D}$, describi debet; ut & spatium $ABG\mathcal{D}$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa $AB$, tempore quovis $A\mathcal{D}$, in Medio similari resistente describere potest.

## PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

*Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.*




Asymptotis rectangulis $C\mathcal{D}$, $CH$ descripta Hyperbola quavis $BbEe$ secante perpendicula $AB, ab, \mathcal{D}E, de$, in $B, b, E, e$, exponantur velocitates initiales per perpendicula $AB$, $\mathcal{D}E$, & tempora per lineas $Aa, \mathcal{D}d$. Est ergo ut $Aa$ ad $\mathcal{D}d$ ita (per Hypothesin) $\mathcal{D}E$ ad $AB$, & ita (ex natura Hyperbolæ) $CA$ ad $C\mathcal{D}$; & componendo, ita $Ca$ ad $Cd$. Ergo areæ $ABba$, $\mathcal{D}Eed$, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ $AB$, $\mathcal{D}E$ sunt ultimis $ab$, $de$, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis $AB-ab$, $\mathcal{D}E-de$ proportionales. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

*Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.*

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſque erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoque ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

*Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

*Corol.* 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut $D^n$ & $E^n$: ſpatia quibus Globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut $D^{3-n}$ & $E^{3-n}$. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis $D^{3-n}$ & $E^{3-n}$ proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

*Corol.* 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc Propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

*Corol.*

De Motu Corporum

*Corol.* 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis; spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

## LEMMA II.

*Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.*

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque, in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, absque additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis Coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel mutationum velocitates dicantur $a$, $b$, $c$, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli A B fuerit $aB + bA$, & geniti contenti A B C momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum digni-

dignitatum $A^1$, $A^3$, $A^4$, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{4}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{-1}$, $A^{-2}$, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ $A^2B$ momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive $A^3B^{-2}$ momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero Lemma in hunc modum.

*Cas.* 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis $a$ & $b$ generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q. E. D.*

*Cas.* 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+cG$, id eſt (ſi pro G & $g$ ſcribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

*Cas.* 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius $A^2$, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem $A^3$, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque $A^n$ eſt $naA^{n-1}$. *Q. E. D.*

*Cas.* 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in $a$ erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius $A^{-1}$ eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in $A^n$ ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in $A^n$ una

una cum $\frac{1}{A^n}$ in $n\,a\,A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu $A^{-n}$ erit $-\frac{n\,a}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

*Cas.* 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ fit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2\,A^{\frac{1}{2}}$ erit $a$, per Cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2\,A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}\,a\,A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit $A^m$ æquale $B^n$, ideoque $m\,a\,A^{m-1}$ æquale $n\,b\,B^{n-1}$, & $m\,a\,A^{-1}$ æquale $n\,b\,B^{-1}$ seu $n\,b\,A^{-\frac{m}{n}}$, adeoque $\frac{m}{n}\,a\,A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale $b$, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

*Cas.* 6. Igitur Genitæ cujuscunque $A^m\,B^n$ momentum est momentum ipsius $A^m$ ductum in $B^n$, una cum momento ipsius $B^n$ ducto in $A^m$, id est $m\,a\,A^{m-1}\,B^n + n\,b\,B^{n-1}\,A^m$; idque sive dignitatum indices $m$ & $n$ sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

*Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

*Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

## *Scholium.*

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus

tibus [*Data Æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versa*] eandem celarem: reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate. 

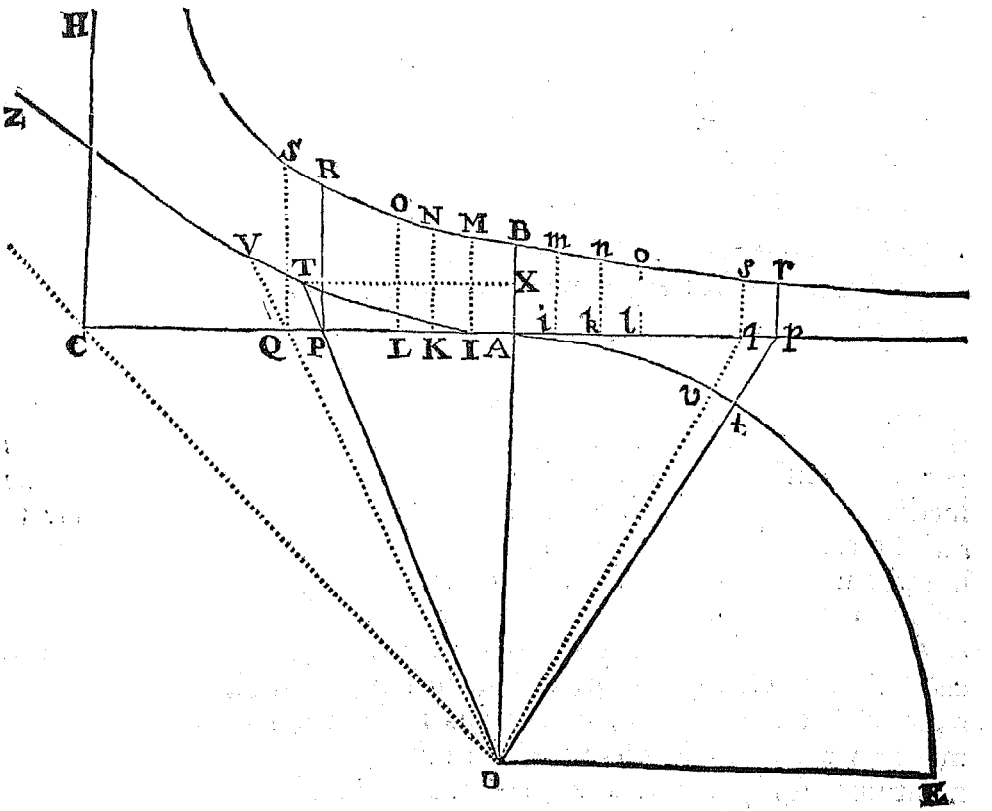
## PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

*Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) colligantur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione Geometrica.*

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam $AC$; reſiſtentia per lineam indefinitam $AK$; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam $KC$; velocitas corporis per lineam $AP$ (quæ ſit media proportionalis inter $AK$ & $AC$, ideoque in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ;) incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam $KL$, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam $P\mathcal{Q}$; & centro $C$ Aſymptotis rectangulis $CA$, $CH$ deſcribatur Hyperbola quævis $BNS$, erectis perpendiculis $AB$, $KN$, $LO$, $PR$, $\mathcal{Q}S$ occurrens in $B$, $N$, $O$, $R$, $S$. Quoniam $AK$ eſt ut $AP\,q$, erit hujus momentum $KL$ ut illius momentum $2AP\,\mathcal{Q}$, id eſt, ut $AP$ in $KC$. Nam velocitatis incrementum $P\mathcal{Q}$, (per motus Leg. II.) proportionale eſt vi generanti $KC$. Componatur ratio ipſius $KL$ cum ratione ipſius $KN$, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut $AP$. Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta $K$ & $L$, eſt æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evaneſcens eſt ut $AP$. Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati $AP$ ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſta deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vi-

De Motu Corporum

res absolutæ $AC$, $IC$, $KC$, $LC$, &c. erunt in progressione Geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti $A$, æquales areas $ABmi$, $imnk$, $knol$, &c. constabit quod vires absolutæ $AC$, $iC$, $kC$, $lC$, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ $lC$, $kC$, $iC$, $AC$, $IC$, $KC$, $LC$, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*




*Corol.* 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam $ABNK$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas $AC$, $AP$ & $AK$ respective; & vice versa.

*Corol.* 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea $AC$.

*Corol.* 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem

tatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam. 

## PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

*Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.*

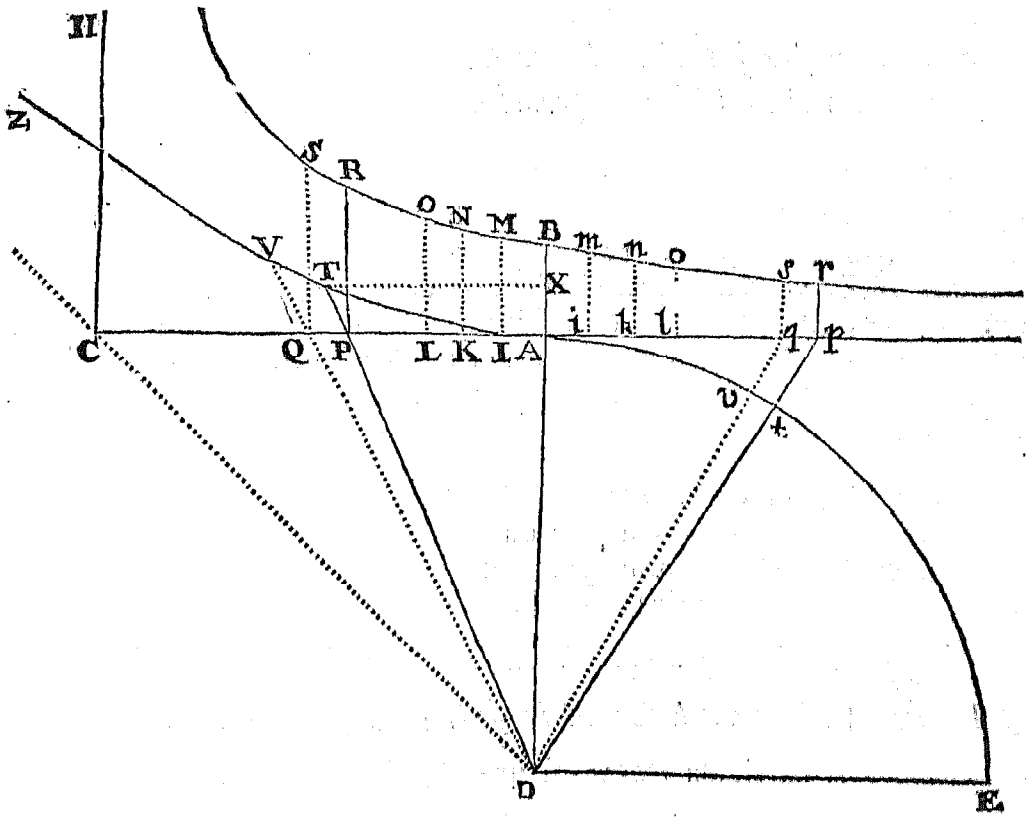
Rectæ $AC$, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur $A\mathcal{D}$. Centro $\mathcal{D}$ ſemidiametro $A\mathcal{D}$ deſcribatur tum Circuli quadrans $AtE$, tum Hyperbola rectangula $AVZ$ axem habens $AX$, verticem principalem $A$ & Aſymptoton $\mathcal{D}C$. Jungantur $\mathcal{D}p$, $\mathcal{D}P$, & erit ſector Circularis $At\mathcal{D}$ ut tempus aſcenſus omnis futuri; & ſector Hyperbolicus $AT\mathcal{D}$ ut tempus deſcenſus omnis præteriti. Si modo ſectorum Tangentes $Ap$, $AP$ ſint ut velocitates.

*Cas.* 1. Agatur enim $\mathcal{D}vq$ abſcindens ſectoris $A\mathcal{D}t$ & trianguli $A\mathcal{D}p$ momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas $t\mathcal{D}v$ & $p\mathcal{D}q$. Cum particulæ illæ, ob angulum communem $\mathcal{D}$, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula $t\mathcal{D}v$ ut $\frac{q\mathcal{D}p}{p\mathcal{D}\,quad.}$. Sed $p\mathcal{D}\,quad.$ eſt $A\mathcal{D}\,quad. + Ap\,quad.$ id eſt, $A\mathcal{D}\,quad. + A\mathcal{D} \times Ak$ ſeu $A\mathcal{D} \times Ck$; & $q\mathcal{D}p$ eſt $\frac{1}{2} A\mathcal{D} \times pq$. Ergo ſectoris particula $t\mathcal{D}v$ eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum $pq$ directe & vis illa $Ck$ quæ velocitatem diminuit inverſe, atque adeo ut particula temporis decremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium $t\mathcal{D}v$ in ſectore $A\mathcal{D}t$, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis $Ap$ particulis amiſſis $pq$ reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus $A\mathcal{D}t$ eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

*Cas.*

De Motu Corporum

*Cas.* 2. Agatur $DQV$ abſcindens tum ſectoris $DAV$, tum trianguli $DAQ$ particulas quam minimas $TDV$ & $PDQ$; & erunt hæ particulæ ad invicem ut $DTq$. ad $DPq$. id eſt (ſi $TX$ & $AP$ parallelæ ſint) ut $DXq$. ad $DAq$. vel $TXq$. ad $APq$. & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ eſt $ADq$, & per Hypotheſin $APq$ eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut $ADq$ ad




$ADq - AD \times AK$; id eſt, ut $AD$ ad $AD - AK$ ſeu $AC$ ad $CK$: ideoque ſectoris particula $TDV$ eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atque adeo ob datas $AC$ & $AD$, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverſe, atque adeo ut particula temporis incremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis $AP$ particulæ

$PQ$

$PQ$ generantur, ut ſumma particularum ſectoris $ATD$, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q.E.D.* 

*Corol.* 1. Hinc ſi $AB$ æquetur quartæ parti ipſius $AC$, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maxima $AC$, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream $ATD$ qua tempus exponitur. Nam cum ſit $AC$ ad $AP$ ut $AP$ ad $AK$, erit (per Corol. 1, Lem. 11 hujus) $LK$ ad $PQ$ ut $2AK$ ad $AP$, hoc eſt, ut $2AP$ ad $AC$, & inde $LK$ ad $\frac{1}{2}PQ$ ut $AP$ ad ($\frac{1}{4}AC$ vel) $AB$; eſt & $KN$ ad ($AC$ vel) $AD$ ut $AB$ ad $CK$; itaque ex æquo $LKN$ ad $DPQ$ ut $AP$ ad $CK$. Sed erat $DPQ$ ad $DTV$ ut $CK$ ad $AC$. Ergo rurſus ex æquo $LKN$ eſt ad $DTV$ ut $AP$ ad $AC$; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & $ATD$ momenta $LKN$ & $DTV$ ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & $ATD$ ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q.E.D.*

*Corol.* 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate $AC$ eodem tempore deſcriptum, ut eſt area $ABnk$ ad ſectorem $ADt$.

*Corol.* 3. Velocitas corporis tempore $ATD$ cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum $APD$ ad ſectorem Hyperbolicum $ATD$. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus $ATD$, & in Medio reſiſtente eſt ut $AP$, id eſt, ut triangulum $APD$. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ $ATD$, $APD$.

*Corol.* 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum $ApD$ ad ſectorem Circularem $AtD$; ſive ut recta $Ap$ ad arcum $At$.

*Corol.* 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem $AP$ acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam $AC$ in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector $ADT$ ad triangulum $ADC$: & tempus, quo velocitatem $Ap$ in Medio

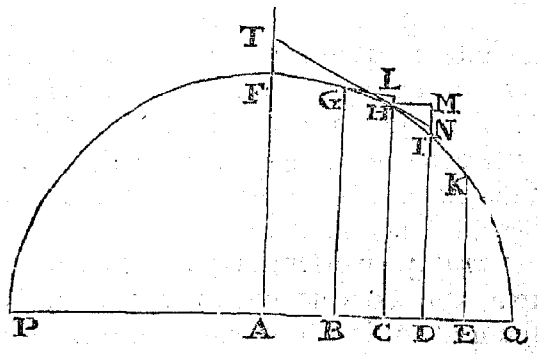
Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus $At$ ad ejus tangentem $Ap$.

*Corol.* 6 Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2, & 3, Theor. VI, Lib. II; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem $ADT$ vel $ADt$ ad triangulum $ADC$ in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas $AP$ vel $Ap$, tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ est ad sectorem $ADT$ vel $ADt$ ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

*Corol.* 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus $ADt$ vel $ADT$.

## PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

*Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitque resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & Medii resistentia in locis singulis.*




Sit $PQ$ planum illud plano Schematis perpendiculare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis $P$ & $Q$; $G, H, I, K$ loca quatuor corporis in hac curva ab $F$ ad $Q$ pergentis; & $GB$, $HC$, $ID$, $KE$ ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ & lineæ horizontali $PQ$ ad puncta $B, C, D, E$ insistentes; & sint $BC$, $CD$, $DE$ distantiæ Ordinatarum inter se æquales. A punctis $G$ & $H$ ducantur rectæ $GL$, $HN$ curvam tangentes in $G$ & $H$, & Ordinatis $CH$, $DI$ sursum productis occurrentes in $L$ & $N$, & compleatur parallelogrammum $HCDM$.

Et

Et tempora quibus corpus describit arcus $GH$, $HI$, erunt in subduplicata ratione altitudinum $LH$, $NI$ quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines descriptæ $GH$, $HI$ directe & tempora inverse. Exponantur tempora per T & $t$, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore $t$ factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & spatium $NI$ cadendo describente, generat velocitatem qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset (ut *Galilæus* demonstravit) id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum $HI$ describente, auget arcum illum sola longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$, Resistentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis $CB$, $C\mathcal{D}$, $CE$ scribantur $-o$, $o$, $2o$. Pro Ordinata $CH$ scribatur P, & pro $MI$ scribatur series quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt $NI$, & Ordinatæ $\mathcal{D}I$, $EK$, & $BG$ erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c, & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. respective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG - CH$ & $CH - \mathcal{D}I$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum $BC$, $C\mathcal{D}$, habebuntur arcuum $GH$, $HI$ quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c, & $oo + QQoo + 2QRo +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1 + QQ}}$, &

$o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus $GH$ & $HI$. Præterea si ab Ordinata $CH$ subducatur semisumma Ordinatarum $BG$ ac $DI$, & ab Ordinata $DI$ subducatur semisumma Ordinatarum $CH$ & $EK$, manebunt arcuum $GI$ & $HK$ sagittæ $Roo$ & $Roo+3So^3$. Et hæ sunt lineolis $LH$ & $NI$ proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & $t$, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, $GH$, $HI$, $MI$ & $NI$ valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ Et cum $2NI$ sit $2Roo$, R sistentia jam erit ad Gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis $H$, secundum tangentem $HN$ egrediens, in Parabola diametrum $HC$ & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q.E.I.*

*Corol.* 1. Si tangens $HN$ producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet $AF$ in $T$: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistentia erit ad Gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

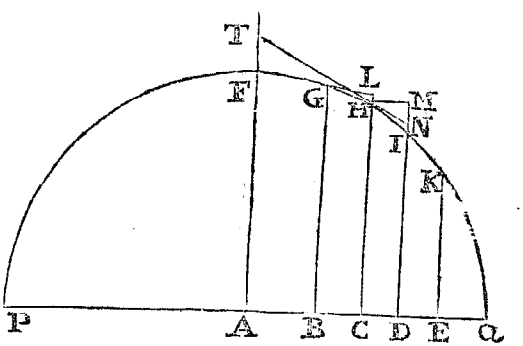
*Corol.* 2. Et hinc, si Curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam $AC$ & ordinatim applicatam $CH$,

$CH$, (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

*Exempl.* 1. Sit Linea $PFHQ$ Semicirculus ſuper diametro $PQ$ deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter $PQ$ in $A$, dic $AQ$ $n$, $AC$ $a$, $CH$ $e$, & $CD$ $o$: & erit $DIq$ ſeu $AQq-ADq=nn-aa-2ao-oo$, ſeu $ee-2ao-oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{oo}{2e}-\frac{aaoo}{2e^3}-\frac{ao^3}{2e^3}-\frac{a^3o^3}{2e^5}$ &c. Hic ſcribatur $nn$ pro $ee+aa$, & evadet $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva $o$ non extat; ſecundum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus qui hic eſt $e$, denotabit ſemper longitudinem Ordinatæ $CH$ inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis $o$; ſecundus terminus qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam




inter $CH$ & $DN$, id eſt, lineolam $MN$ quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, atque adeo poſitionem tangentis $HN$ ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo $MN$ ad $HM$ ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad $o$, ſeu $a$ ad $e$. Terminus tertius qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam $IN$ quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus $IHN$ ſeu curvaturam quam curva linea habet in $H$. Si lineola illa $IN$ finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum,

De Motu corporum termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in ſolutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annn^3}{2e^5}-$ &c, cum ſerie $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur $e$, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{annn}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt, (ob datam $n$,) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa $HT$ quæ ad ſemidiametrum $AF$ ipſi $PQ$ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad Circuli diametrum $PQ$: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi $PQ$ parallelam exeat de loco $F$, & Medii denſitas in ſingulis locis $H$ ſit ut longitudo tangentis $HT$, & reſiſtentia etiam in loco aliquo $H$ ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad $PQ$, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem $FHQ$. *Q.E.I.*

At ſi corpus idem de loco $P$, ſecundum lineam ipſi $PQ$ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi $PFQ$ moveri inciperet, ſumenda eſſet $AC$ ſeu $a$ ad contrarias partes centri $A$, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a $P$ deſcribat Circuli quadrantem $PF$. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

*Exempl.* 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens $AF$ horizonti $PQ$ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum $PDQ$ æquale eſt rectangulo ſub ordinata $DI$ & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur

recta

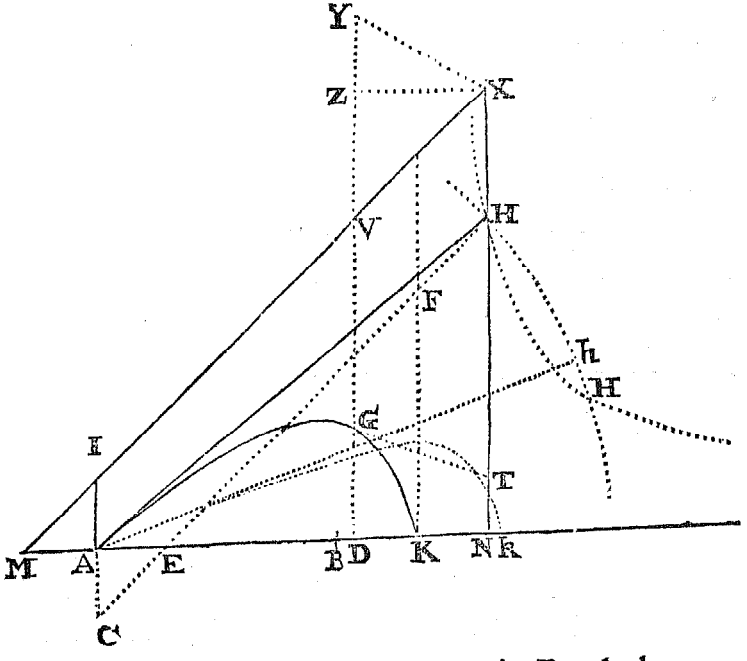
recta illa $b$, $PC$ $a$, $PQ$ $c$, $CH$ $e$ & $CD$ $o$; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo $b$ in $DI$, adeoque $DI$ æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro $Qo$, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro $Roo$. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q.E.I.* LIBER SECUNDUS.

*Exempl.* 3. Sit linea $AGK$ Hyperbola, Asymptoton habens $NX$ plano horizontali $AK$ perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit $MX$ Asymptotos altera, ordinatim applicatæ $DG$ productæ occurrens in $V$, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum $XV$ in $VG$ dabitur. Datur autem ratio $DN$ ad $VX$, & propterea datur etiam rectangulum $DN$ in $VG$. Sit illud $bb$; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur $BN$ $a$, $BD$ $o$, $NX$ $c$, & ratio data $VZ$ ad $ZX$ vel $DN$ ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit $DN$ æqualis $a-o$, $VG$ æqualis $\frac{bb}{a-o}$, $VZ$ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & $GD$ seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet $GD$ æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro $Qo$, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro $Ro^2$, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro $So^3$, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in Regula superiore, pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

ut

ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id est, si in $VZ$ sumatur $V\Upsilon$ æqualis $VG$, ut $\frac{1}{X\Upsilon}$. Namque $aa$ & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum $XZ$ & $Z\Upsilon$ quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3X\Upsilon$ ad




$2\Upsilon G$ & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem $G$, diametrum $DG$, & latus rectum $\frac{X\Upsilon quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod Medii densitates in locis singulis $G$ sint reciproce ut distantiæ $X\Upsilon$, quodque resistentia in loco aliquo $G$ sit ad gravitatem ut $3X\Upsilon$ ad $2\Upsilon G$; & corpus de loco $A$, justa cum velocitate emissum, describet Hyperbolam illam $AGK$. *Q.E.I.*

*Exempl.* 4. Ponatur indefinite, quod linea $AGK$ Hyperbola sit, centro $X$ Asymptotis $MX$, $NX$ ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus $ZD$ secet Hyperbolam in $G$ & Asymp-

Aſymptoton ejus in $V$, fuerit $VG$ reciproce ut ipſius $ZX$ vel $\mathcal{D}N$ dignitas aliqua $\mathcal{D}N^n$, cujus index eſt numerus $n$: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro $BN$, $B\mathcal{D}$, $NX$ ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque $VZ$ ad $XZ$ vel $\mathcal{D}N$ ut $d$ ad $e$, & $VG$ æqualis $\frac{bb}{\mathcal{D}N^n}$, & erit $\mathcal{D}N$ æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſerici terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro $Qo$, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro $Ro^2$, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro $So^3$. Et inde Medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis $G$, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque ſi in $VZ$ capiatur $VY$ æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciproce ut $XY$. Sunt enim $A^2$ & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipſarum $XZ$ & $ZY$ quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco $G$ fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id eſt, $XY$ ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem $G$, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2XY\,quad.}{nn+n\text{ in }VG}$ habente. *Q.E.I.*

*Scholium*

*Scholium.*

Eadem ratione qua prodiit denſitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet $V^n$ prodibit denſitas Medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}^{n-1}$.

Et propterea ſi Curva inveniri poteſt ea lege ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}^{n-1}$: corpus movebitur in hac Curva in uniformi Medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas $V^n$. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utique linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta $GT$ tanget Hyperbolam in $G$, ideoque denſitas Medii in $G$ eſt reciproce ut tangens $GT$, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut $GT$ ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

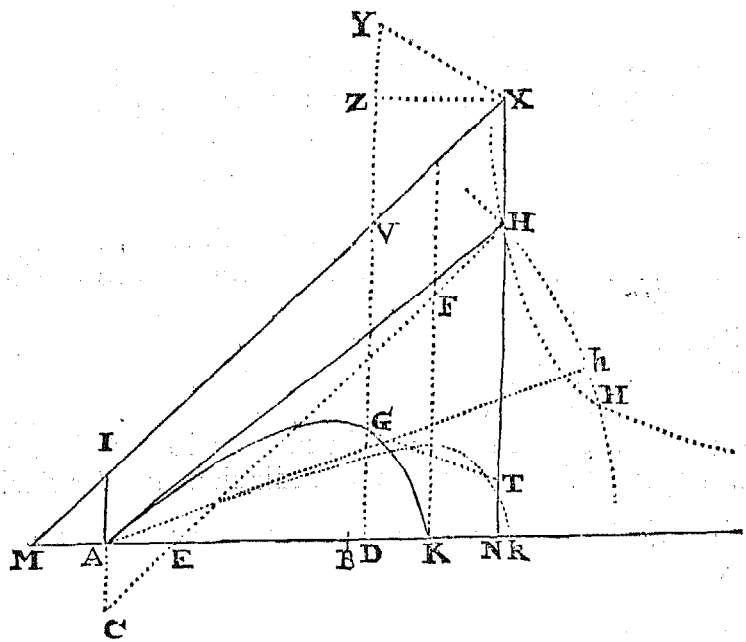
Proinde ſi corpus de loco $A$ ſecundum rectam $AH$ projectum deſcribat Hyperbolam $AGK$, & $AH$ producta occurrat Aſymptoto $MX$ in $H$, actaque $AI$ eidem parallela occurrat alteri Aſymptoto $MX$ in $I$: erit Medii denſitas in $A$ reciproce ut $AH$, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut $AH$ ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in $AI$. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

*Reg.* 1.

*Reg.* 1. Si ſervetur tum Medii denſitas in *A*, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari poteſt.

*Reg.* 2. Si ſervetur tum angulus *NAH*, tum Medii denſitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

*Reg.* 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in *A* ad




gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

De Motu Corporum

*Reg.* 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ major eſt quam in loco *A*, ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A* augeri in ratione paulo majore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

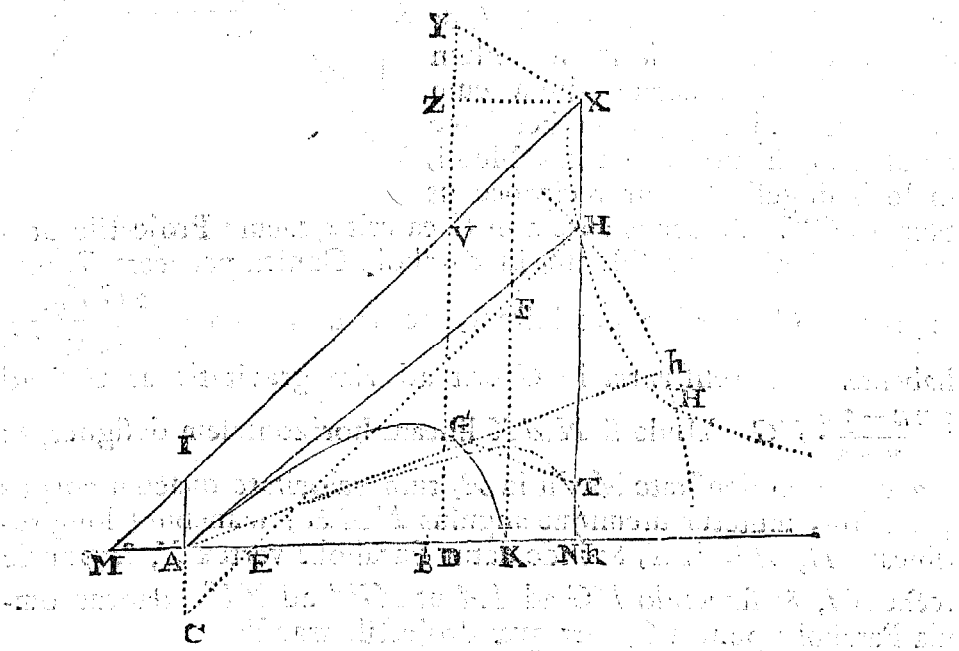
*Reg.* 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit Figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit $HX$ æqualis facto ſub $n+1$ & *AI*; centroque *X* & Aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur Hyperbola, ea lege, ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut $XV^n$ ad $XI^n$.

*Reg.* 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *K*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

*Reg.* 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, incidantque in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak}-\frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda Curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX* & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH* ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia Medii in loco *A*, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad $2AI$. Augenda eſt autem denſitas Medii per Reg. 4; & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.

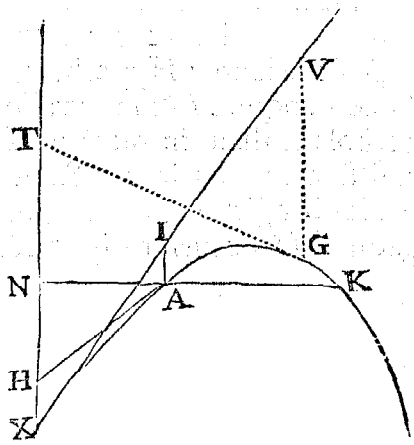
*Reg.*

*Reg.* 8. Inventis longitudinibus $AH$, $HX$; ſi jam deſideretur poſitio rectæ $AH$, ſecundum quam Projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis $K$: ad puncta $A$ & $K$ erigantur rectæ $AC$, $KF$ horizonti perpendiculares, quarum $AC$ deorſum tendat, & æquetur ipſi $AI$ ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis $AK$, $KF$ deſcribatur Hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum $C$, centroque $A$ & intervallo $AH$ deſcribatur Circulus ſecans Hyperbolam illam in puncto $H$; & Projectile ſecundum rectam $AH$ emiſſum incidet in punctum $K$. *Q. E. I.* Nam punctum $H$, ob datam longitudinem $AH$, locatur alicubi in Circulo deſcripto. Agatur $CH$ occurrens ipſis $AK$ & $KF$, illi in $E$, huic in $F$; & ob




parallelas $CH$, $MX$ & æquales $AC$, $AI$, erit $AE$ æqualis $AM$, & propterea etiam æqualis $KN$. Sed $CE$ eſt ad $AE$ ut $FH$ ad $KN$, & propterea $CE$ & $FH$ æquantur. Incidit ergo punctum $H$ in Hyperbolam Aſymptotis $AK$, $KF$ deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum $C$, atque adeo reperitur in communi interſectione Hyperbolæ hujus & Circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta $AKN$ horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus $H$, $H$ duo prodeunt anguli $NAH$, $NAH$; & quod in Praxi mechanica ſufficit

Circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam $CH$ ita applicare ad punctum $C$, ut ejus pars $FH$, Circulo & rectæ $FK$ interjecta, æqualis ſit ejus parti $CE$ inter punctum $C$ & rectam $AK$ ſitæ.




Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi $XAGK$ Parabolam deſignet quam recta $XV$ tangat in vertice $X$, ſintque ordinatim applicatæ $IA$, $VG$ ut quælibet abſciſſarum $XI$, $XV$ dignitates $XI^n$, $XV^n$; agantur $XT$, $GT$, $AH$, quarum $XT$ parallela ſit $VG$, & $GT$, $AH$ Parabolam tangant in $G$ & $A$: & corpus de loco quovis $A$, ſecundum rectam $AH$ productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis $G$, ſit reciproce ut tangens $GT$. Velocitas autem in $G$ ea erit quacum Projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica verticem $G$, diametrum $VG$ deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq.}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in $G$ erit ad vim gravitatis ut $GT$ ad $\frac{3nn-3n}{n-2} VG$. Unde ſi $NAK$ lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medii in $A$, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus $NAH$; manebunt longitudines $AH$, $AI$, $HX$, & inde datur Parabolæ vertex $X$, & poſitio rectæ $XI$, & ſumendo $VG$ ad $IA$ ut $XV^n$ ad $XI^n$, dantur omnia Parabolæ puncta $G$, per quæ Projectile tranſibit.

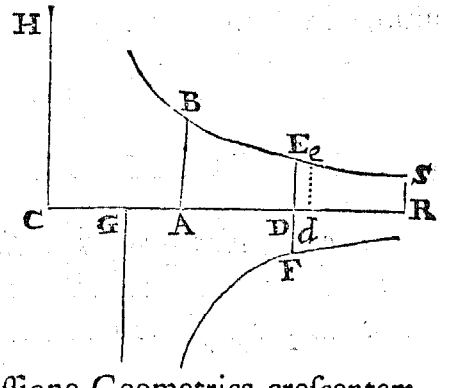
SECTIO

# SECTIO III.

## *De Motu Corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.*

### PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

*Si Corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.*




Centro $C$, Aſymptotis rectangulis $CA\mathcal{D}d$ & $CH$, deſcribatur Hyperbola $BEeS$, & Aſymptoto $CH$ parallelæ ſint $AB$, $\mathcal{D}E$, $de$. In Aſymptoto $C\mathcal{D}$ dentur puncta $A$, $G$: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam $AB\mathcal{E}\mathcal{D}$ uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem $\mathcal{D}F$, cujus reciproca $G\mathcal{D}$ una cum data $CG$ componat longitudinem $C\mathcal{D}$ in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit enim areola $\mathcal{D}Eed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit $\mathcal{D}d$ reciproce ut $\mathcal{D}E$, adeoque directe ut $C\mathcal{D}$. Ipſius autem $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11) eſt $\frac{\mathcal{D}d}{G\mathcal{D}q}$, erit ut $\frac{C\mathcal{D}}{G\mathcal{D}q}$ ſeu $\frac{CG+G\mathcal{D}}{G\mathcal{D}q}$, id eſt, ut $\frac{1}{G\mathcal{D}}+\frac{CG}{G\mathcal{D}q}$. Igitur tempore $AB\mathcal{E}\mathcal{D}$ per additionem datarum particularum $E\mathcal{D}de$ uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per Hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velo-

velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas $GD$, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data $CG$ augeatur; summa $CD$, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*

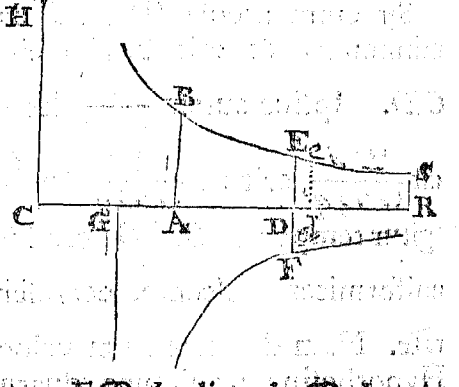
*Corol.* 1. Igitur si, datis punctis $A$, $G$, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius $GD$ reciprocam $\frac{1}{GD}$.

*Corol.* 2. Sumendo autem $GA$ ad $GD$ ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum $G$. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

## PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

*Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.*

In Asymptoto $CD$ detur punctum $R$, & erecto perpendiculo $RS$, quod occurrat Hyperbolæ in $S$, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo $GD$, quæ cum data $CG$ componit longitudinem $CD$, in progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.




Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola $Dd$, quæ decre-

decrementum eſt ipſius $GD$, erit reciproce ut $ED$, adeoque directe ut $CD$, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem $GD$ & longitudinis datæ $CG$. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula $D\,de\,E$ deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; adeoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ $GD$, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes: nimirum velocitas & linea $GD$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Igitur ſi velocitas exponatur per longitudinem $GD$, ſpatium deſcriptum erit ut area Hyperbolica $DESR$.

*Corol.* 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum $R$, invenietur punctum $G$, capiendo $GR$ ad $GD$, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis $RSED$ deſcriptum. Invento autem puncto $G$, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

*Corol.* 3. Unde cum, per Prop. XI, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

## PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

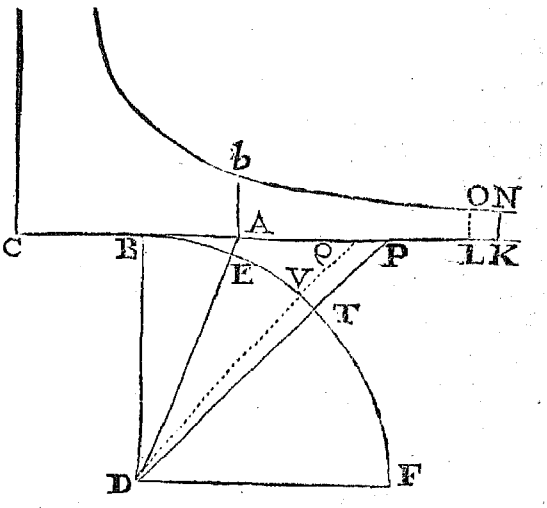
*Poſito quod Corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit, & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod ſi Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.*

*Caſ.* 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque $D$ & ſemidiametro quovis $DB$ deſcribatur Circuli quadrans $BET F$, & per ſemidiametri $DB$ terminum $B$ agatur infinita $BAP$, ſemidiametro $DF$ parallela. In ea detur punctum $A$, & capiatur ſegmentum $AP$ velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars aliqua ſit

ut

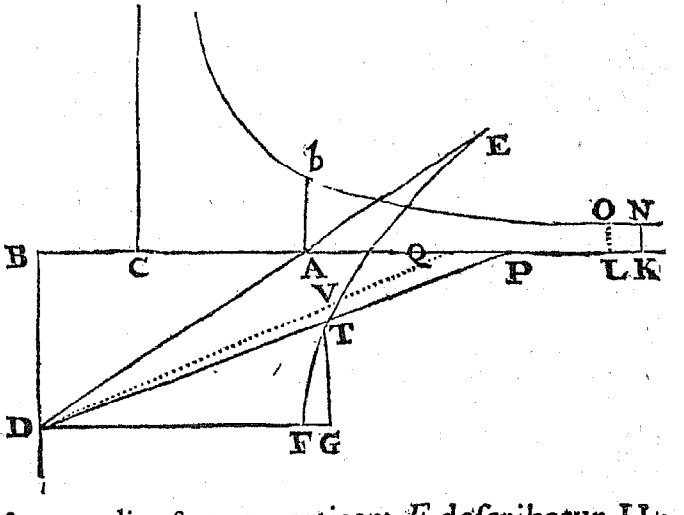
De Motu Corporum

ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, fit reſiſtentia tota in $P$ ut $AP\ quad + 2BAP$. Jungantur $DA$, $DP$ Circulum ſecantes in $E$ ac $T$, & exponatur gravitas per $DA\ quad$, ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in $P$ ut $DAq$ ad $APq + 2BAP$: & tempus aſcenſus omnis futuri erit ut Circuli ſector $EDTE$.




Agatur enim $DVQ$, abſcindens & velocitatis $AP$ momentum $PQ$, & Sectoris $DET$ momentum $DTV$ dato temporis momento reſpondens: & velocitatis decrementum illud $PQ$ erit ut ſumma virium gravitatis $DAq$ & reſiſtentiæ $APq + 2BAP$, id eſt (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) ut $DP\ quad.$ Proinde area $DPQ$, ipſi $PQ$ proportionalis, eſt ut $DP\ quad$; & area $DTV$, (quæ eſt ad aream $DPQ$ ut $DTq$ ad $DPq$) eſt ut datum $DTq$. Decreſcit igitur area $EDT$ uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum $DTV$, & propterea tempori aſcenſus futuri proportionalis eſt. $Q.E.D.$

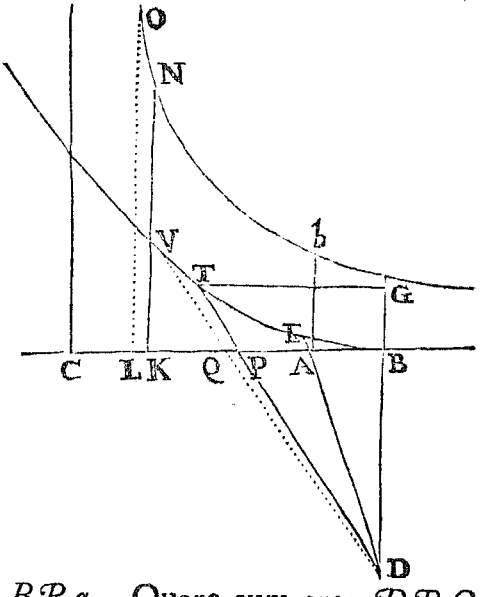
*Caſ.* 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem $AP$ ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq + 2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per $DAq$ exponi poſſit; capiatur $BD$ ejus longitudinis, ut ſit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, ſitque $DF$ ipſi $DB$ perpendicularis & æqualis, & per verticem $F$ deſcribatur Hyperbola $FTVE$ cujus ſemidiametri conjugatæ ſint $DB$ & $DF$, quæque ſecet $DA$ in $E$, & $DP$, $DQ$ in $T$ & $V$; & erit tempus aſcenſus futuri ut Hyperbolæ ſector $TDE$.




Nam

Nam velocitatis decrementum $PQ$, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area $DTV$ ad aream $DPQ$ ut $DTq$ ad $DPq$ adeoque, ſi ad $DF$ demittatur perpendiculum $GT$, ut $GTq$ ſeu $GDq - DFq$ ad $BDq$ utque $GDq$ ad $BPq$ & diviſim ut $DFq$ ad $BPq - BDq$. Quare cum area $DPQ$ ſit ut $PQ$, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area $DTV$ ut datum $DFq$. Decreſcit igitur area $EDT$ uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum $DTV$, & propterea tempori proportionalis eſt. $Q.E.D.$

*Caſ.* 3. Sit $AP$ velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo $DBA$ recto. Et ſi centro $D$, vertice principali $B$, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas $DA$, $DP$ & $DQ$ in $E$, $T$ & $V$; erit Hyperbolæ hujus ſector $DET$ ut tempus deſcenſus.




Nam velocitatis incremẽtum $PQ$, eique proportionalis area $DPQ$, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area $DTV$ eſt ad aream $DPQ$ ut $DTq$ ad $DPq$, adeoque ut $GTq$ ſeu $GDq - BDq$ ad $BPq$ utque $GDq$ ad $BDq$ & diviſim ut $BDq$ ad $BDq - BPq$. Quare cum area $DPQ$ ſit ut $BDq - BPq$, erit area $DTV$ ut datum $BDq$. Creſcit igitur area $EDT$ uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum $DTV$, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. $Q.E.D.$

*Corol.* Igitur velocitas $AP$ eſt ad velocitatem quam corpus tempore $EDT$, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli $DAP$ ad aream ſectoris centro $D$, radio $DA$, angulo $ADT$ deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in Medio non reſiſtente, tem-

pori atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

## PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

*Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.*

Capiatur $AC$ (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & $AK$ resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti $A$ si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur $Ab$ quæ sit ad $DB$ ut $DBq$ ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires $CK$ in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream $DET$.

Nam cum $AK$ sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$, assumatur data quævis quantitas $Z$, & ponatur $AK$ æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma 11.) erit ipsius $AK$ momentum $KL$ æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

*Cas.* 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente $BET$ Circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea $AC$, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & $DPq$ seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ideoque area $DTV$ erit ad aream $DPQ$ ut $DTq$ vel $DBq$ ad $CK \times Z$.

*Cas.*

*Caſ.* 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$ linea $AC$ (Fig. Caſ. 2. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & $DTq$ erit ad $DPq$ ut $DFq$ ſeu $DBq$ ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area $DTV$ erit ad aream $DPQ$ ut $DBq$ ad $CK \times Z$.

*Caſ.* 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea $AC$ (Fig. Caſ. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area $DTV$ ad aream $DPQ$ ut $DBq$ ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area $DTV$, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area $DPQ$, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad $BDq$. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ $DET$ momentum $DTV$ ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas $AP$, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

*Corol.* Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M, quæ oritur applicando aream $DET$ ad $BD$, quam habet linea $DA$ ad lineam $DE$; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tempore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut $V^2$, & ob datas $BD$ & $AB$, ut

De Motu Corporum

$\frac{B\mathcal{D}\times V^2}{4AB}$. Momentum hujus areæ ſive huic æqualis $\frac{\mathcal{D}Aq\times B\mathcal{D}\times M^2}{\mathcal{D}Eq\times AB}$ eſt ad momentum differentiæ arearum $\mathcal{D}ET$ & $AbNK$, ut $\frac{\mathcal{D}Aq\times B\mathcal{D}\times 2M\times m}{\mathcal{D}Eq\times AB}$ ad $\frac{AP\times B\mathcal{D}\times m}{AB}$, hoc eſt, ut $\frac{\mathcal{D}Aq\times B\mathcal{D}\times M}{\mathcal{D}Eq}$ ad $\frac{1}{2}B\mathcal{D}\times AP$, ſive ut $\frac{\mathcal{D}Aq}{\mathcal{D}Eq}$ in $\mathcal{D}ET$ ad $\mathcal{D}AP$; adeoque ubi areæ $\mathcal{D}ET$ & $\mathcal{D}AP$ quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eſt area quam minima $\frac{B\mathcal{D}\times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum $\mathcal{D}ET$ & $AbNK$. Unde cum ſpatia in Medio utroque, in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc ſunt ad invicem ut area $\frac{B\mathcal{D}\times V^2}{4AB}$ & arearum $\mathcal{D}ET$ & $AbNK$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceſſe eſt ut in æqualibus quibuſcunque temporibus ſint ad invicem ut area illa $\frac{B\mathcal{D}\times V^2}{4AB}$ & arearum $\mathcal{D}ET$ & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

SECTIO

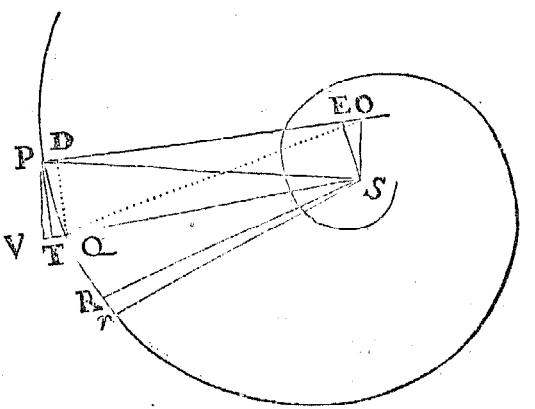
# SECTIO IV.

## *De Corporum Circulari Motu in Mediis reſiſtentibus.*

### LEMMA III.

*Sit* PQRr *Spiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis $OPQ$, $OQR$ ſubducantur anguli æquales $SPQ$, $SQR$, & manebunt anguli æquales $OPS$, $OQS$. Ergo Circulus qui tranſit per puncta $O$, $S$, $P$ tranſibit etiam per punctum $Q$. Coeant puncta $P$ & $Q$, & hic Circulus in loco coitus $PQ$ tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam $OP$. Fiet igitur $OP$ diameter Circuli hujus, & angulus $OSP$ in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*




Ad $OP$ demittantur perpendicula $QD$, $SE$, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: $TQ$ ad $PD$ ut $TS$ vel $PS$ ad $PE$, ſeu $2PO$ ad $2PS$. Item $PD$ ad $PQ$ ut $PQ$ ad $2PO$. Et ex æquo perturbate $TQ$ ad $PQ$ ut $PQ$ ad $2PS$. Unde fit $PQq$ æquale $TQ \times 2PS$. *Q. E. D.*

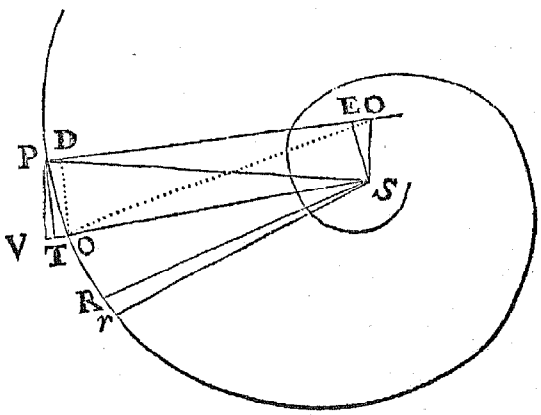
PROPO-

DE MOTU CORPORUM

## PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

*Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.*

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur $SQ$ ad $V$, ut ſit $SV$ æqualis $SP$. Tempore quovis, in Medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum $PQ$, & tempore duplo arcum quam minimum $PR$; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus qui in Medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcus $PQ$ pars quarta decrementi arcus $PR$. Unde etiam, ſi areæ $PSQ$ æqualis capiatur area $QSr$, erit decrementum arcus $PQ$ æquale dimidio lineolæ $Rr$; adeoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & $TQ$ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in $P$, eſt reciproce ut $SPq$, & (per Lem. x. Lib. 1,) lineola $TQ$, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus $PQ$ deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$ id eſt (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus $PQ$ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius $SP$ reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus $QR$ deſcribitur, eſt in ſubduplicata



duplicata ratione ipsius $SQ$ reciproce. Sunt autem arcus illi $PQ$ & $QR$ ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione $SQ$ ad $SP$, sive ut $SQ$ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos $SPQ$, $SQr$ & æquales areas $PSQ$, $QSr$, est arcus $PQ$ ad arcum $Qr$ ut $SQ$ ad $SP$. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus $PQ$ ad arcum $Rr$ ut $SQ$ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ sit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus $PQ$, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum $Rr$, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem $PQ$ ad $Rr$, ut $SQ$ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis $P$ & $Q$ coeuntibus, $SP$ & $SQ$ coincidunt, & angulus $PVQ$ fit rectus; & ob similia triangula $PVQ$, $PSO$, fit $PQ$ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut $OP$ ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis Medii in $P$ & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in $P$ ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem $OS$ ad $OP$, densitas Medii in $P$ erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro $SP$, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Velocitas in loco quovis $P$ ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam $SP$.

*Corol.* 2. Medii densitas, si datur distantia $SP$, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

*Corol.* 3. Vis resistentiæ in loco quovis $P$, est ad vim centripetam

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad $OP$. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & $TQ$ ſive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}VQ$ & $PQ$, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & $OP$. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

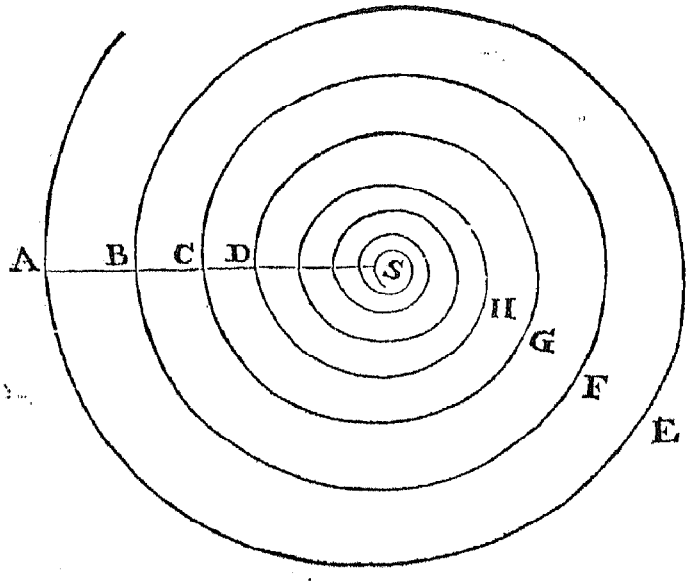
*Corol.* 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta $PS$, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. x, Lib. 1,) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

*Corol.* 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali $PQR$ atque in recta $SP$, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ $PS$ eſt in data ratione, nempe in ratione $OP$ ad $OS$; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta $SP$ in eadem illa data ratione, proindeque datur.

*Corol.* 6. Si centro $S$ intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo Circuli; & manentibus hiſce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio $PS$: numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum radio $PS$; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut Secans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut Medii denſitas.

*Corol.* 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque $AEB$ circa centrum illud fecerit, & Radium primum $AS$ in eodem angulo ſecuerit in $B$ quo prius in $A$, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in $A$ reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro (id eſt, ut $AS$ ad mediam proportionalem inter $AS$ & $BS$) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones $BFC$, $CGD$ &c. facere, & interſectionibus

ctionibus distinguet Radium $AS$ in partes $AS$, $BS$, $CS$, $DS$, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut 




perimetri Orbitarum $AEB$, $BFC$, $CGD$, &c. directe, & velocitates in principiis $A$, $B$, $C$, inverse; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad $AB$ quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

*Corol.* 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro $S$, intervallis continue proportionalibus $SA$, $SB$, $SC$, &c. describe Circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium $AS$, ad Secantem anguli

quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum Tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter Circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

*Corol.* 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

## PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

*Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.*

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in $P$ sit reciproce ut distantiæ $SP$ dignitas quælibet $SP^{n+1}$ cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis $PQ$ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & resistentia in $P$ ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, adeoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut $SP^{n+1}$. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in $P$ erit reciproce ut $SP$.

*Corol.* 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad $OP$.

*Corol.* 2. Si vis centripeta sit reciproce ut $SP^{cub}$, erit $1-\frac{1}{2}n=0$; adeoque resistentia & densitas Medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

*Corol.* 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii $SP$ cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

*Scho-*

*Scholium.*

Cæterum hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

*Invenire & vim centripetam & Medii reſiſtentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi poteſt.*

Sit Spiralis illa $PQR$. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum $PQ$ dabitur tempus, & ex altitudine $TQ$, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum $PSQ$ & $QSR$, differentia $RSr$, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas Medii.

## PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

*Data Lege vis centripetæ, invenire Medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam Spiralem deſcribet.*

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii denſitas: ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione decima, & Lemmate ſecundo; & Lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

De Motu Corporum

# SECTIO V.

## *De Denſitate & Compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.*

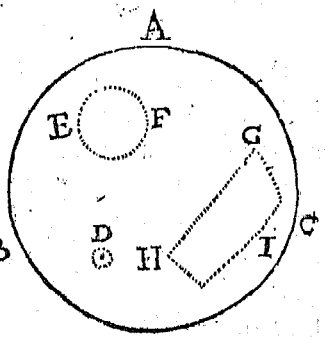
### Definitio Fluidi.

*Fluidum eſt corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.*

### PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

*Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & abſque omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.*

*Caſ.* 1. In vaſe ſphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra Hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra Hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars



rs eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de lo- ſuo movebitur. *Q. E. D.*

*Caſ.* 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqua- er premuntur undique: ſit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi ɔc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſ- ıe dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per aſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſ- ɔnem permanebunt in locis ſuis, per Caſum eundum primum, & ditione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitio- ːm Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod Sphæ- *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

*Caſ.* 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æ- ıalis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo pre- unt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, ːr Caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur ıæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia ngere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

*Caſ.* 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur ualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus Sphæ- ːis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas Sphæricas æquali- r premunt, per Caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur; ːr Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

*Caſ.* 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo nquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes ıtem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; ma- feſtum eſt quod Fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premi- r æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & qui- ːunt inter ſe. *Q. E. D.*

*Caſ.* 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & ıdique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per eſinitionem Fluiditatis.

*Caſ.* 7. Ideoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſio- ːm fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur li- ıorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ː preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, ıam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per ſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique l æqualitatem, in momento temporis, abſque motu locali: & ſub- de partes fluidi, per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqua- ːer, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

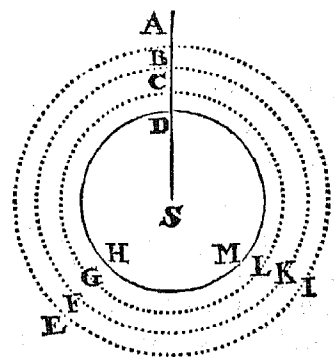
*Coral.*

De Motu Corporum

*Corol.* Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

## PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

*Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus Cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.*




Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *A E I* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem Orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *A E* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *B F K* (per Prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione, pro menſura ſua, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *C G L*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus Cylindri præfi-

præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*



*Corol.* 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

*Corol.* 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

*Corol.* 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

*Corol.* 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX, jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

*Corol.* 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquili-

De Motu Corporum

æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

*Corol.* 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

*Corol.* 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

*Corol.* 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

*Corol.* 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollarium

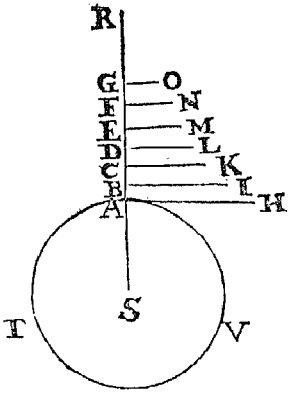
Prop.

Prop. XIX, quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

## PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

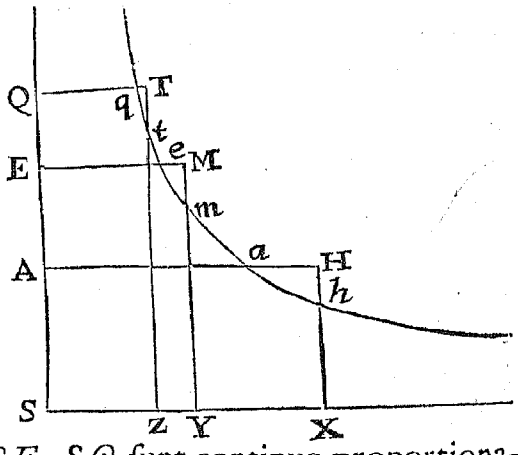
*Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.*

Deſignet $ATV$ fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, $S$ centrum, $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula $AH$, $BI$, $CK$, $DL$, $EM$, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis $A$, $B$, $C$, $D$, $E$; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab $A$ ad $B$, a $B$ ad $C$, a $C$ ad $D$, &c. factis per gradus decrementis in punctis $B$, $C$, $D$, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines $AB$, $BC$, $CD$, &c. conficient preſſiones $AH$, $BI$, $CK$, quibus fundum $ATV$ (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula $A$ preſſiones omnes $AH$, $BI$, $CK$, $DL$, pergendo in infinitum; & particula $B$ preſſiones omnes præter primam $AH$; & particula $C$ omnes præter duas primas $AH$, $BI$; & ſic deinceps: adeoque particulæ primæ $A$ denſitas $AH$ eſt ad particulæ ſecundæ $B$ denſi-



tatem $BI$ ut ſumma omnium $AH+BI+CK+\mathcal{D}L$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. Et $BI$ denſitas ſecundæ $B$, eſt ad $CK$ denſitatem tertiæ $C$, ut ſumma omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. ad ſummam omnium $CK+\mathcal{D}L$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis $AH, BI, CK$, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ $AH, BI, CK$, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis $A, B, C$, &c. ſint ut $AH, BI, CK$, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis $SA, SC, SE$ continue proportionalibus, erunt denſitates $AH, CK, EM$ continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus $SA, S\mathcal{D}, SG$, denſitates $AH, \mathcal{D}L, GO$ erunt continue proportionales. Coeant jam puncta $A, B, C, \mathcal{D}, E$, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo $A$ ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus $SA, S\mathcal{D}, SG$, denſitates $AH, \mathcal{D}L, GO$, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta $A$ & $E$, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco $\mathcal{Q}$. Centro $S$, Aſymptotis rectangulis $S\mathcal{Q}$, $SX$, deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula $AH$, $EM$, $\mathcal{Q}T$ in $a, e, q$, ut & perpendicula $HX$, $MY$, $TZ$, ad Aſymptoton $SX$ demiſſa, in $h, m$ & $t$. Fiat area $ZTmtZ$ ad aream datam $TmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea $Zt$ producta abſcindet lineam $\mathcal{Q}T$ denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ $SA, SE, S\mathcal{Q}$ ſunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $TmtZ, XhmT$ etiam æquales, & lineæ $SX, ST, SZ$, id eſt $AH, EM, \mathcal{Q}T$ continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ $SA, SE, S\mathcal{Q}$ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ $AH, EM, \mathcal{Q}T$, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

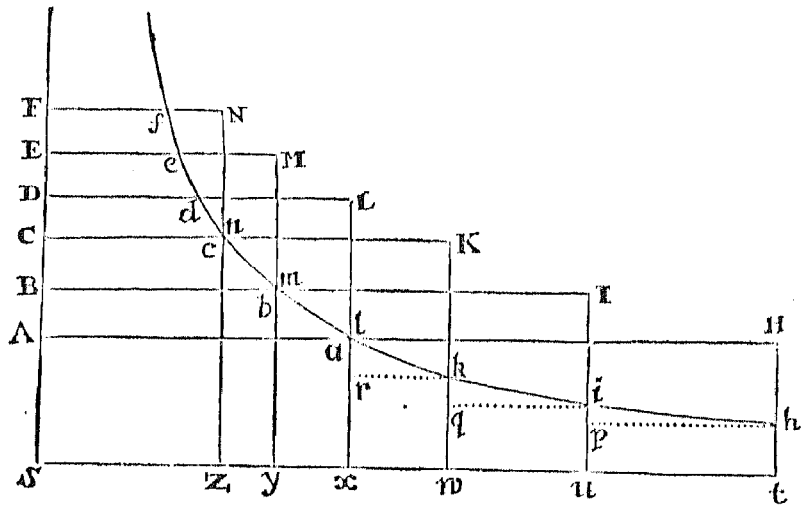



PROPO-

## PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

*Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.*

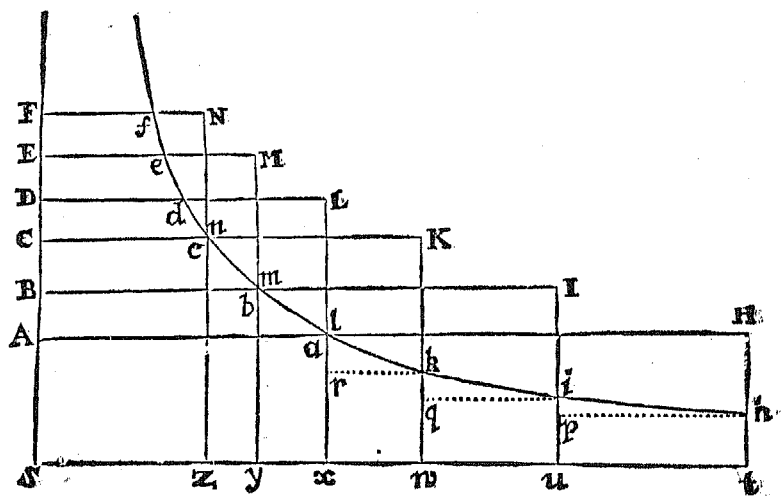
Deſignet $S$ centrum, & $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$ diſtantias in progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula $AH$, $BI$, $CK$, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, &c. & ipſius




gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}, \frac{BI}{SBq}, \frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab $A$ ad $B$, ſecundam a $B$ ad $C$, tertiam a $C$ ad $D$, &c. Et hæ ductæ in altitudines $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias $SA$, $SB$, $SC$, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH-BI$, $BI-CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c.

De Motu Corporum

Centro $S$, Asymptotis $SA$, $Sx$, describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula $AH$, $BI$, $CK$, &c. in $a, b, c$, &c. ut & perpendicula ad Asymptoton $Sx$ demissa $Ht$, $Iu$, $Kw$ in $h$, $i$, $k$; & densitatum differentiæ $tu$, $uw$, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu $tp$, $uq$, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut $Aa$, $Bb$, &c. Est enim, ex natura Hyperbolæ, $SA$ ad $AH$ vel $St$, ut $th$ ad $Aa$, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale $Aa$.




Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale $Bb$, &c. Sunt autem $Aa$, $Bb$, $Cc$, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula $tp$, $uq$, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum $A$, $B$, $C$, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur

tur jam distantiæ quælibet, puta $SA$, $S\mathcal{D}$, $SF$ in progressione Musica, & differentiæ $Aa - \mathcal{D}d$, $\mathcal{D}d - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates $St$, $Sx$, $Sz$, id est, $AH$, $\mathcal{D}L$, $FN$, continue proportionales. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta $AH$ & $CK$, dabitur area $thkw$ harum differentiæ $tw$ respondens; & inde invenietur densitas $FN$ in altitudine quacunque $SF$, sumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

## *Scholium.*

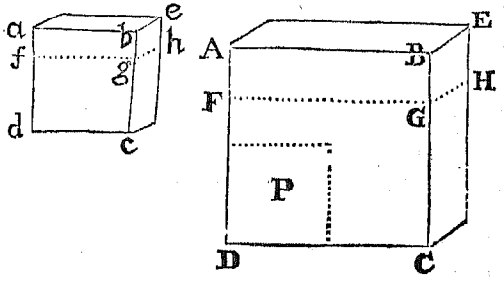
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro, & quadratorum distantiarum $SA$, $SB$, $SC$, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione Arithmetica; densitates $AH$, $BI$, $CK$, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione Arithmetica; densitates $AH$, $BI$, $CK$, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis Leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione

tione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

## PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

*Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versa, particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.*

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico $ACE$, dein compressione redigi in spatium cubicum minus $ace$; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera $AB$, $ab$; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia $AB\,cub.$ & $ab\,cub.$ In latere cubi majoris $ABC\mathcal{D}$ capiatur quadratum $\mathcal{D}\mathcal{P}$ æquale lateri cubi minoris $db$; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum $\mathcal{D}\mathcal{P}$ urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum $db$ urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut $ab\,cub.$ ad $AB\,cub.$ Sed pressio qua quadratum $\mathcal{D}B$ urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum $\mathcal{D}\mathcal{P}$ urget idem Fluidum, ut quadratum $\mathcal{D}B$ ad quadratum $\mathcal{D}\mathcal{P}$, hoc est, ut $AB\,quad.$ ad $ab\,quad.$ Ergo, ex æquo, pressio qua latus $\mathcal{D}B$ urget Fluidum, est ad pressionem qua latus $db$ urget Fluidum, ut $ab$ ad $AB$. Planis $FGH$, $fgh$, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis $AC$, $ac$, hoc est, in proportione $ab$ ad $AB$: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana $FGH$, $fgh$ exercent in omnes,



nes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum $FGH$ in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum $fgh$ in cubo minore ut $ab$ ad $AB$, hoc eſt, reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt, reciproce ut cuborum latera $AB$, $ab$; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum $DB$, $db$ ut ſummæ virium; & preſſio quadrati $DP$ ad preſſionem lateris $DB$ ut $ab\ quad.$ ad $AB\ quad.$ Et, ex æquo, preſſio quadrati $DP$ ad preſſionem lateris $db$ ut $ab\ cub.$ ad $AB\ cub.$ id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

## *Scholium.*

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitarum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet $D^n$, cujus index eſt numerus $n$; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis $E^{n+2}$, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac Propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECTIO

PAGE 272 MISSING

*Corol.* 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

*Corol.* 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

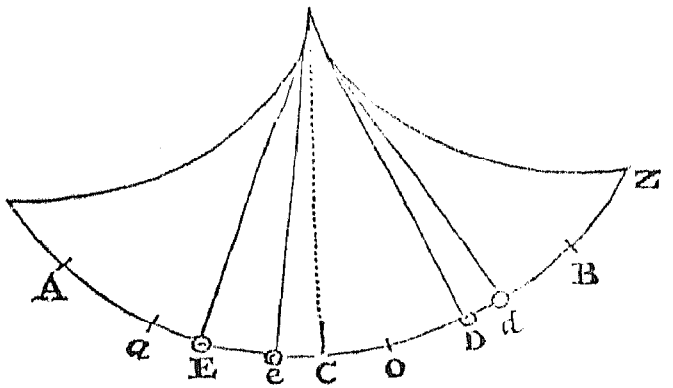
*Corol.* 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

*Corol.* 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

## PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

*Corpora Funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.*

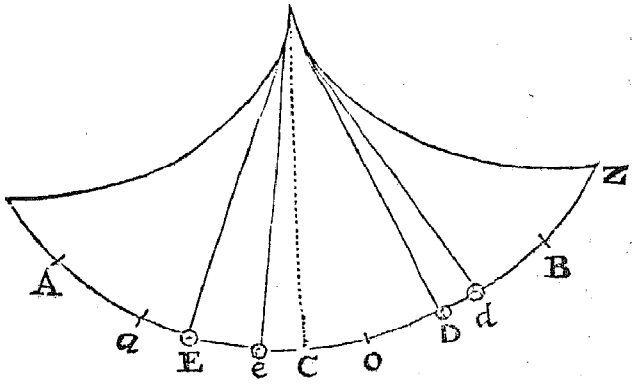
Sit $AB$ Cycloidis arcus, quem corpus $D$ tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in $C$, ita ut $C$ ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis $D$ vel $d$ vel $E$ ut longitudo arcus $CD$ vel $Cd$ vel $CE$.




Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

De Motu Corporum

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem $CO$, & ſumatur arcus $Od$ in ratione ad arcum $C\mathcal{D}$ quam habet arcus $OB$ ad arcum $CB$: & vis qua corpus in $d$ urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis $Cd$ ſupra reſiſtentiam $CO$, exponetur per arcum $Od$, adeoque erit ad vim qua corpus $\mathcal{D}$ urgetur in Medio non reſiſtente, in loco $\mathcal{D}$, ut arcus $Od$ ad arcum $C\mathcal{D}$; & propterea etiam in loco $B$ ut arcus $OB$ ad arcum $CB$. Proinde ſi corpora duo, $\mathcal{D}$, $d$ exeant de loco $B$, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus $CB$ & $OB$, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi $B\mathcal{D}$ & $Bd$, & arcus reliqui $C\mathcal{D}$, $Od$ erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis $C\mathcal{D}$, $Od$ proportionales, manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui $C\mathcal{D}$, $Od$ ſemper erunt ut arcus toti $CB$, $OB$, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo $\mathcal{D}$, $d$ ſimul pervenient ad loca $C$ & $O$, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum $C$, & alterum in Medio reſiſtente ad locum $O$. Cum autem velocitates in $C$ & $O$ ſint ut arcus $CB$, $OB$; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi $CE$ & $Oe$. Vis qua corpus $\mathcal{D}$ in Medio non reſiſtente retardatur in $E$ eſt ut $CE$, & vis qua corpus $d$ in Medio reſiſtente retardatur in $e$ eſt ut ſumma vis $Ce$ & reſiſtentiæ $CO$, id eſt ut $Oe$; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus $CE$, $Oe$ proportionales arcus $CB$, $OB$; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum $CB$ & $OB$; & propterea ſi ſumantur arcus toti $AB$, $aB$ in eadem ratione, corpora $\mathcal{D}$, $d$ ſimul deſcribent hos arcus, & in locis $A$ & $a$ motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis $BA$, $Ba$ proportionales ſunt arcuum partes quælibet $B\mathcal{D}$, $Bd$ vel $BE$, $Be$ quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*




*Corol.*

*Corol.* Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

## PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

*Corporum Funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.*

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

*Si Corporibus Funependulis reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.*

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id eſt, ut A A ad B B, quam proxime. Si reſiſtentia

De Motu Corporum

ſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Idcoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

*Corol.* 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

## PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

*Si Corpori Funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad pendulì longitudinem duplicatam.*

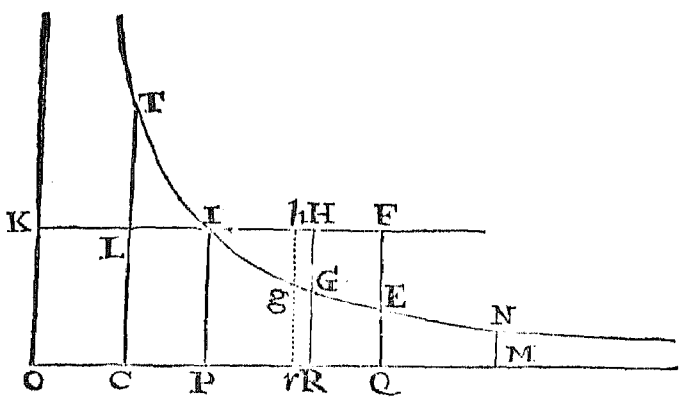
Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione

ſitione XXV conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis $\mathcal{D}$, ad vim reſiſtentiæ ut arcus $C\mathcal{D}$ ad arcum $CO$, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius $Aa$. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum $C$ ad arcum $CO$; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum $Aa$. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

*Poſito quod Corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.*

Sit $Ba$ (Fig. Prop. XXV) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque $C$ infimum Cycloidis punctum, & $CZ$ ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia cor-

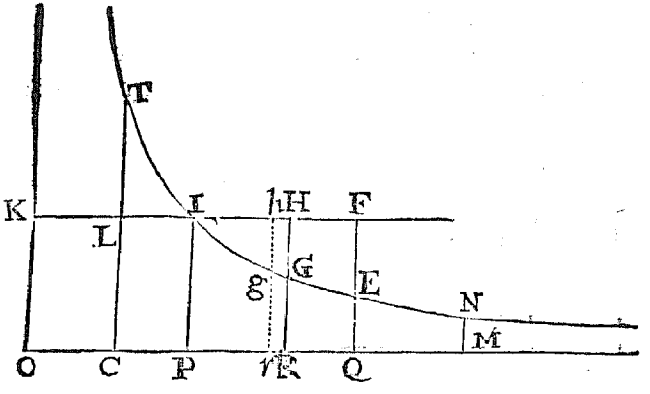



poris in loco quovis $\mathcal{D}$. Secetur recta infinita $O\mathcal{Q}$ in punctis $O$, $C$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ea lege, ut (ſi erigantur perpendicula $OK$, $CT$, $\mathcal{P}I$, $\mathcal{Q}E$, centroque $O$ & Aſymptotis $OK$, $O\mathcal{Q}$ deſcribatur Hyperbola $TIGE$ ſecans perpendicula $CT$, $\mathcal{P}I$, $\mathcal{Q}E$ in $T$, $I$ & $E$, & per punctum $I$ agatur $KF$ parallela Aſymptoto $O\mathcal{Q}$ occurrens Aſymptoto $OK$ in $K$, & perpendiculis $CT$ & $\mathcal{Q}E$ in $L$ & $F$) fuerit area Hyperbolica $\mathcal{P}IE\mathcal{Q}$ ad aream Hyperbolicam $\mathcal{P}ITC$ ut arcus $BC$ deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum $Ca$ aſcenſu deſcriptum, & area $IEF$ ad

aream

aream $ILT$ ut $OQ$ ad $OC$. Dein perpendiculo $MN$ abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus $CZ$ ad arcum $BC$ descensu descriptum. Et si perpendiculo $RG$ abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet $CD$ ad arcum $BC$ descensu toto descriptum: erit resistentia in loco $D$ ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis $Z, B, D, a$ urgetur, sint ut arcus $CZ, CB, CD, Ca$, & arcus illi sint ut areæ $PINM, PIEQ, PIGR, PITC$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper $Dd$ spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis $RG$, $rg$ comprehensam; & pro-




ducatur $rg$ ad $h$, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum $IGH, PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incrementum $GHhg-\frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr\times HG-\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr\times RG$, ut $HG-\frac{IEF}{OQ}$ ad $RG$; adeoque ut $OR\times HG-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR\times GR$ seu $OP\times PI$, hoc est (ob æqualia $OR\times HG, OR\times HR-OR\times GR, ORHK-OPIK, PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$

dicatur

dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR - Y$.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo $CD$ proportionalem, qua corpus urgetur in $D$: & R pro resistentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in $D$. Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia (per Hypothesin) sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per Lem. II) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & $V - R$ conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR - Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR - Y$, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo $Ca$, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum $C$, resistentia citius evanescet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit definitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus $CD$, $CD$ arcubus $CB$ & $Ca$ æquantur, adeoque ubi recta $RG$ incidit in rectas $QE$ & $CT$. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit definitque ubi nulla est, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & $IGH$ æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta $RG$ incidit in rectas $QE$ & $CT$. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. $Q.E.D.$

*Corol.*

*Corol.* 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* ad aream *PINM*.

*Corol.* 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* − Y) evadit nullum.

*Corol.* 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

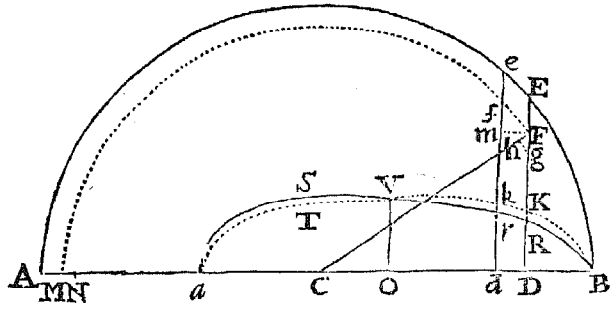
Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

## PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

*Si recta* aB *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* ſecundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli

penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit $\mathcal{D}K$ exponens resistentiæ. Centro $C$ & intervallo $CA$ vel $CB$ construatur Semicirculus $BEeA$. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium $\mathcal{D}d$, & erectis perpendiculis $\mathcal{D}E$, $de$ circumferentiæ occurrentibus in $E$ & $e$, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto $B$, acquireret in locis $\mathcal{D}$ & $d$. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa $\mathcal{D}E$, $de$; sitque $\mathcal{D}F$ velocitas quam acquirit in $\mathcal{D}$ cadendo de $B$ in Medio resistente. Et si centro $C$ & intervallo $CF$ describatur Circulus $FfM$ occurrens rectis $de$ & $AB$ in $f$ & $M$, erit $M$ locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & $df$ velocitas quam acquireret in $d$. Unde etiam si $Fg$ designet velocitatis momentum quod corpus $\mathcal{D}$, describendo spatium quam minimum $\mathcal{D}d$, ex resistentia Medii amittit; & sumatur $CN$ æqualis $Cg$: erit $N$ locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & $MN$ erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad $df$ demittatur perpendiculum $Fm$, & velocitatis $\mathcal{D}F$ decrementum $Fg$ a resistentia $\mathcal{D}K$ genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum $fm$ a vi $C\mathcal{D}$ genitum, ut vis generans $\mathcal{D}K$ ad vim generantem $C\mathcal{D}$. Sed & ob similia triangula $Fmf$, $Fhg$, $F\mathcal{D}C$, est $fm$ ad $Fm$ seu $\mathcal{D}d$, ut $C\mathcal{D}$ ad $\mathcal{D}F$; & ex æquo $Fg$ ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad $\mathcal{D}F$. Item $Fh$ ad $Fg$ ut $\mathcal{D}F$ ad $CF$; & ex æquo perturbate, $Fh$ seu $MN$ ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad $CF$ seu $CM$; ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$. Ad punctum mobile $M$ erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ $CM$, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem $Aa$; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, adeoque summæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$, id est, areæ $BKkVTa$. Q. E. D.

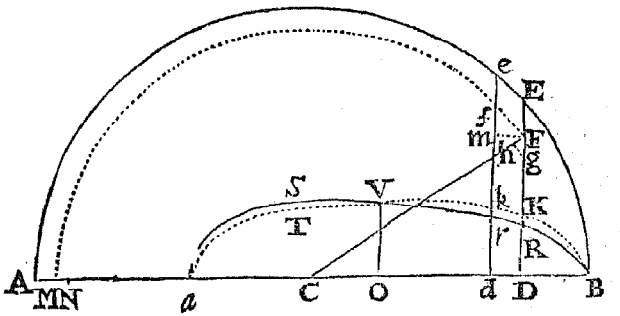



*Corol.* Hinc ex lege resistentiæ & arcuum $Ca$, $CB$ differentia $Aa$, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

De Motu Corporum

Nam si uniformis sit resistentia $\mathcal{D}K$, Figura $aBKkT$ rectangulum erit sub $Ba$ & $\mathcal{D}K$; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & $Aa$ erit æquale rectangulo sub $Ba$ & $\mathcal{D}K$, & $\mathcal{D}K$ æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum $\mathcal{D}K$ sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. XXVIII demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem $BA$, velocitas in loco quovis $\mathcal{D}$ foret ut Circuli diametro $AB$ descripti ordinatim applicata $\mathcal{D}E$. Proinde cum $Ba$ in Medio resistente, & $BA$ in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius $Ba$ punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis $BA$, ut est $Ba$ ad $BA$; erit velocitas $\mathcal{D}K$ in Medio resistente ut Circuli vel Ellipseos super diametro $Ba$ descripti ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit $OV$ exponens resistentiæ in puncto Medio $O$; & Ellipsis $aBRVS$, centro $O$, semiaxibus $OB$, $OV$ descripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, $Aa$ ad $OV$ ut area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in $O$ ad ejusdem gravitatem.




Quod si resistentia $\mathcal{D}K$ sit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens $V$ & axem $OV$, ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & $OV$ quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & $Aa$ æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & $OV$, adeoque $OV$ æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in $O$ ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola $BRVSa$ congruat cum

cum Figura $BKVTa$ in puncto medio $V$, hæc si ad partem alterutram $BRV$ vel $VSa$ excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime. 

## PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

*Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.*

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum $CB$, $Ca$ differentia $Aa$, æqualis erat areæ $BKT$. Et area illa, si maneat longitudo $aB$, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum $DK$; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo $aB$ & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub $Aa$ & $\frac{1}{2}aB$ est ut $aB$ & resistentia conjunctim, & propterea $Aa$ ut resistentia. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

*Corol.* 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

*Corol.* 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

*Corol.* 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

*Corol.* 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

## *Scholium Generale.*

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{3}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^{2}$. Cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum reſiſtentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo obſervatæ, velocitates vero maximæ ponendæ ſunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A = 0{,}0000916$, $B = 0{,}0010847$, & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V + 0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^{2}$: & propterea cum (per Corollarium Propoſitionis xxx) reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^{2}$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583\,V + 0{,}0007546\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169\,V^{2}$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030298 ad 121, in quarto ut 0,0417402 ad 121, in ſexto ut 0,61675 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{1}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis

&

De Motu Corporum

& centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\frac{3}{11}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61675 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0,56752 ad 213,4 id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descen-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Deſcenſus primus* | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Aſcenſus ultimus* | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| *Numerus Oſcillat.* | 374 | 272 | $162\frac{1}{2}$ | $83\frac{1}{3}$ | $41\frac{2}{3}$ | $22\frac{2}{3}$ |

Poſtea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum Globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Deſcenſus primus* | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Aſcenſus ultimus* | $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{4}$ | $3\frac{1}{2}$ | 7 | 14 | 28 | 56 |
| *Numerus Oſcillat.* | 226 | 228 | 193 | 140 | $90\frac{1}{2}$ | 53 | 30 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Deſcenſus primus* | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| *Aſcenſus ultimus* | $\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | 3 | 6 | 12 | 24 | 48 |
| *Numerus Oſcillat.* | 510 | 518 | 420 | 318 | 204 | 121 | 70 |

In Tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000207V^{\frac{1}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$, ut $0{,}002217V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia Globi lignei ad reſiſtentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id eſt, ut $7\frac{4}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam

De Motu Corporum

ſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{1}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur

untur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; adeoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{1}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{1}{8}$ digitorum.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum* | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 2 | $\frac{1}{4}$ |
| *Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum* | 48 | 24 | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| *Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum* | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| *Numerus Oſcillationum in aqua* | | | $\frac{29}{60}$ | $1\frac{1}{5}$ | 3 | 7 | $11\frac{1}{4}$ | $12\frac{2}{3}$ | $13\frac{1}{3}$ |
| *Numerus Oſcillationum in aere* | $85\frac{1}{2}$ | | 287 | 535 | | | | | |

De Motu Corporum

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum, in casu columnæ quartæ, ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{3}{7}$: atque adeo resistentia, cum sit ut $\frac{2}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plus-

pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Arcus deſcenſu primo deſcriptus* | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| *Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus* | 12 | 6 | 3 | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| *Arcuum diff. motui amiſſo proport.* | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| *Numerus Oſcillationum* | $3\frac{3}{8}$ | $6\frac{1}{2}$ | $12\frac{1}{12}$ | $21\frac{1}{5}$ | 34 | 53 | $61\frac{1}{5}$ |

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis Vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, procul-

De Motu Corporum

dubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

tallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & diviſim $A+B$ ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque $A+B$ ad B ut $77\times77$ ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex Hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua cauſa latente oriatur, ſed ab actione ſola Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SECTIO

De Motu Corporum

# SECTIO VII.

## *De Motu Fluidorum & Reſiſtentia Projectilium.*

### PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

*Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno Syſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, (eæ inter ſe quæ in uno ſunt Syſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt Syſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent ſe mutuo, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe: dico quod Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri.*

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius Syſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales Figurarum ſimilium partes a particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incæptorum motuum, pergent ſimiliter moveri uſque donec ſibi mutuo occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per Legum Corollarium ſecun-

ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1, & 8 Prop. IV, Lib. 1. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

*Corol.* 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis Syſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

*Iſdem poſitis, dico quod Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium Syſtematum.*

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Syſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum.

Prioris

Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per Hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque (cum diſtantiæ particularum Syſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Syſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum) reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium Syſtematum. *Q. E. D.* Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter earum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

*Corol.* 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtentiam patitur quæ eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpo-

diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum $A$ & $B$ fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut $T$ & $V$, illæ Medii $C$ ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia $D$, $E$, $F$, $G$ in his Mediis moveantur, priora duo $D$ & $E$ in prioribus duobus $A$ & $B$, & altera duo $F$ & $G$ in tertio $C$; ſitque velocitas corporis $D$ ad velocitatem corporis $E$, & velocitas corporis $F$ ad velocitatem corporis $G$, in ſubduplicata ratione virium $T$ ad vires $V$: reſiſtentia corporis $D$ erit ad reſiſtentiam corporis $E$, & reſiſtentia corporis $F$ ad reſiſtentiam corporis $G$, in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis $D$ erit ad reſiſtentiam corporis $F$ ut reſiſtentia corporis $E$ ad reſiſtentiam corporis $G$. Sunto corpora $D$ & $F$ æquivelocia ut & corpora $E$ & $G$; & augendo velocitates corporum $D$ & $F$ in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii $B$ in eadem ratione duplicata, accedet Medium $B$ ad formam & conditionem Medii $C$ pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium $E$ & $G$ in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum $D$ & $F$ ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum $E$ & $G$, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur $D$ & $F$, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis $F$ ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis $D$ in eadem ratione quam proxime.

*Corol.* 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moti eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

*Corol.* 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

*Corol.* 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim

De Motu Corporum.

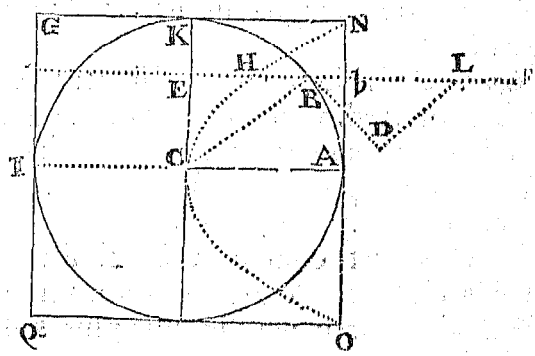
cissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

*Corol.* 6. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum Arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

## PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

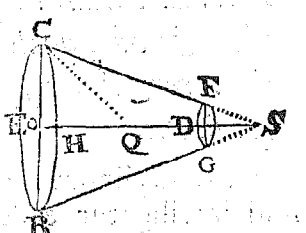
*Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri.*

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Corol. 5.) sive corpus in Medio quiescente moveatur, sive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejusmodi recta. In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *KC* & *BD* demittantur



mittantur perpendiculares $BE$, $\mathcal{D}L$, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam $FB$ oblique incidendo, Globum ferit in $B$, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONG\mathcal{Q}$ axe $ACI$ circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in $b$, ut $L\mathcal{D}$ ad $LB$ vel $BE$ ad $BC$. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam $FB$ vel $AC$, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ $BC$ qua Globum directe urget, ut $BE$ ad $BC$. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in Globum ſecundum rectam $FB$ oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut $BE$ quadratum ad $BC$ quadratum. Quare ſi ad Cylindri baſem circularem $NAO$ erigatur perpendiculum $bHE$, & ſit $bE$ æqualis radio $AC$, & $bH$ æqualis $\frac{BE\ quad}{CB}$: erit $bH$ ad $bE$ ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus $bH$ occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus $bE$ occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt Parabolois vertice $C$, axe $CA$ & latere recto $CA$ deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri. *Q.E.D.*

## *Scholium.*



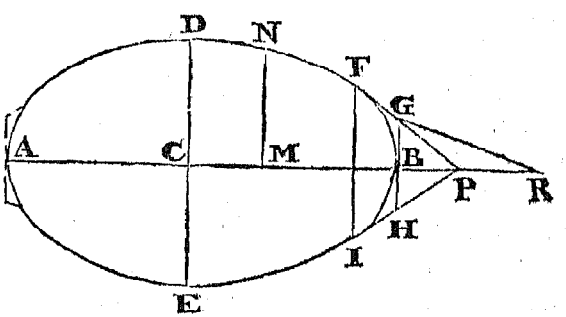

Eadem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari $CEBH$, quæ centro $O$, radio $OC$ deſcribitur, & altitudine $O\mathcal{D}$, conſtruendum ſit fruſtum Coni $CBGF$, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam

De Motu Corporum

axis ſui verſus $D$ progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem $OD$ in $Q$ & produc $OQ$ ad $S$ ut ſit $QS$ æqualis $QC$, & erit $S$ vertex Coni cujus fruſtum quæritur.

Unde obiter, cum angulus $CSB$ ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem $AB$ facta generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus $FG$, $GH$, $HI$ in punctis $F$, $B$ & $I$, ea lege ut $GH$ ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus $B$, & $FG$, $HI$ cum eadem $GH$ contineant angulos $FGB$, $BHI$ graduum 135: ſolidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem $CB$ generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui $AB$ progrediatur, & utriuſque terminus $B$ præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

Quod ſi Figura $DNFG$ ejuſmodi ſit curva ut, ſi ab ejus puncto quovis $N$ ad axem $AB$ demittatur perpendiculum $NM$, & à puncto dato $G$ ducatur recta $GR$ quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in $N$, & axem productum ſecet in $R$, fuerit $MN$ ad $GR$ ut $GR\ cub$ ad $4BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem $AB$ facta deſcribitur, in Medio raro prædicto ab $A$ verſus $B$ movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare.




## PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

*Si Medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.*

*Cas.* 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eadem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem Medio. Et ponamus quod particulæ Medii in quas Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima refiliant. Et cum refiſtentia Globi (per Propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam refiſtentia Cylindri, & Globus ſit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Cylindri motum ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Globi motum ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Et propterea Globus refiſtentiam patitur quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

*Cas.* 2. Ponamus quod particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque refiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & refiſtentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

*Cas.* 3. Ponamus quod particulæ Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua refiliant a Globo; & refiſtentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter refiſtentiam in primo caſu & refiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: refiſtentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

*Corol.* 2. Refiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

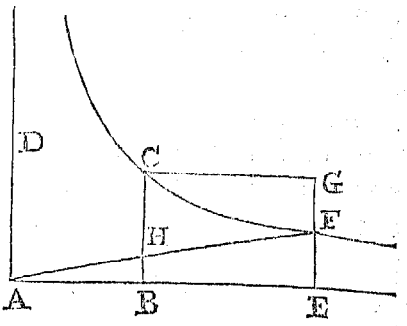
*Corol.* 3. Refiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

*Corol.* 4. Refiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

*Corol.* 5. Refiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis Medii.

*Corol.*

*Corol.* 6. Et motus Globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit $AB$ tempus quo Globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad $AB$ erigantur perpendicula $AD$, $BC$. Sitque $BC$ motus ille totus, & per punctum $C$ Aſymptotis $AD$, $AB$ deſcribatur Hyperbola $CF$. Producatur $AB$ ad punctum quodvis $E$. Erigatur perpendiculum $EF$ Hyperbolæ occurrens in $F$. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur $AF$ ipſi $BC$ occurrens in $H$. Et ſi Globus tempore quovis $BE$, motu ſuo primo $BC$ uniformiter continuato, in Medio non reſiſtente deſcribat ſpatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expoſitum, idem in Medio reſiſtente deſcribet ſpatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam $EF$, amiſſa motus ejus parte $FG$. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem $BH$, amiſſa reſiſtentiæ parte $CH$. Patent hæc omnia per Corol. 1. Prop. v. Lib. II.




*Corol.* 7. Hinc ſi Globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem Globus tempore $t$ in Medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicata velocitatis ratione decreſcentem, amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium motu uniformi M eodem tempore $t$ deſcriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ eſt ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

*Scholium.*

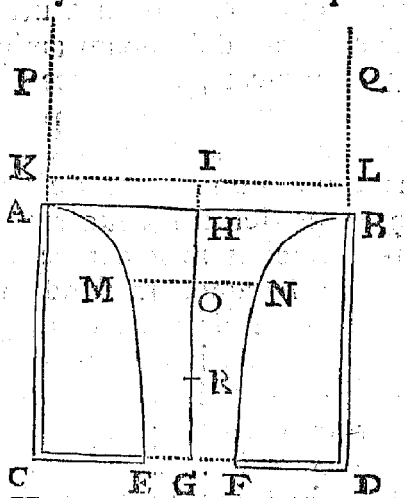
In hac Propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim qua totus Globi motus vel tolli poſſit vel generari

nerari quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes, ve-
:itate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas Medii ad
nſitatem Globi, ſi modo Globus & particulæ Medii ſint ſumme
ſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit
plo minor ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinite dura &
reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem continuis qualia
ıt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus
n incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam gene-
tes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias
hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in
uſmodi Mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim
ı totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore,
tu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ
ɔcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſe-
:ntibus conabimur oſtendere.

## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

*uæ de vaſe Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.*

:it *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD*
dum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio
di, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti per-
dicularis. Et concipe cylindrum gla-
*APQB* ejuſdem eſſe latitudinis
ı cavitate vaſis, & axem eundem ha-
ɔ, & uniformi cum motu perpetuo
:endere, & partes ejus quam primum
ngunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, &
quam converſas gravitate ſua defluere
as, & cataractam vel columnam aquæ
*NFEM* cadendo formare, & per
men *EF* tranſire, idemque adæquate
lere. Ea vero ſit uniformis veloci-
glaciei deſcendentis ut & aquæ con-
æ in circulo *AB*, quam aqua caden-
& caſu ſuo deſcribendo altitudinem
acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per
ctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus gla-




ciei

cici occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. Ideoque per Theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *II* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli ſunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, a cohæſione illa oriundum, hic non conſideramus.

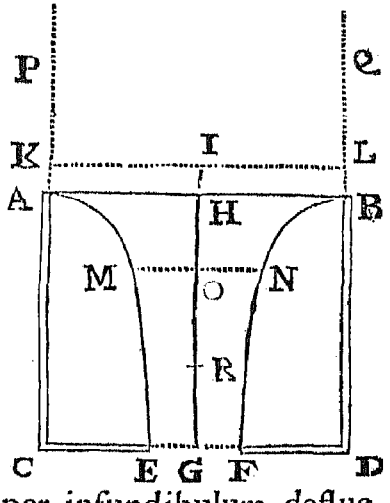
*Cas.* 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrime & ſine omni reſiſtentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed a lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5½ ad 6½ quam proxime, ſi modo

modo diametros recte dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quam accuratiſſime menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero conſtat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vaſis factum effluit, ea eſt quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In ſequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius ad diſtantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertuſum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque adeo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio Problematis poſtulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio Problematis ſimplicior ſit & magis Mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vaſe per foramen *EF* egrediebatur, motum ſuum perpetuo ſervet & glacies quietem ſuam etiamſi in aquam fluidam reſolvatur.



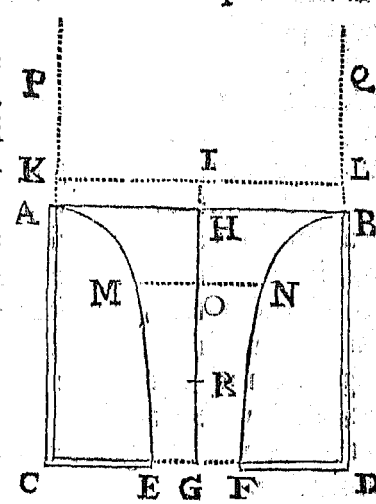

*Cas.* 2. Si foramen *EF* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem

De Motu Corporum.

dem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galilæus* demonstravit.

*Cas.* 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies $AB$ & $KL$ quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine $HG$ vel $IG$ cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

*Cas.* 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem $GH$ vel $GI$, nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. XIX. Lib. II, & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam esse quam in hac Propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.




*Cas.* 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis, sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figura foraminis sed ab ejus altitudine infra planum $KL$.

*Cas.* 6. Si vasis $ABDC$ pars inferior in aquam stagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit $GR$: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen $EF$ in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem $IR$ acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic Caſus per Experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

*Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo $CA$ producatur ad $K$, ut ſit $AK$ ad $CK$ in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli $AB$: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem $KC$ acquirere poteſt.

*Corol.* 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen $EF$, & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine $GI$ cadendo, velocitatem ſuam qua exilit, acquirere poteſt.

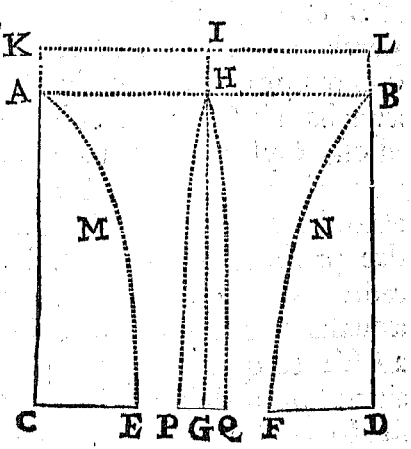
*Corol.* 3. Pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum $AB$ & $EF$, ad duplum circulum $EF$. Sit enim $IO$ media proportionalis inter $IH$ & $IG$; & aqua per foramen $EF$ egrediens, quo tempore gutta cadendo ab $I$ deſcribere poſſet altitudinem $IG$, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus $EF$ & altitudo eſt $2IG$, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus $AB$ & altitudo eſt $2IO$, nam circulus $EF$ eſt ad circulum $AB$ in ſubduplicata ratione altitudinis $IH$ ad altitudinem $IG$, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis $IO$ ad altitudinem $IG$: & quo tempore gutta cadendo ab $I$ deſcribere poteſt altitudinem $IH$, aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus $AB$ & altitudo eſt $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab $I$ per $H$ ad $G$ deſcribit altitudinum differentiam $HG$, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ Cylindrorum, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt $AB$ & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut $HG$ ad $2HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde

inde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, atque adeo ut ſumma circulorum $EF$ & $AB$ ad duplum circulum $EF$.

*Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum $AB$ & $EF$, ad differentiam eorundem circulorum.

*Corol.* 5. Et ponderis pars quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum $AB$ & $EF$, ad duplum circulum minorem $EF$, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

*Corol.* 6. Ponderis autem pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus $AB$ ad ſummam circulorum $AB$ & $EF$, ſive ut circulus $AB$ ad exceſſum dupli circuli $AB$ ſupra fundum. Nam ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum $AB$ & $EF$, ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus $AB$ ad differentiam circulorum $AB$ & $EF$. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus $AB$ ad ſummam circulorum $AB$ & $EF$ vel exceſſum dupli circuli $AB$ ſupra fundum.




*Corol.* 7. Si in medio foraminis $EF$ locetur Circellus $PQ$ centro $G$ deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $GH$. Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens $GH$ ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit $PHQ$ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens $H$ & altitudinem $GH$. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa eſt in ſuperficie interna $AME$, $BNF$ verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna $PHQ$ con-

convexa erit verſus cataractam, & propterea major Cono cujus baſis eſt circellus ille $PQ$ & altitudo $GH$, id eſt, major tertia parte Cylindri eadem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere Coni ſeu tertiæ partis Cylindri illius majus eſt.

*Corol.* 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus $PQ$ ſuſtinet, minor eſt pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $HG$. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt $HG$. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ $PHQ$ cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maxime directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi $PQ$ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis ſit infinite velocior quam ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus $PQ$ eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus $PHQ$ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo $GH$. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

*Corol.* 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus $PQ$ ſuſtinet, æquale eſt ponderi Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce eſt medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valde parvus, ſed augeatur donec æquet foramen $EF$, hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $GH$.

*Corol.* 10. Et (quantum ſentio) pondus quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$, ut $EFq$ ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, ſive ut circulus $EF$ ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli $PQ$ quamproxime.

LEMMA

## LEMMA IV.

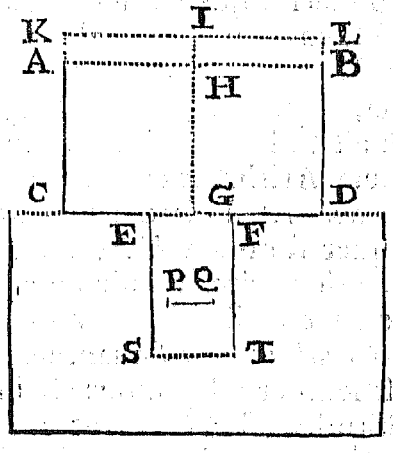
*Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia Circuli eadem diametro deſcripti & eadem velocitate ſecundum lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.*

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

## PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

*Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime.*

Nam ſi vas $ABDC$ fundo ſuo $CD$ ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem Cylindricum $EFTS$ horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem Circellus $PQ$ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur $CA$ ad $K$, ut ſit $AK$ ad $CK$ in duplicata ratione quam habet exceſſus orificii canalis $EF$ ſupra circellum $PQ$ ad circulum $AB$: manifeſtum eſt (per Caſ. 5, Caſ. 6, & Cor. 1. Prop. xxxvi.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem $KC$ vel $IG$ acquirere poteſt.




Et

Et (per Cor. 10, Prop. xxxvi) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola $HI$ evanescat & altitudines $IG$, $HG$ æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut $EFq$ ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum $PQ$ in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia $EF$, $ST$, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum $EF$ & $PQ$ ad circulum $PQ$, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis qua præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum $EF$ & $PQ$ ad circulum $EF$, sive ut $EFq - PQq$ ad $EFq$. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem $IG$ acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5, id est, Resistentia circelli ascendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut $EFq$ ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem $IG$ acquirit, ut $EFq - PQq$ ad $EFq$.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & $EFq$, interque $EFq$ & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem $IG$ acquirere potest, Resistentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis $IG$, a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem Cylindri, hac velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum Resistentia circelli per Lemma iv; ideoque æqualis est Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproxime.

Si

DE MOTU CORPORUM

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque Vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime. *Q.E.D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe & non elaſticum ut preſſio omnis quæ ab ejus compreſſione oritur propagetur in inſtanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

*Corol.* 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum.

*Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: Reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione $EFq$ ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$

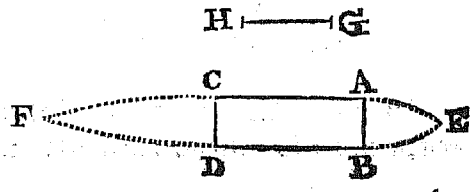
ſemel

ſemel, & ratione $EFq$ ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

*Corol.* 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad $EFq$ ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad $EFq$ bis: reſiſtentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri.

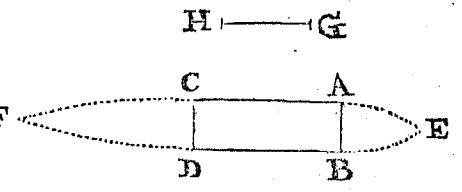
## *Scholium.*

In hac Propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur a ſola magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglecta reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis XXXVI, obliquitas motuum quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen $EF$, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hac Propoſitione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia tranſirent per foramen $EF$, ponendo quod aqua omnis in vaſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hac Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & ſint $AE$ & $BE$ arcus duo Parabolici axe $AB$ deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpa-



De Motu Corporum.

tium $HG$, describendum a Cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut $HG$ ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam $CF$ & $DF$ arcus alii duo Parabolici, axe $CD$ & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem $EF$ generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ $ABE$ & $CDF$ contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui $FE$ in partes versus $E$ progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo $4AC$ motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.




## LEMMA V.

*Si Cylindrus, Sphæra & Sphæroïs, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.*

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

## LEMMA VI.

*Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.*

Patet per Lemma v & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

## LEMMA VII.

*Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.*

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

### *Scholium.*

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt Aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

De Motu Corporum

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

*Globi, in Fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.*

Nam Globus eſt ad Cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem Cylindri eſt ad hanc Vim quamproxime ut denſitas Fluidi ad denſitatem Cylindri vel Globi, per Prop. XXXVII; & Reſiſtentia Globi æqualis eſt Reſiſtentiæ Cylindri, per Lem. V, VI, VII. *Q.E.D.*

*Corol.* 1. Globorum, in Mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & duplicata ratione denſitatis Mediorum.

*Corol.* 2. Velocitas maxima quacum Globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt Globus idem, eodem pondere, abſque reſiſtentia cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi. Nam Globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſita, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit quo tempore Globus octo tertias diametri ſuæ eadem velocitate deſcribit, ut denſitas Fluidi ad denſitatem Globi: ideoque per hanc Propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi Reſiſtentiæ, & propterea Globum accelerare non poteſt.

*Corol.* 3. Data & denſitate Globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

*Corol.*

*Corol.* 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem Corol. 7.

## PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

*Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum Globi, & ratione denſitatis Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.*

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII; procedit vero demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

## PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

*Globi, in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.*

Sit A pondus Globi in vacuo, B pondus ejus in Medio reſiſtente, D diameter Globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A − B, G tempus quo Globus pondere B abſque reſiſtentia cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam Globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum Globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2, Prop. XXXVIII; & reſiſtentia quam Globus ea cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam G, per Corol. 1, Prop. XXXVIII.

Hæc

De Motu Corporum

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit Logarithmo $0{,}434294481 9\frac{2P}{G}$, ſitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}386294361 1F + 4{,}605170186LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus $4{,}605170186LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}386294361 1F$ altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per Libri ſecundi Propoſitionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypotheſi quod Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum $1{,}3862944 - 4{,}6051702L$, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

| *Tempora* P | *Velocitates cadentis in fluido* | *Spatia cadendo deſcripta in fluido* | *Spatia motu maximo deſcripta.* | *Spatia cadendo deſcripta in vacuo.* |
|---|---|---|---|---|
| 0,001 G | 99999$\frac{22}{30}$ | 0,0000001 F | 0,002 F | 0,000001 F |
| 0,01 G | 999967 | 0,0001 F | 0,02 F | 0,0001 F |
| 0,1 G | 9966799 | 0,0099834 F | 0,2 F | 0,01 F |
| 0,2 G | 19737532 | 0,0397361 F | 0,4 F | 0,04 F |
| 0,3 G | 29131261 | 0,0886815 F | 0,6 F | 0,09 F |
| 0,4 G | 37994896 | 0,1559070 F | 0,8 F | 0,16 F |
| 0,5 G | 46211716 | 0,2402290 F | 1,0 F | 0,25 F |
| 0,6 G | 53704957 | 0,3402706 F | 1,2 F | 0,36 F |
| 0,7 G | 60436778 | 0,4545405 F | 1,4 F | 0,49 F |
| 0,8 G | 66403677 | 0,5815071 F | 1,6 F | 0,64 F |
| 0,9 G | 71629787 | 0,7196609 F | 1,8 F | 0,81 F |
| 1 G | 76159416 | 0,8675617 F | 2 F | 1 F |
| 2 G | 96402758 | 2,6500055 F | 4 F | 4 F |
| 3 G | 99505475 | 4,6186570 F | 6 F | 9 F |
| 4 G | 99932930 | 6,6143765 F | 8 F | 16 F |
| 5 G | 99990920 | 8,6137964 F | 10 F | 25 F |
| 6 G | 99998771 | 10,6137179 F | 12 F | 36 F |
| 7 G | 99999834 | 12,6137073 F | 14 F | 49 F |
| 8 G | 99999980 | 14,6137059 F | 16 F | 64 F |
| 9 G | 99999997 | 16,6137057 F | 18 F | 81 F |
| 10 G | 99999999$\frac{1}{3}$ | 18,6137056 F | 20 F | 100 F |

## *Scholium.*

Ut reſiſtentias Fluidorum inveſtigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{252}{376}$ uncias libræ hujus ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645

132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aqua.

*Exper.* 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{1}{38}$ *gran*, & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $79\frac{1}{38}$ *gran*. Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium 2 F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{1}{38}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, absque resistentia cadendo in aqua describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig*, describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G $0'',15244$. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus describet spatium 2 F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per Theoriam describere debuit quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum.

*Exper.* 2. Tres Globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $51\frac{1}{16}$ granorum in aqua, successive demittebantur; & unusquisque cecidit in aqua tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

Com-

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{1}{2}$ *gran*, excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{7}{8}$ *gran*, diameter globi 0,81296 *dig*, octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig*, spatium 2F 2,3217 *dig*, spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran*, tempore 1″, absque resistentia cadendo describat 12,808 *dig*, & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran*. descendere, tempore 0″,301056 describet spatium 2,3217 *dig*. & tempore 15″ spatium 115,678 *dig*. Subducatur spatium 1,3862944F seu 1,609 *dig*. & manebit spatium 114,069 *dig*. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 *dig*. circiter. Et sic manebit spatium 113,174 *dig*. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia est insensibilis.

*Exper*. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran*. in aere & 1 *gran*. in aqua, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, vel denique minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

*Exper*. 4. Experimenta hactenus descripta cæpi ut investigarem resistentias fluidorum antequam Theoria, in Propositionibus proxime præcedentibus exposita, mihi innotescceret. Postea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſime, ne impulſum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſive temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{3}{7}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua $132\frac{1}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi abſque reſiſtentia cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per Theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

*Exper.* 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{7}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

*Exper.*

*Exper.* 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

*Exper.* 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet, primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas, globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper a latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

*Exper.* 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

*Exper.* 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{1}{4}$ in aqua, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

De Motu Corporum

non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

*Exper.* 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{1}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{1}{9}$ quamproxime.

*Exper.* 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{2}{3}\frac{2}{3}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{1}{9}$ circiter.

*Exper.* 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aqua, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aqua ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur a fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem a tergo relinquent, niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per Prop. XXXII & XXXIII) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium in Aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

*Exper.* 13. A culmine Ecclesiæ *Sti Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum, ut Tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum ferreum a pessulo ad imam Ecclesiæ partem tendens, dimitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula sequente.

| *Globorum mercurio plenorum.* | | | *Globorum aere plenorum.* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Pondera* | *Diametri* | *Tempora cadendi.* | *Pondera* | *Diametri* | *Tempora cadendi.* |
| 908 *gran.* | 0,8 *digit.* | 4″ | 510 *gran.* | 5,1 *digit.* | 8″½ |
| 983 | 0,8 | 4 — | 642 | 5,2 | 8 |
| 866 | 0,8 | 4 | 599 | 5,1 | 8 |
| 747 | 0,75 | 4 + | 515 | 5,0 | 8¼ |
| 808 | 0,75 | 4 | 483 | 4,9 | 8¼ |
| 784 | 0,75 | 4 + | 641 | 5,2 | 8 |

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi sex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Glo-

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore $8''\ 12'''$, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{1}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran*; ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran*; & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore $57''' 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore $8''\ 12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore $8''\ 12'''$, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

| *Globorum pondera* | *Diametri* | *Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.* | *Spatia deſcribenda per Theoriam.* | *Exceſſus* |
|---|---|---|---|---|
| 510 *gran.* | 5,1 *dig.* | $8''\ 12'''$ | 226 *ped.* 11 *dig.* | 6 *ped.* 11 *dig.* |
| 642 | 5,2 | 7 42 | 230 9 | 10 9 |
| 599 | 5,1 | 7 42 | 227 10 | 7 10 |
| 515 | 5 | 7 57 | 224 5 | 4 5 |
| 483 | 5 | 8 12 | 225 5 | 5 5 |
| 641 | 5,2 | 7 42 | 230 7 | 10 7 |

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum reſiſtentia prope omnis per Theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In Scholio quod Sectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum Aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aere, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam in hac ſeptima Sectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aeris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium $\frac{2}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio $t$, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

Corol. 7, Prop. xxxv. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior ſit ad motum quam figura Cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia Cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & abſque omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido, eſt ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

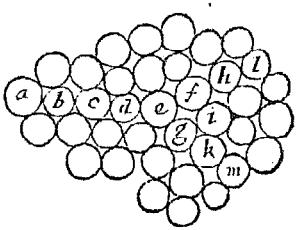
# SECTIO VIII.

## *De Motu per Fluida propagato.*

### PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

*Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.*

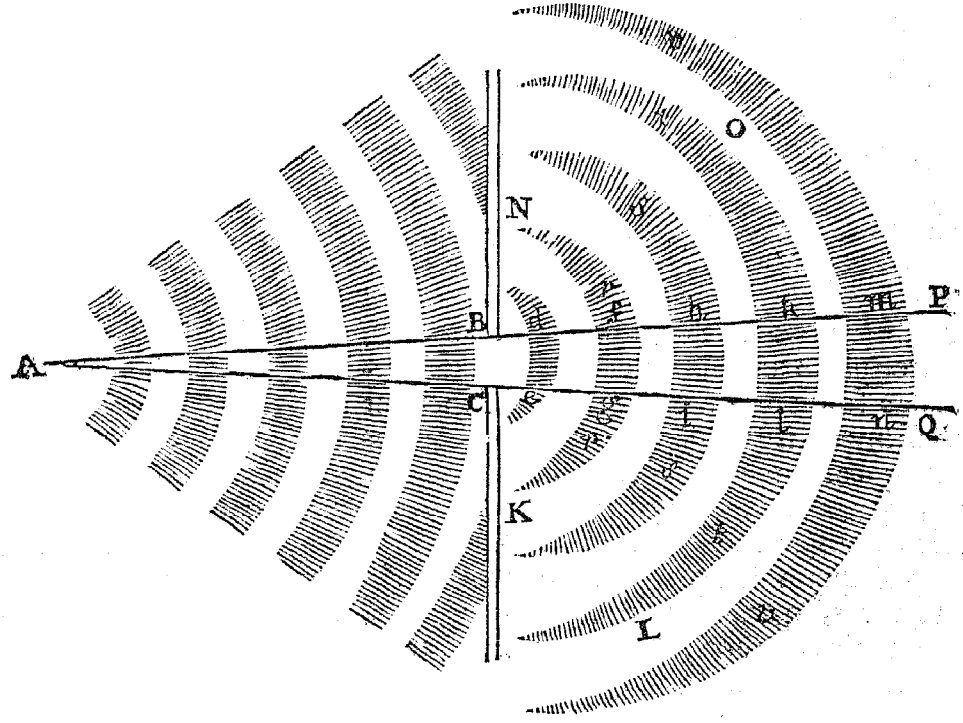
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*




*Corol.* Si preſſionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fruſtum

De Motu Corporum.

ſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique.




Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q.E.D.*

PRO-

## PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

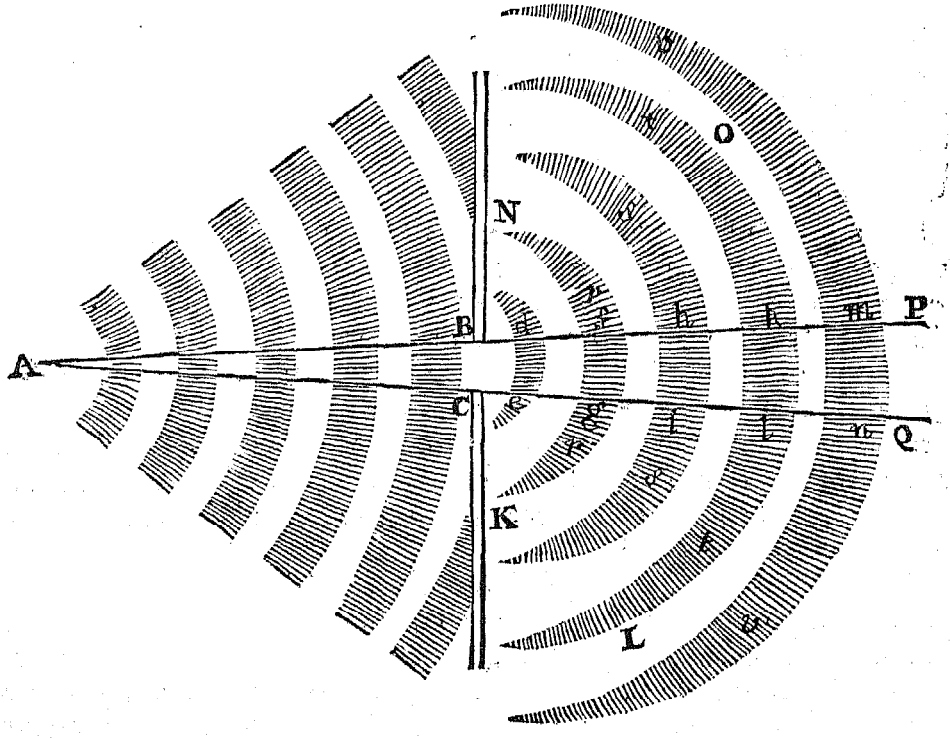
*Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.*

*Cas.* 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde, verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ, hinc inde, verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, verſus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde, verſus *KL* & *NO*, ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q.E.D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

*Cas.* 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A*, per Medium Elaſticum, ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla;

De Motu Corporum

eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.




*Cas.* 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur:

muntur: recedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales $KL$ & $NO$, quam anteriores $PQ$, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen $BC$ tranſiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

## PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

*Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit.*

*Cas.* 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei

De Motu Corporum

rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas Undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

*Cas.* 2. Quod ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q.E.D.*

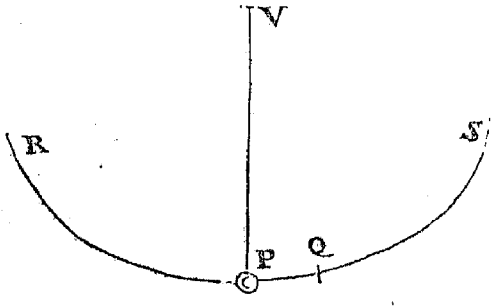
*Corol.* Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad preſſionem, per Medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium Flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

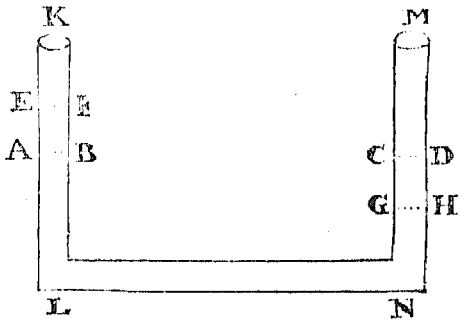
## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

*Si aqua in Canalis cruribus erectis* K L, M N *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur $AB$, $CD$ mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure $KL$ aſcendit ad altitudinem $EF$, deſcenderit aqua in crure $MN$ ad altitudinem $GH$. Sit autem $P$ corpus pendulum, $VP$ filum, $V$ punctum ſuſpenſionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum deſcribat, $P$ ejus punctum infimum, $PQ$ arcus altitudini $AE$ æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur




& retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure $KL$ aſcendit ad $EF$, & in crure altero deſcendit ad $GH$, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut $AE$ ſeu $PQ$ ad $VP$ ſeu $PR$. Vis etiam, qua pondus $P$ in loco quovis $Q$ acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia $PQ$ a loco infimo $P$, ad Cycloidis longitudinem $PR$. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia $AE$, $PQ$ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

*Corol.* 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{A}{B}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

*Corol.*

*Corol.* 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicata.

## PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

*Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.*

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

## PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

*Invenire velocitatem Undarum.*

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproxime.

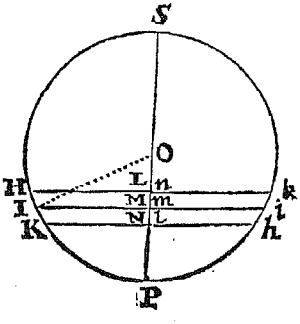
*Corol.* 2.

*Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.

## PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

*Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.*

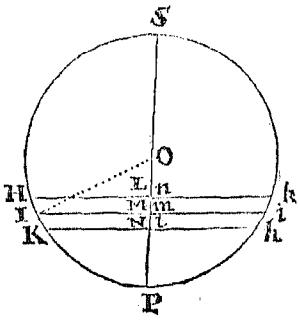



Deſignent $AB, BC, CD$, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; $ABC$ plagam motus pulſuum ab $A$ verſus $B$ propagati; $E$, $F, G$ puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta $AC$ ad æquales ab invicem diſtantias ſita; $Ee$, $Ff$, $Gg$, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; $\varepsilon, \varphi, \gamma$ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & $EF, FG$ lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & $ef$, $fg$. Rectæ $Ee$ æqualis ducatur recta $PS$. Biſecetur eadem in $O$, centroque $O$ & intervallo $OP$ deſcribatur circulus $SIPi$. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis $PH$ vel $PHSh$, ſi demittatur ad $PS$ perpendiculum $HL$ vel $hl$, & capiatur $E\varepsilon$ æqualis $PL$ vel $Pl$, punctum Phyſicum $E$ reperiatur

De Motu Corporum

in ε. Hac lege punctum quodvis $E$, eundo ab $E$ per ε ad $e$, & inde redeundo per ε ad $E$, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia $PHSh$ capiantur æquales arcus $HI$, $IK$ vel $hi$, $ik$, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ $EF$, $FG$ ad pulsuum intervallum totum $BC$. Et demissis perpendiculis $IM$, $KN$ vel $im$, $kn$; quoniam puncta $E$, $F$, $G$ motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a $B$ ad $C$; si $PH$ vel $PHSh$ sit tempus ab initio motus puncti $E$, erit $PI$ vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti $F$, & $PK$ vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti $G$; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis $PL$, $PM$, $PN$ in itu punctorum, vel ipsis $Pl$, $Pm$, $Pn$ in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\varepsilon\gamma$ seu $EG+G\gamma-E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii $EG$ in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG-LN$ ad $EG$; in reditu autem ut $EG+ln$ seu $EG+LN$ ad $EG$. Quare cum sit $LN$ ad $KH$ ut $IM$ ad radium $OP$, & $KH$ ad $EG$ ut circumferentia $PHShP$ ad $BC$, id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum $BC$) ut $OP$ ad V; & ex æquo $LN$ ad $EG$, ut $IM$ ad V: erit expansio partis $EG$ punctive Physici $F$ in loco $\varepsilon\gamma$, ad expansionem



anſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo G, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde s elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$, eſt ad vim ejus elaſticam mediocem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum hyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ d $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob angus limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite inores eſſe quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differntia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $L-KN$ ad HK, & OM ad OI vel $O\mathcal{P}$, dataſque HK & $\mathcal{P}$) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in $\Omega$, ut $\Omega\varphi$. Et eodem gumento differentia virium elaſticarum punctorum Phyſicorum & $\gamma$, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia a (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti $\varepsilon$ ſupra vim elaſticam puni $\gamma$,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$, eſt ut ipſius diantia a medio vibrationis loco $\Omega$. Proinde tempus (per Prop. XVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum $\mathcal{P}I$; & Medii pars earis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt, lege oſcillantis Penli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Meam totum componitur. *Q.E.D.*

*Corol.* Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicar in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movetur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum i a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari ſinunt.

De Motu Corporum

## PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe & ſubduplicata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.*

*Caſ.* 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

*Caſ.* 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata materiæ & ratione ſubduplicata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

*Caſ* 3. In Mediis igitur denſitate & vi Elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicata ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata denſitatis Medii inverſe & ratione ſubduplicata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

## PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

*Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.*

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica $EF$, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium $PS$, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis $P$ & $S$, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini $PS$ æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ ſeu $PO$ ad longitudinem A. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica $EG$, in locis ſuis extremis $P$, $S$ exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL-KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum $K$ jam incidat in $P$) ut $HK$ ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola $EG$ comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem $EG$; adeoque ex æquo, vis qua lineola $EG$ in locis ſuis $P$ & $S$ urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad $VV$, nam $HK$ erat ad $EG$ ut

$PO$

De Motu Corporum.

$PO$ ad $V$. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione $V V$ ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione $V V$ ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione $PO$ ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra $V$ ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam $BC$. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium $BC$, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut $V$ ad A, id eſt, ut $BC$ ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium $BC$, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Velocitas pulſuum ea eſt quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A, adeoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

*Corol.* 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut Fluidi vis Elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe.

## PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

*Invenire pulſuum diſtantias.*

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

### *Scholium.*

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola (per

(per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{2}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus

De Motu Corporum

tus ille celerius propagabitur per ſolum aerem verum, idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi Atmoſphæra conſtet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aer per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aer per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi cundo, conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a ſe experimentis) quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; adeoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi 10$\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde verſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus, patet ex Corollario Propoſitionis XLVII Libri hujus. Sed & cur ſoni in Tubis ſtenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo, magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO

# SECTIO IX.

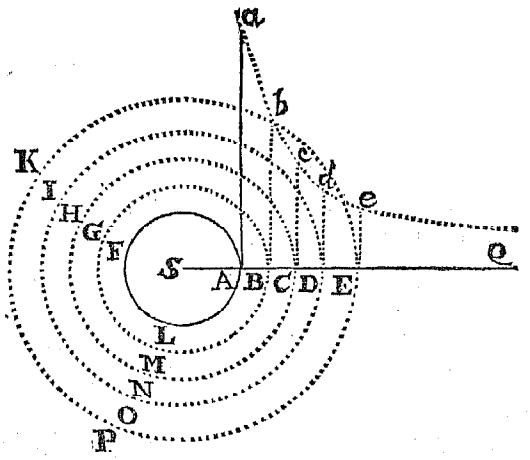
## *De motu Circulari Fluidorum.*

### HYPOTHESIS.

*Reſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.*

### PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

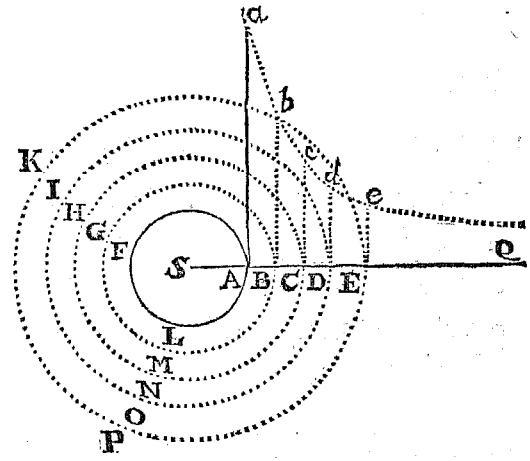
*Si Cylindrus ſolidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.*




Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur Fluidum in Orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt vel

DE MOTU CORPORUM

minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut quadrata diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad infinitæ rectæ $SABCDEQ$ partes ſingulas erigantur perpendicula $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$, &c. ipſarum $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$: id eſt, ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, Orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ $AaQ$, $BbQ$, $CcQ$, $DdQ$, $EeQ$, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis $D$ reciproce ut area $DdQ$, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut diſtantia $SD$. *Q.E.D.*




*Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

*Corol.* 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum

tionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

*Corol.* 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

*Corol.* 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

*Corol.* 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

*Corol.* 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aqua profunda stagnante experiri licet.

## PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

*Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ.*

*Cas.* 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c.

De Motu Corporum

distinguatur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impessio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDEQ$ partes singulas erigantur perpendicula $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$, &c. ipsarum $SA$, $SB$, $SC$, $SD$, $SE$, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ $AaQ$, $BbQ$, $CcQ$, $DdQ$, $EeQ$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis $DIO$ reciproce ut area $DdQ$, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum distantiæ $SD$. Id quod volui primo demonstrare.

*Cas.* 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet

a Globo

a Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

*Cas.* 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper à centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

*Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

*Corol.* 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

*Corol.* 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione

one perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

*Corol.* 4. Proinde ad conſervationem Vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Abſque tali principio neceſſe eſt ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

*Corol.* 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in Vorticem: & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. aſſignatam) & Vortices tandem conquieſcerent.

*Corol.* 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli, eadem ratione qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe

poſitionem

poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in Vortices agi deſinet.

*Corol.* 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

*Corol.* 8. Si vas, fluidum incluſum & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

*Corol.* 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

*Corol.* 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi Syſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

*Corol.* 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motus in Corollariis 8. 9 & 10. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis

motibus

De Motu Corporum

motibus revolvebantur, permittatur Syſtema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & Syſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

*Scholium.*

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, adeoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione Phænomena cœleſtia per Vorti-

Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſime, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat a centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus propoſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quam ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi Vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſit.

## PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

*Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.*

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

De Motu Corporum

contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum sit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

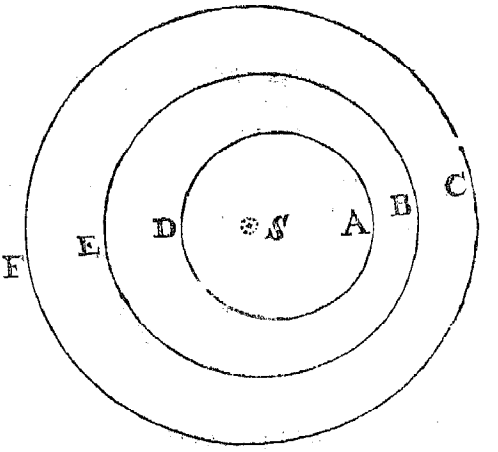
*Corol.* 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

*Corol.* 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis distantiam revolvi potest.

## *Scholium.*

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent $AD, BE, CF$, Orbes tres circa Solem $S$ descriptos, quorum extimus $CF$ circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint $A, B$ & Perihelia $D, E$. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe $CF$, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe $BE$, tardius movebitur in Aphelio $B$ & velocius in Perihelio $E$, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter $A$ & $C$ velocius

velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter $D$ & $F$; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.



# DE MUNDI SYSTEMATE

## LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maxime ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi Scholiis quibuſdam Philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maxime fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more Mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematice doctis moram nimiam injicere poſſint, author eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ

# REGULÆ PHILOSOPHANDI.

## REGULA I.

*Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ ſint & earum Phænomenis explicandis ſufficiant.*

Dicunt utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra, & fruſtra fit per plura quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

## REGULA II.

*Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem ſunt Cauſæ.*

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtia; deſcenſus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

## REGULA III.

*Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.*

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem ſomnia temere confingenda non ſunt, nec a Naturæ analogia recedendum eſt, cum

ca

De Mundi Systemate

ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur, Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius, oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex Mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus.

# PHÆNOMENA.

## PHÆNOMENON I.

*Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.*

CONstat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

*Satellitum Jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$. $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

*Distantiæ Satellitum a centro Jovis.*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ex observationibus* | | | | | |
| Borelli | $5\frac{2}{3}$ | $8\frac{2}{3}$ | 14 | $24\frac{2}{3}$ | Semidiam. Jovis |
| Townlei *per Microm.* | 5,52 | 8,78 | 13,47 | 24,72 | |
| Cassini *per Telescop.* | 5 | 8 | 13 | 23 | |
| Cassini *per Eclipſ. Satell.* | $5\frac{2}{3}$ | 9 | $14\frac{33}{60}$ | $25\frac{3}{10}$ | |
| *Ex temporibus periodicis.* | 5,667 | 9,017 | 14,384 | 25,299 | |

## PHÆNOMENON II.

*Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.*

*Cassinus* utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

*Satelli-*

*Satelitum Saturniorum tempora periodica.*

$1^d.21^h.19'$. $2^d.17^h.41'$. $4^d.13^h.47'$. $15^d.22^h.41'$. $79^d.22^h.4'$.

*Distantiæ Satellitum a centro Saturni in semidiametris Annuli.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ex observationibus* | $1\frac{19}{20}$. | $2\frac{1}{2}$. | $3\frac{1}{2}$. | 8. | 24. |
| *Ex temporibus periodicis* | 1,95. | 2,5. | 3,52, | 8,09. | 23,71. |

## PHÆNOMENON III.

*Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiata è regione Solis, falcata cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

## PHÆNOMENON IV.

*Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquiplicata mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissime ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter à distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula sequente videre licet.

*Plane-*

*Planetarum ac Telluris distantiæ mediocres à Sole.*

| | ♄ | ♃ | ♂ | ♁ | ♀ | ☿ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Secundum *Keplerum* | 951000. | 519650. | 152350. | 100000. | 72400. | 38806. |
| Secundum *Bullialdum* | 954198. | 522520. | 152350. | 100000. | 72398. | 38585. |
| Secundum tempora periodica | 953806. | 520116. | 152399. | 100000. | 72333. | 38710. |

De distantiis Mercurii & Veneris a Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantiis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

## PHÆNOMENON V.

*Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprime demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

## PHÆNOMENON VI.

*Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo.

# PROPOSITIONES.

## PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.*

PAtet pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.*

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum, & Propoſitionem quartam ejuſdem Libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PRO-

## PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere Terram, & eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.*

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod ſi diſtantia Lunæ a centro Terræ ſit ad ſemidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciproce ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit a Terra, eſt ut diſtantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua qua Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut $D^2$. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

*Corol.* Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

## PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper a motu rectilineo, & in Orbe ſuo retineri.*

Lunæ diſtantia mediocris a Terra in Syzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, & ſecundum *Tychonem*

*chonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: Et ſi Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus $60 \times 60$ quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus *noſtris* cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in Orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos Gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi Gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

PRO-

## PROPOSITIO V. THEOREMA V.

*Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.*

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. 11. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

*Corol.* 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua ſit, Jupiter in Satellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

*Corol.* 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

*Corol.* 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

## PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

*Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.*

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus tempo-

De Mundi Systemate

temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & acris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate

titate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa ſubduplicata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas fore valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque, ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

*Corol.* 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

*Corol.*

*Corol.* 2. Corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

*Corol.* 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specifice graviora sint, minime descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

*Corol.* 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque absque poris rarefieri possint, Vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

*Corol.* 5. *Vis gravitatis diversi est generis à vi magnetica.* Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PRO-

## PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

*Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.*

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q.E.D.*

*Corol.* 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

*Corol.* 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

De Mundi Systemate

## PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

*Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantiæ inter centra.*

Postquam inveniissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis satis accurate obtineret, prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

*Corol.* 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverse; & pondera ad superficies Planetarum, aliasve quasvis a centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum $224\frac{3}{4}$ & horarum $16\frac{3}{4}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis $8'.\ 21\frac{1}{2}''$, Satellitis Hugeniani a centro Saturni $3'.\ 20''$, & Lunæ a Terra $10'$, computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut $1, \frac{1}{1033}, \frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Est enim parallaxis Solis ex observationibus novissimis quasi $10''$, & *Halleius* noster per emersiones Jovis & Satellitum e parte obscura Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit 8′. 21½″, & diameter Jovis 41″. Ex duratione Eclipseon Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi 40″, atque adeo semidiameter 20″. Mensuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti 3′. 20″ a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50″, est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est 11″. Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam 2″ vel 3″: Et manebit semidiameter Saturni quasi 9″. Ex hisce autem & Solis semidiametro mediocri 16′. 6″ computum ineundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centris Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis pondera diminuantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

*Corol.* 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam 10″, debebit quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

*Corol.* 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXI. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea

De Mundi Systemate

terea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarescit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

*Corol.* 4. Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diversis utique distantiis a Sole collocandi erant Planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

## PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

*Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proxime.*

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

## PROPOSITIO X. THEOREMA X.

*Motus Planetarum in Cœlis diutissime conservari posse.*

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, libere movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent.

rent. Eaque de causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quam materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quam si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quam Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quam aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus $13\frac{1}{3}$ levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui partibus 850 levior est quam aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

## HYPOTHESIS I.

*Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro Systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

## PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

*Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.*

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper pro-

De Mundi Systemate

progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin.

## PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

*Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.*

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & diſtantia Jovis a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo ſupra ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & diſtantia Saturni a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

*Corol.* Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum Solis quam minime diſcedit, & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

## PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

*Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.*

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1033; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni a Jove eſt ad diſtantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad $16 \times 1033$ ſeu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in ſingulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2411}{25}$ ſeu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis

De Mundi Systemate

Jovis in Solem ut 65 ad 124986 seu 1 ad 1923. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod Orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, Ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, & radio ad Solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, Terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

## PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

### *Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.*

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & Orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

*Corol.* 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

*Corol.* 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri. Quinimo Fixæ in omnes cæli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

### *Scholium.*

Cum Planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem: horum Aphelia & Nodi quiescent, nisi quatenus a viribus Jovis, Saturni, & corporum superiorum turbentur. Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum Aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicata distantiarum horum Planetarum a Sole. Ut si Aphelium Martis in annis centum conficiat $35'$ in consequentia respectu fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient $18'.36''$, $11'.27''$, & $4'.29''$ respective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propositione.

PRO-

## PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

*Invenire Orbium principales diametros.*

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per Prop. XV. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediæ proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

## PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

*Invenire Orbium Eccentricitates & Aphelia.*

Problema conſit per Prop. XVIII. Lib. I.

## PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

*Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.*

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam vero Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

## PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

*Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.*

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit

aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic *Jovis* diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

*Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.*

*Picartus* menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. Unde ambitus Terræ eſt pedum Pariſienſium 123249600, ut ſupra. Sed cum error quadringenteſimæ partis digiti, tam in fabrica inſtrumentorum quam in applicatione eorum ad obſervationes capiendas, ſit inſenſibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* obſervarunt Latitudines locorum reſpondeat minutis quatuor ſecundis, & in ſingulis obſervationibus incidere poſſit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcubus ſint majoris momenti : * ideo *Caſſinus* juſſu Regio menſuram Terræ per majora locorum intervalla aggreſſus eſt, & ſubinde per diſtantiam inter Obſervatorium Regium *Pariſienſe* & villam *Colioure* in *Rouſſillon* & Latitudinum differentiam 6ᵈᵉᵍ. 18′, ſupponendo quod figura Terræ ſit Sphærica, invenit gradum unum eſſe hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noſter antea invenerat. Hic enim circa annum 1635, menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam Latitudinum 2ᵈᵉᵍ. 28′, collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Caſſino* menſurati, pro menſura gradus unius in medio intervalli illius, id eſt, inter Latitudines 45ᵈᵉᵍ. & 46ᵈᵉᵍ. uſurpabo hexapedas 57292. Unde, ſi Terra ſit Sphærica, ſemidiameter ejus erit pedum Pariſienſium 19695539.

* Vide Hiſtoriam Academiæ Regiæ ſcientiarum anno 1700.

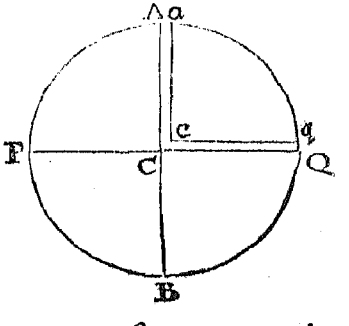
Penduli

Penduli in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{5}{9}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. $2\frac{1}{8}$, seu linearum $2174\frac{1}{8}$.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436,223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centripetam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut $2174\frac{1}{8}$ ad 7,54064.

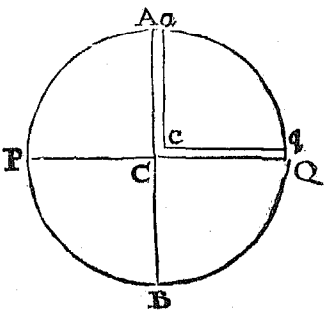
Vis centrifuga corporum in Æquatore, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′, in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, & corpus in Latitudine *Lutetiæ* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177,32, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centripetam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

Unde si *APBQ* figuram Terræ designet jam non amplius Sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad Æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ* ad



De Mundi Systemate

ad diametrum $AB$ ut 100 ad 101: gravitas in loco $Q$ in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco $Q$ in Sphæram centro $C$ radio $PC$ vel $QC$ descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco $A$ in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem $AB$ descriptam, est ad gravitatem in eodem loco $A$ in Sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco $A$ in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum $PQ$ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus $AB, PQ$ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem; & gravitas in $A$, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in $A$ in Sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, ad gravitatem in $A$ in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco $Q$ in Sphæram centro $C$ radio $QC$ descriptam, est ad gravitatem in loco $A$ in Sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco $Q$ in Terram, ad gravitatem in loco $A$ in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.




Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{289}$.

Et

Et propterea dico, ſecundum Regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{305}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ ſuperet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ facier ut exceſſus altitudinis in crure $ACca$ ſit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Caſſini*, ſit pedum Pariſienſium 19695539, ſeu milliarium 3939 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos exceſſu pedum 85820, ſeu milliarum $17\frac{1}{6}$.

Si Planeta major ſit vel minor quam Terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & denſitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad 8 quamproxime. Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos eſt $35\frac{1}{2}''$. Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem eſſe diametro altera *Caſſinus* dudum obſervavit, & Terræ diametrum inter polos minorem eſſe diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propoſitione ſequente.

PRO-

De Mundi Systemate

## PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

*Invenire & inter se comparare Pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.*

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantiæ corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum a centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proxime ut sinus versus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde est, ut quadratum sinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano. Ideoque cum Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit $48^{gr.}\ 50'$, ea locorum sub Æquatore $00^{gr.}\ 00'$, & ea locorum ad Polos $90^{gr.}$ & duplorum sinus versi sint 11334, 00000 & 20000, existente Radio 10000, & gravitas ad Polum sit ad gravitatem sub Æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad Polum ad gravitatem sub Æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in Latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub Æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub Æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli *Parisiensis*, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit Tabula sequens.

*Latitudo*

| *Latitudo Loci* | *Longitudo Penduli* | | *Mensura Gradus unius in Meridiano* |
|---|---|---|---|
| Gr. | Ped. | Lin. | Hexaped. |
| 0 | 3 . | 7,468 | 56909 |
| 5 | 3 . | 7,482 | 56914 |
| 10 | 3 . | 7,526 | 56931 |
| 15 | 3 . | 7,596 | 56959 |
| 20 | 3 . | 7,692 | 56996 |
| 25 | 3 . | 7,811 | 57042 |
| 30 | 3 . | 7,948 | 57096 |
| 35 | 3 . | 8,099 | 57155 |
| 40 | 3 . | 8,261 | 57218 |
| 1 | 3 . | 8,294 | 57231 |
| 2 | 3 . | 8,327 | 57244 |
| 3 | 3 . | 8,361 | 57257 |
| 4 | 3 . | 8,394 | 57270 |
| 45 | 3 . | 8,428 | 57283 |
| 6 | 3 . | 8,461 | 57296 |
| 7 | 3 . | 8,494 | 57309 |
| 8 | 3 . | 8,528 | 57322 |
| 9 | 3 . | 8,561 | 57335 |
| 50 | 3 . | 8,594 | 57348 |
| 55 | 3 . | 8,756 | 57411 |
| 60 | 3 . | 8,907 | 57470 |
| 65 | 3 . | 9,044 | 57524 |
| 70 | 3 . | 9,162 | 57570 |
| 75 | 3 . | 9,258 | 57607 |
| 80 | 3 . | 9,329 | 57635 |
| 85 | 3 . | 9,372 | 57652 |
| 90 | 3 . | 9,387 | 57657 |

Conſtat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi poſſit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi poſſit vel etiam per Eclipſes Lunæ, quam per arcus Geographice menſuratos in Meridiano.

Hæc

De Mundi Systemate

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit quam ad ſuperficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod ſi materia ad centrum redundans qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam, erit reciproce ut diſtantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ a materia illa quamproxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor eſt in materiam illam redundantem quam pro computo ſuperiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet, & exceſſus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum eſt.

Jam vero Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes Aſtronomicas faciendas miſſi, invenerunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem *D. Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu Solis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Pariſienſis* (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oſcillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur eſſe lineæ unius cum ſemiſſe.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Stæ Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in Obſervatorio

vatorio Regio *Parisiensi* esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac *D. Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio *Parisiensi* sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia 2′. 13″ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ respondent. Crassioribus hujus Observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante Observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr.}$ 38′ ad austrum, & ea *Portobeli* $9^{gr.}$ 33′ ad boream, & Latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *S^ti. Christophori*, & *S^ti. Dominici* sunt respective $4^{gr.}$ 55′, $14^{gr.}$ 40′, $14^{gr.}$ 00′, $14^{gr.}$ 44′, $12^{gr.}$ 6′, $17^{gr.}$ 19′, & $19^{gr.}$ 48′ ad boream. Et excessus longitudinis Penduli *Parisiensis* supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli superius computata. Et propterea Terra aliquanto altior est sub Æquatore quam pro superiore cal-

culo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem, niſi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi Soli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori Solis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus Aſtronomorum è *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub Æquatore quam in Obſervatorio Regio *Pariſienſi*, exiſtente differentia duarum circiter linearum ſeu ſextæ partis digiti. Per obſervationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum ſemiſſe. Error ſemiſſis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* poſtea per obſervationes ſuas in eadem inſula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{8}$. Sed & per obſervationes in inſulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Chriſtophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{1}{20}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris eſt $2\frac{2}{40}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{2}{40}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypotheſi quod Terra ex materia uniformiter denſa conſtat, ſit tantum $1\frac{87}{1000}$ lineæ: exceſſus altitudinis Terræ ad æquatorem ſupra altitudinem ejus ad polos, qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$, jam auctus in

ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{7}{12}$. Nam tarditas Penduli ſub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior eſt materia eo major eſſe debet altitudo ejus, ut pondere ſuo materiam ſub Polis in æquilibrio ſuſtineat.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipſes Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, ſed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab auſtro in boream ducta, exceſſu $55''$ circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ ſemidiameter maxima erit pedum Pariſienſium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus menſurante *Picarto* ſit hexapedarum 57060, menſurante vero *Caſſino* ſit hexapedarum 57292: ſuſpicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* auſtrum verſus majorem eſſe gradu præcedente hexapedis plus minus 72, ſeu parte octingenteſima gradus unius; exiſtente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos ſunt altiſſimæ. Quo poſito, corpora omnia ad polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos ſuperaret altitudinem ejus ad æquatorem milliaribus fere 95, & pendula iſochrona longiora forent ad Æquatorem quem in Obſervatorio Regio *Pariſienſi* exceſſu ſemiſſis digiti circiter; ut conferenti proportiones hic poſitas cum proportionibus in Tabula præcedente poſitis, facile conſtabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab auſtro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, exceſſu $2'.46''$, ſeu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus Experientia contrariatur. Certe *Caſſinus*, definiendo gradum unum eſſe hexapedarum 57292, medium inter menſuras ſuas omnes, ex hypotheſi de æqualitate graduum aſſumpſit. Et quamvis *Picartus* in *Galliæ* limite boreali invenit gradum paulo minorem eſſe, tamen *Norwoodus* noſter in regionibus magis borealibus, menſurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem eſſe quam *Caſſinus* invenerat. Et *Caſſinus* ipſe menſuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli menſurati, non ſatis certam & exactam eſſe judicavit ubi menſuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggreſſus eſt. Differentiæ vero inter menſuras *Caſſini*, *Picarti*, & *Norwoodi* ſunt prope inſenſibiles, & ab inſenſibilibus obſervationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ prætream.

De Mundi Systemate

## PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

*Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esset debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

## PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

*Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.*

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, Orbemque habet minus curvum, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop.

Prop. LXVI,) quam in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſthaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

## PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

*Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.*

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 8$^{gr.}$ 24$'$. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum,

De Mundi Systemate

rum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non superat $5''.\ 12'''$.

## PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

### *Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.*

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam

tertiam

tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in Mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἄκρους venient.

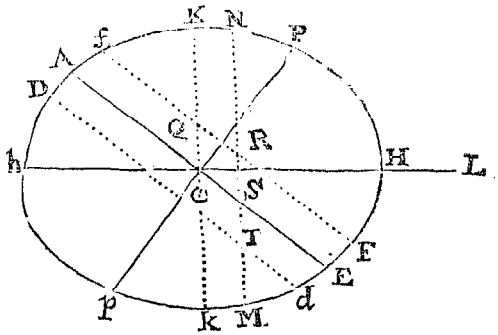
Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis a Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Vnde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in Syzygiis Solſtitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum;

De Mundi Systemate

ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas menſuratas a centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur Sphærois *HPKhpk*, deſignabit hæc figuram Maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemiſphæricos, unum in Hemiſphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemiſphærio oppoſito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti, veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, Luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, & Luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ Nodus aſcendens verſatur in principio Arietis. Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & veſpertini tempore



pore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzygias majores reddit, eosque proxime post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a Syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham*, sub latitudine

De Mundi Systemate

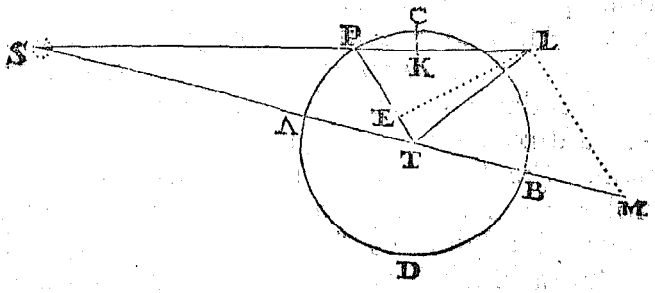
Boreali 20gr. 50'. *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

## PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

*Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.*

Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; ſitque *SL* ad *SK*




in duplicata ratione *SK* ad *SP*, & ipſi *PT* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus $SM$, $LM$, quarum $LM$ & ipſius $SM$ pars $TM$ perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas $TM$ & $ML$ deſignare. Vis $ML$ (in mediocri ſua quantitate) eſt ad vim centripetam, qua Luna in Orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam $PT$ revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43, ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id eſt, ut 1000 ad $178725$, ſeu 1 ad $178\frac{725}{1000}$. Invenimus autem in Propoſitione quarta quod, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam $PT$ ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad $60 \times 60$ quamproxime. Ideoque vis mediocris $ML$ eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{725}{1000}$, ſeu 1 ad 638092,6. Vnde ex proportione linearum $TM$, $ML$, datur etiam vis $TM$: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. *Q.E.I.*

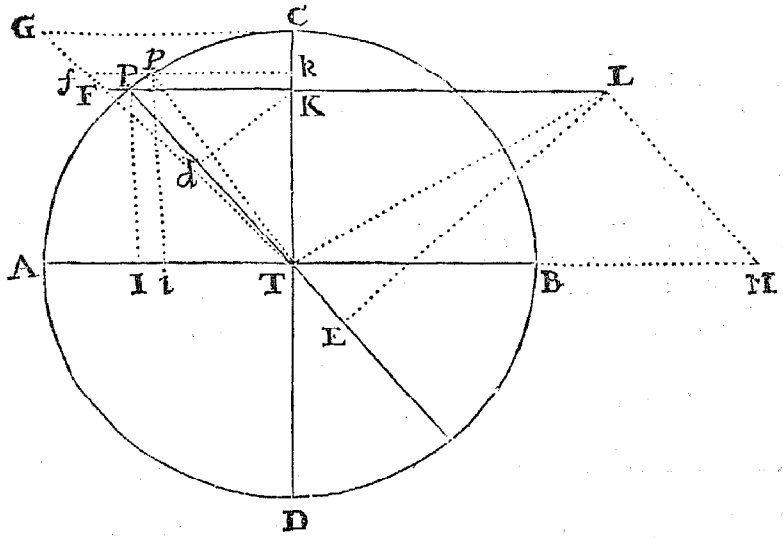
## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

*Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari deſcribit.*

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas $SP$, $ST$ ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis $LM$ reducetur ſemper

De Mundi Systemate

ad mediocrem ſuam quantitatem $TP$, ut & vis $TM$ ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim $TL$; & hæc vis, ſi in radium $TP$ demittatur perpendiculum $LE$, reſolvitur in vires $TE$, $EL$, quarum $TE$, agendo ſemper ſecundum radium $TP$, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ $TPC$ radio illo $TP$ factam; & $EL$ agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius a Quadratura $C$ ad Conjunctionem $A$, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans $EL$, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum $CTP$, vel




etiam per arcum $CP$. Ad $CT$ erigatur normalis $CG$ ipſi $CT$ æqualis. Et diviſo arcu quadrantali $AC$ in particulas innumeras æquales $Pp$, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductaque $pk$ perpendiculari ad $CT$, jungatur $TG$ ipſis $KP$, $kp$ productis occurrens in $F$ & $f$; & erit $Kk$ ad $PK$ ut $Pp$ ad $Tp$, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut $EL$; & compoſite, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium $EL$ tempore toto $CP$ impreſſarum in Lunam, atque adeo etiam ut velocitas hac ſumma

ſumma genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ $CTP$, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam $TP$, tempore ſuo periodico $CADBC$ dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore $CT$ cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe ſuo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum $Kd$ in $TP$ demiſſum ſit ipſius $EL$ pars tertia, & ipſius $TP$ ſeu $ML$ in Octantibus pars dimidia, vis $EL$ in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim $ML$ in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore $CT$ velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem $CPA$ velocitatem majorem generaret in ratione $CA$ ad $CT$ ſeu $TP$. Exponatur vis maxima $EL$ in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis $CP$ generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor $EL$ eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto $CPA$, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum $TCG$, ſive ut arcus quadrantalis $CA$ & radius $TP$. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma $11915+50$ ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia $A$, ac differentia $11915-50$ ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum $TCG$ (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus $PK$ ad quadratum Radii $TP$, id eſt, ut $Pd$ ad $TP$) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio $P$.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere ſit dierum

De Mundi Systemate

rum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023-50$ ad $11023+50$, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio $P$ versatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, existente videlicet $TP$ æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & Sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

*Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terra.*

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ a Terra conjunctim; & propterea distantia Lunæ a Terra est in ratione composita ex subduplicata ratione Areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

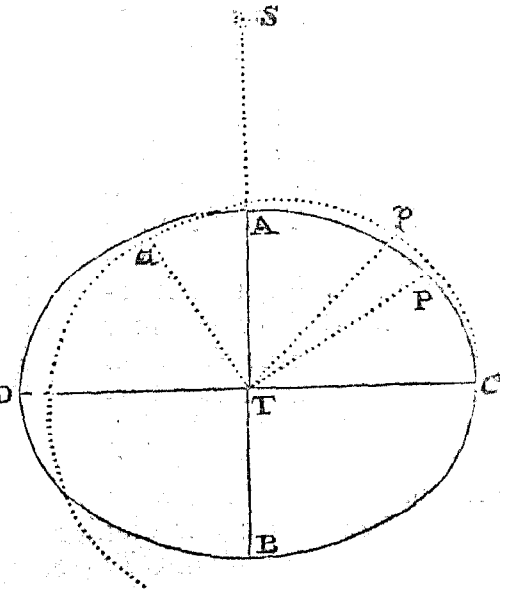
*Corol.* 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri potest.

## PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

*Invenire diametros Orbis in quo Luna, absque eccentricitate, moveri deberet.*

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter

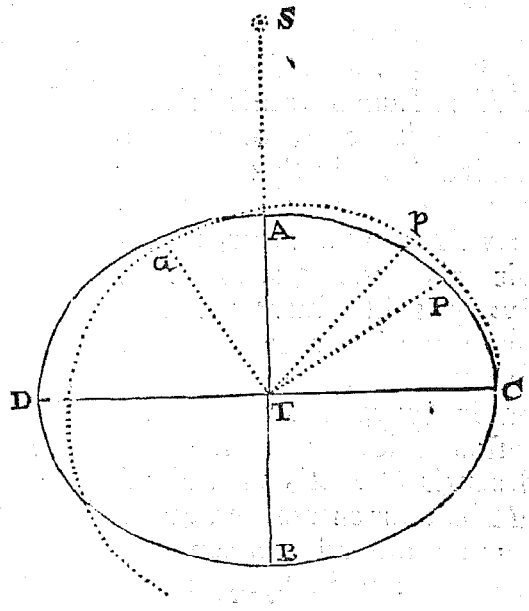
ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2PK$ (Vide *Figur. pag.* 394.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris $KT$, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris $ML$, quæ in Quadraturis est $PT$ vel $TK$ & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris $TM$ in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris $ML$ subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis $A$ & $B$ est ad ipsius velocitatem in Quadraturis $C$ & $D$, ut $CT$ ad $AT$ & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, *i. e.* ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT$ *cub.*




Quoniam

De Mundi Systemate

Quoniam Figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro $T$ Terra collocetur, & cujus axis major $DC$ Quadraturis, minor $AB$ Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura $Cpa$, cujus puncta singula $p$ inveniuntur capiendo punctum quodvis $P$ in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo $Tp$ æqualem $TP$, ea lege ut angulus $PTp$ æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ $C$ confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus $CTp$ sit ad angulum $CTP$ ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29^{d}.12^{h}.44'$, ad $27^{d}.7^{h}.43'$. Capiatur igitur angulus $CTa$ in eadem ratione ad angulum rectum $CTA$, & sit longitudo $Ta$ æqualis longitudini $TA$; & erit $a$ Apsis ima & $C$ Apsis summa Orbis hujus $Cpa$. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis $Cpa$ in vertice $a$, & curvaturam Circuli centro $T$ intervallo $TA$ descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice $A$ & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli $CTP$ ad angulum $CTp$; & quod curvatura Ellipseos in $A$ sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione $TA$ ad $TC$; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro $T$ intervallo $TC$ descripti, ut $TC$ ad $TA$; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in $C$, in duplicata ratione $TA$ ad $TC$; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice $C$ & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ $Tpa$ in vertice $C$ & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli



anguli $CTp$ ad angulum $CTP$. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter se collatis, prodit curvatura Figuræ $Cpa$ in $a$ ad ipsius curvaturam in $C$, ut $AT\,cub + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\,cub + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum $CTP$ & $CTp$ applicatam ad quadratum anguli minoris $CTP$, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^{d.}\,7^{h.}\,43'$, & $29^{d.}\,12^{h.}\,44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^{d.}\,7^{h.}\,43'$.

Igitur cum $a$ designet Syzygiam Lunæ, & $C$ ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio $CT$ ad $AT$, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\,CTqq - 2151969\,N \times CT\,cub + 368676\,N \times AT \times CTq + 36342\,ATq \times CTq - 362047\,N \times ATq \times CT + 2191371\,N \times AT\,cub + 4051{,}4\,ATq\,q = 0$. Hic pro terminorum $AT$ & $CT$ semisumma N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo $x$, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resoluta, obtinetur $x$ æqualis 0,00719, & inde semidiameter $CT$ fit 1,00719, & semidiameter $AT$ 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Est igitur distantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet Eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

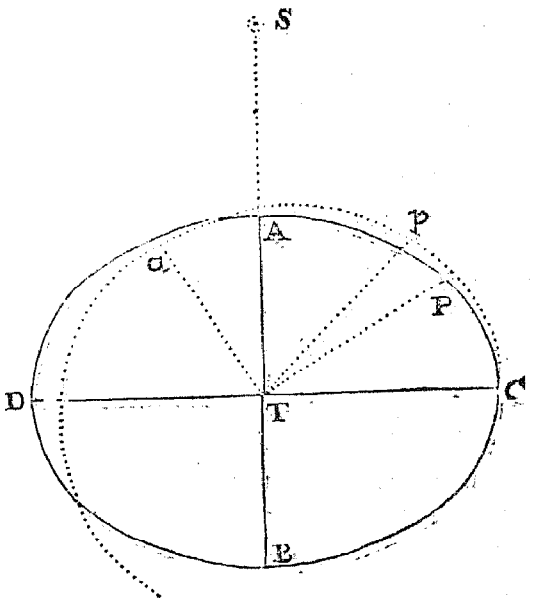
## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

### *Invenire Variationem Lunæ.*

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna $P$ in Ellipsi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio $TP$ ad Terram ducto describeret aream $CTP$ tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima $CT$ ad semidiametrum minimam $TA$ ut 70 ad 69: foret tangens anguli $CTP$ ad tangentem anguli motus medii a Quadratura $C$ computati, ut Ellipseos semidiameter $TA$ ad ejusdem semidiametrum

De Mundi Systemate

$TC$ seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ $CTP$, in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio $P$ supra momentum in Quadratura sit ut quadratum sinus anguli $CTP$. Id quod satis accurate fiet, si tangens anguli $CTP$ diminuatur in subduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli $CTP$ jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus $CTP$ in Octantibus, ubi motus medius est $45^{gr.}$ invenietur $44^{gr.}\ 27'.\ 28''$. qui subductus de angulo motus medii $45^{gr.}$ relinquit Variationem maximam $32'.\ 32''$. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum $CTA$ graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum $CTa$ angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id est, in ratione $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'.$ ad $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum $T$ dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eadem ratione fit $35'.\ 10''$.




Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantiis Solis a Terra, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione distantiæ Solis a Terra inverse. Ideoque in Apogæo

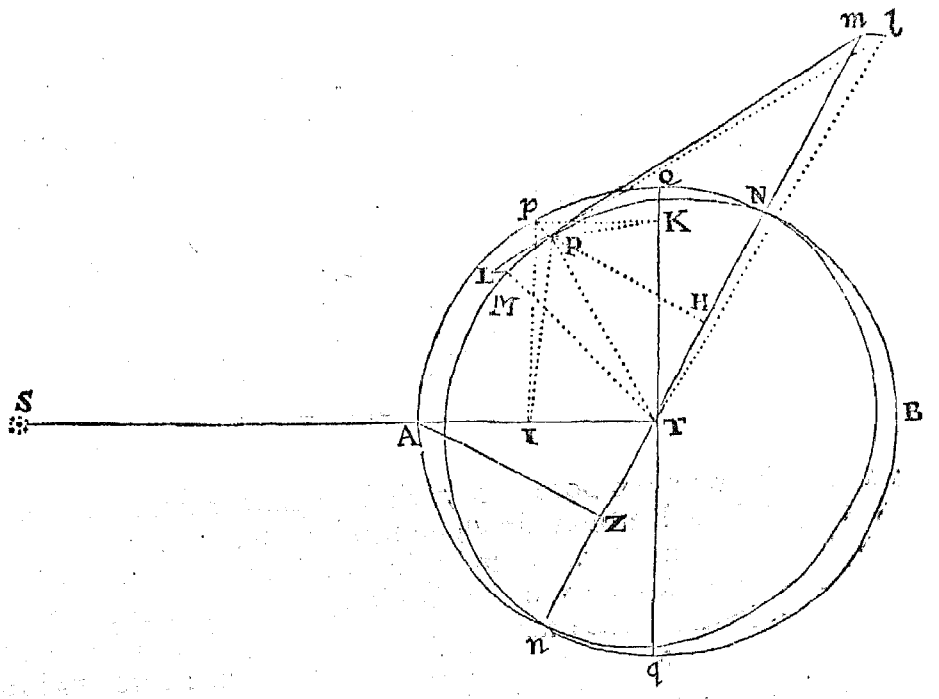
Apogæo Solis, Variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus Perigæo 37′. 11″, ſi modo Eccentricitas Solis ſit ad Orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{1}{2}$ ad 1000.

Hactenus Variationem inveſtigavimus in Orbe non eccentrico, in quo utique Luna in Octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a Terra. Si Luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a Terra quam ſi locaretur in hoc Orbe, Variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro Regula hic allata: ſed exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per Phænomena determinandum relinquo.

## PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

*Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.*

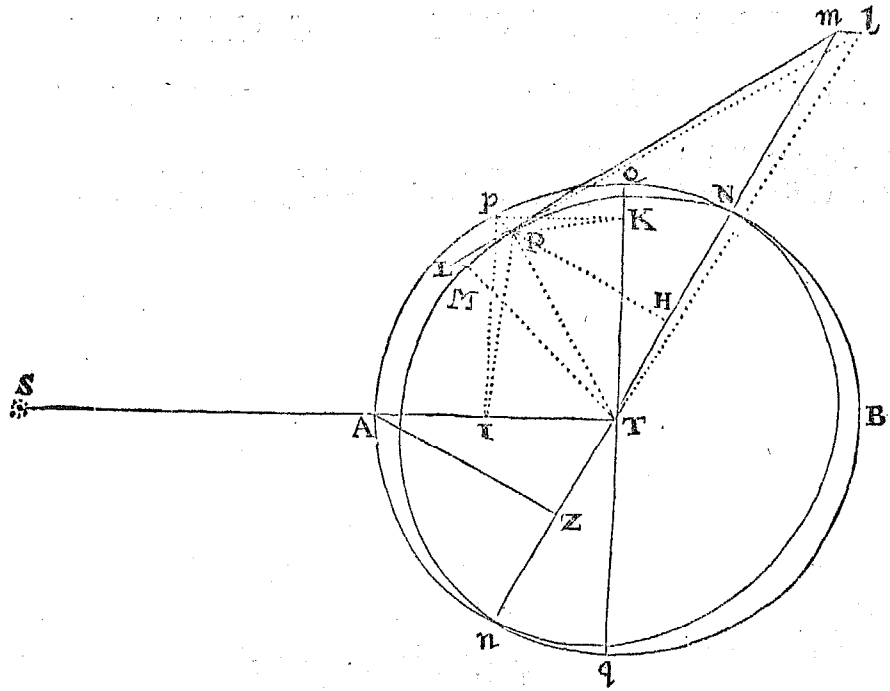
Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* veſtigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n* Nodos, *nTNm*




lineam Nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum Eclip-

De Mundi Systemate

Eclipticæ; $Q$, $q$ Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & $pK$ perpendiculum in lineam $Qq$ Quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ $LM$, altera lineæ $MT$ proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ $ST$ a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior $LM$ agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior $MT$ qua planum Orbis Lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per Prop. xxv.) eſt ad vim qua Luna in circulo circa




Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut $IT$ ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

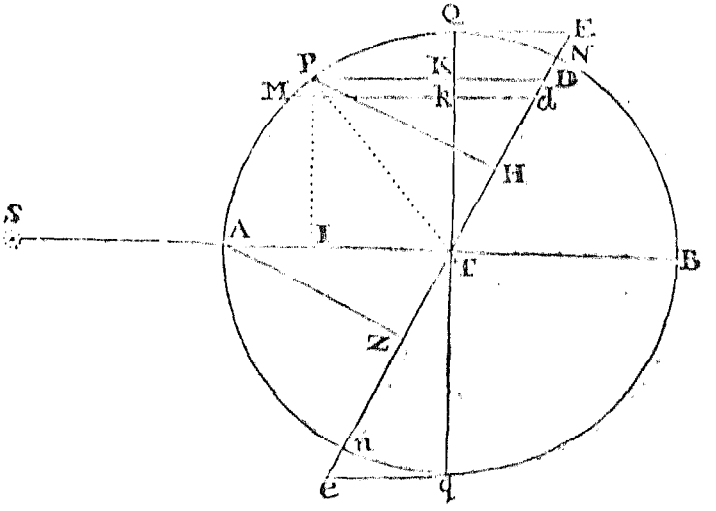
De-

Defignet jam $\mathcal{P}M$ arcum, quem Luna dato tempore quam minimo defcribit, & $ML$ lineolam quam Luna, impellente vi præfata $3IT$, eodem tempore defcribere poffet. Jungantur $\mathcal{P}L$, $M\mathcal{P}$, & producantur eæ ad $m$ & $l$, ubi fecent planum Eclipticæ; inque $Tm$ demittatur perpendiculum $\mathcal{P}H$. Et quoniam recta $ML$ parallela eft plano Eclipticæ, ideoque cum recta $ml$ quæ in plano illo jacet concurrere non poteft, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LM\mathcal{P}ml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea fimilia erunt triangula $LM\mathcal{P}$, $Lmp$. Jam cum $M\mathcal{P}m$ fit in plano Orbis, in quo Luna in loco $\mathcal{P}$ movebatur, incidet punctum $m$ in lineam $Nn$ per Orbis illius Nodos $N$, $n$ ductam. Et quoniam vis qua lineola $LM$ generatur, fi tota fimul & femel in loco $\mathcal{P}$ impreffa effet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda effet $L\mathcal{P}$, atque adeo transferret Lunam de plano $M\mathcal{P}mT$ in planum $L\mathcal{P}lT$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo $mTl$. Eft autem $ml$ ad $m\mathcal{P}$ ut $ML$ ad $M\mathcal{P}$, adeoque cum $M\mathcal{P}$ ob datum tempus data fit, eft $ml$ ut rectangulum $ML \times m\mathcal{P}$, id eft, ut rectangulum $IT \times m\mathcal{P}$. Et angulus $mTl$, fi modo angulus $Tml$ rectus fit, eft ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times \mathcal{P}m}{Tm}$, id eft, (ob proportionales $Tm$ & $m\mathcal{P}$, $T\mathcal{P}$ & $\mathcal{P}H$) ut $\frac{IT \times \mathcal{P}H}{T\mathcal{P}}$, adeoque ob datam $T\mathcal{P}$, ut $IT \times \mathcal{P}H$. Quod fi angulus $Tml$, feu $STN$ obliquus fit, erit angulus $mTl$ adhuc minor, in ratione finus anguli $STN$ ad Radium. Eft igitur velocitas Nodorum ut $IT \times \mathcal{P}H \times AZ$, five ut contentum fub finubus trium angulorum $T\mathcal{P}I$, $\mathcal{P}TN$ & $STN$.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiftentibus, recti fint, lineola $ml$ abibit in infinitum, & angulus $mTl$ evadet angulo $m\mathcal{P}l$ æqualis. Hoc autem in cafu, angulus $m\mathcal{P}l$ eft ad angulum $\mathcal{P}TM$, quem Luna eodem tempore motu fuo apparente circa Terram defcribit ut 1 ad 59,575. Nam angulus $m\mathcal{P}l$ æqualis eft angulo $L\mathcal{P}M$, id eft, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem fola vis præfata Solaris $3IT$ fi tum ceffaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare poffet; & angulus $\mathcal{P}TM$ æqualis eft angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe fuo retinetur, fi tum ceffaret vis Solaris $3IT$ eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut fupra diximus,

mus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (reſpectu fixarum) ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium $TPI$, $PIN$, & $STN$ (ſeu diſtantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo, & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

*Corol.* 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi $PM$ terminis $P$ & $M$ ad lineam Quadraturas jungentem $Qq$ demittantur perpendicula $PK$, $Mk$, eademque producantur donec ſecent lineam Nodorum $Nn$ in $D$ & $d$; erit motus horarius Nodorum ut area $MPDd$ & quadratum lineæ $AZ$ conjunctim. Sunto enim




$PK$, $PH$ & $AZ$ prædicti tres ſinus. Nempe $PK$ ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura, $PH$ ſinus diſtantiæ Lunæ a Nodo, & $AZ$ ſinus diſtantiæ Nodi a Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt autem $PT$ ad $PK$ ut $PM$ ad $Kk$, adeoque ob datas $PT$ & $PM$ eſt $Kk$ ipſi $PK$ proportionalis. Eſt & $AT$ ad $PD$ ut $AZ$ ad $PH$, & propterea $PH$ rectangulo $PD \times AZ$

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ qu.$ id eſt, ut area $PDdM$ & $AZqu.$ conjunctim. *Q. E. D.*

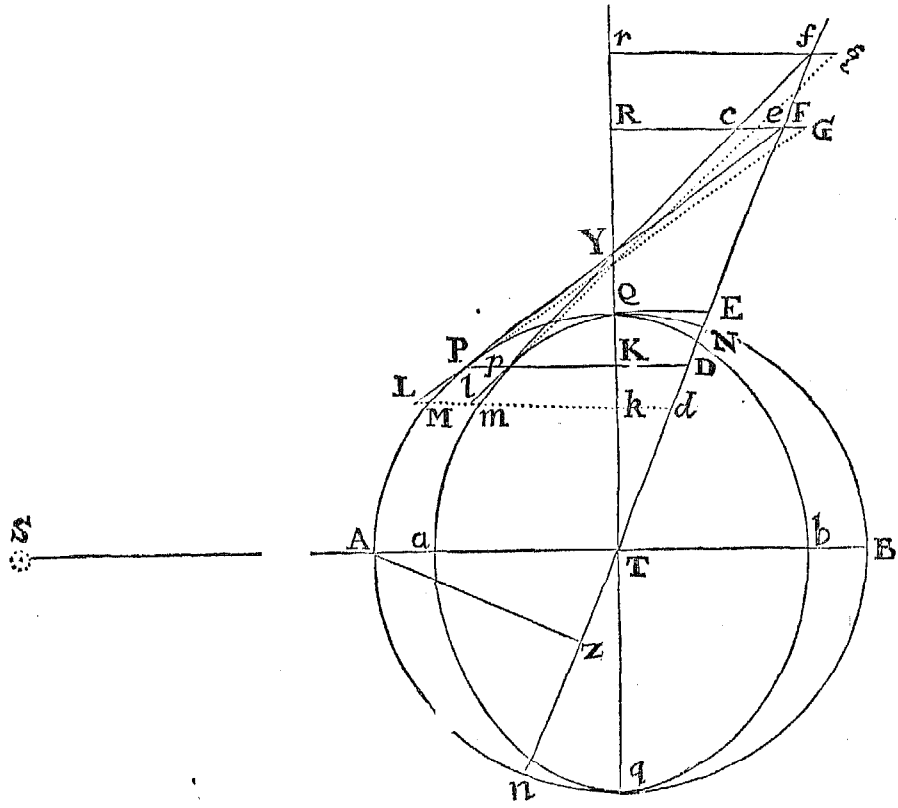
*Corol* 2. In data quavis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque eſt ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, ſive ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum $QAq$, ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a $Q$ ad $M$, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem $QE$ terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum $n$, ſumma illa erit area tota $EQAn$ quam linea $PD$ deſcribit, dein Luna pergente ab $n$ ad $q$, linea $PD$ cadet extra circulum, & aream $nqe$ ad circuli tangentem $qe$ terminatam deſcribet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ $QEN$, relinquet ſemicirculum $NQAn$. Igitur ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore Luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna verſatur in Syzygiis, eſt rectangulum ſub arcu $PM$ & radio $MT$; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium a ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi Nodi in Quadraturis verſantur, ſit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et cum motus horarius Nodorum ſemper ſit ut $AZqu.$ & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut $AZqu.$ & area $PDdM$ conjunctim, id eſt (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis deſcriptam) ut $AZqu.$ erit etiam motus mediocris ut $AZqu.$ atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas verſantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ *Q. E. D.*

PRO-

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

*Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.*

Designet $Qpmaq$ Ellipsin, axe majore $Qq$, minore $ab$ descriptam, $QAq$ Circulum circumscriptum, $T$ Terram in utriusque centro communi, $S$ Solem, $p$ Lunam in Ellipsi motam, & $pm$ arcum quem data temporis particula quam minima describit, $N$ & $n$ Nodos linea $Nn$ junctos, $pK$ & $mk$ perpendicula in axem $Qq$ demissa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in $P$ & $M$,




& lineæ Nodorum in $D$ & $d$. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area $pDdm$.

Nam si $PF$ tangat Circulum in $P$, & producta occurrat $TN$ in $F$, & $pf$ tangat Ellipsin in $p$ & producta occurrat eidem $TN$ in

in $f$, conveniant autem hæ tangentes in axe $TQ$ ad $T$; & ſi $ML$ deſignet ſpatium quod Luna in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum $PM$, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu tranſverſo deſcribere poſſet, & $ml$ deſignet ſpatium quod Luna in Ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, deſcribere poſſet; & producantur $LP$ & $lp$ donec occurrant plano Eclipticæ in $G$ & $g$; & jungantur $FG$ & $fg$, quarum $FG$ producta ſecet $pf$, $pg$ & $TQ$ in $c$, $e$ & $R$ reſpective, & $fg$ producta ſecet $TQ$ in $r$: Quoniam vis $3IT$ ſeu $3PK$ in Circulo eſt ad vim $3IT$ ſeu $3pK$ in Ellipſi, ut $PK$ ad $pK$, ſeu $AT$ ad $aT$; erit ſpatium $ML$ vi priore genitum, ad ſpatium $ml$ vi poſteriore genitum, ut $PK$ ad $pK$, id eſt, ob ſimiles figuras $PTKp$ & $FTRc$, ut $FR$ ad $cR$. Eſt autem $ML$ ad $FG$ (ob ſimilia triangula $PLM$, $PGF$) ut $PL$ ad $PG$, hoc eſt (ob parallelas $Lk$, $PK$, $GR$) ut $pl$ ad $pe$, id eſt, (ob ſimilia triangula $plm$, $cpe$) ut $lm$ ad $ce$; & inverſe ut $LM$ eſt ad $lm$, ſeu $FR$ ad $cR$, ita eſt $FG$ ad $ce$. Et propterea ſi $fg$ eſſet ad $ce$ ut $fT$ ad $cT$, id eſt, ut $fr$ ad $cR$ (hoc eſt, ut $fr$ ad $FR$ & $FR$ ad $cR$ conjunctim, id eſt, ut $fT$ ad $FT$ & $FG$ ad $ce$ conjunctim,) quoniam ratio $FG$ ad $ce$ utrinque ablata relinquit rationes $fg$ ad $FG$ & $fT$ ad $FT$, foret $fg$ ad $FG$ ut $fT$ ad $FT$; atque adeo anguli, quos $FG$ & $fg$ ſubtenderent ad Terram $T$, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum $PM$, in Ellipſi arcum $pm$ percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo $fg$ eſſet ad $ce$ ut $fT$ ad $cT$, id eſt, ſi $fg$ æqualis eſſet $\frac{ce \times fT}{cT}$. Verum ob ſimilia triangula $fgp$, $cep$, eſt $fg$ ad $ce$ ut $fp$ ad $cp$; ideoque $fg$ æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem $fg$ revera ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem $FG$ ſubtendit, hoc eſt, motus Nodorum in Ellipſi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc $fg$ ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem $fg$ ſeu $\frac{ce \times fT}{cT}$, id eſt, ut $fp \times cT$ ad $fT \times cp$, ſeu $fp$ ad $fT$ & $cT$ ad $cp$, hoc eſt, ſi $ph$ ipſi $TN$ parallela occurrat $FP$ in $h$, ut $Fh$ ad $FT$ & $FT$ ad $FP$; hoc eſt, ut $Fh$ ad $FP$ ſeu $Dp$ ad $DP$, adeoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum area poſterior

Liber Tertius.

De Mundi Systemate

ſterior proportionalis ſit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipſi. *Q.E.D.*

*Corol.* Igitur cum, in data Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum $pDdm$, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis $m$, ſit area $mpQEd$, quæ ad Ellipſeos tangentem $QE$ terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipſis ad Circulum; id eſt, ut $Ta$ ad $TA$, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo ſit ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ ſi capiatur angulus $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}.$ ad angulum $16'.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipſi ad $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}.$ ut $AZq$ ad $ATq$; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius deſcribit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus eſt ad exceſſum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in ſingulis Orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad exceſſum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in Quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna per-

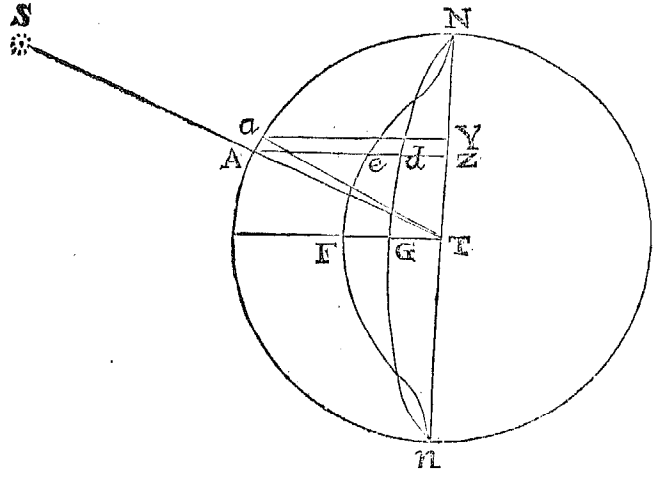
percurrit $PM$, (cæteris paribus) ut $ML$, & $ML$ eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''.\ 42'''.\ 7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''.\ 43^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectentur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''.16'''.37^{iv}.42^{v}$. ut $AZqu.$ ad $ATqu.$; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

*Invenire motum medium Nodorum Lunæ.*

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea vero Solem *S*, per motum Terræ, progredi a Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt autem maxima




*AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''.16'''.37^{iv}.42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. *hor.* 6. *min.* 9. fit $39^{gr}.38'.7''.50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.49'.3''.55'''$. eſt motus

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab $N$ ad $A$, est ad $19^{gr.}\,49'.\,3''.\,55'''$. ut area $NAZ$ ad circulum totum. LIBER TERTIUS.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr.}\,38'.\,7''.\,50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis $N$ sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut $AZq$ ad $ATq$: erit motus Solis ad motum Nodi in $N$, ut $360\,ATq$ ad $39{,}6355\,AZq$; id est, ut $9{,}0827646\,ATq$ ad $AZq$. Unde si circuli totius circumferentia $NAn$ dividatur in particulas æquales $Aa$, tempus quo Sol percurrat particulam $Aa$, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum $T$ revolvatur, reciproce ut $9{,}0827646\,ATq$ ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum $NA$, exponatur per Sectorem $NTA$, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum $Aa$, exponatur per Sectoris particulam $ATa$; & (perpendiculo $a\Upsilon$ in $Nn$ demisso) si in $AZ$ capiatur $dZ$, ejus longitudinis ut sit rectangulum $dZ$ in $Z\Upsilon$ ad Sectoris particulam $ATa$ ut $AZq$ ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$, id est, ut sit $dZ$ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut $ATq$ ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$; rectangulum $dZ$ in $Z\Upsilon$ designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus $Aa$ percurritur. Et si punctum $d$ tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea $NdZ$ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus $NA$ percurritur; & propterea excessus Sectoris $NAT$ supra aream $NdZ$ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in $AZ$ longitudo $eZ$, quæ sit ad longitudinem $AZ$ ut $AZq$ ad $9{,}0827646\,ATq+AZq$. Sic enim rectangulum $eZ$ in $Z\Upsilon$ erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis quo arcus $Aa$ percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum $e$ tangat

Curvam

Curvam $NeFn$, area tota $NeZ$, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus $AN$ percurritur; & area reliqua $NAe$ reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus totus $NA$, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui reſpondet Circulo toti erat $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$; & propterea motus, qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr.}\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum Nodi inter ſui ipſius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr.}\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter eaſdem Conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum $360^{gr.}$ ut Nodi motus jam inventus $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Aſtronomicas eſt $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

## PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

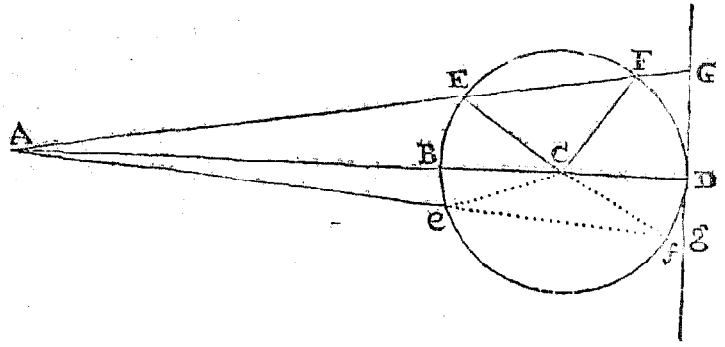
### *Invenire motum verum Nodorum Lunæ.*

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iſte eſt ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro $C$, intervallo quovis $C\mathcal{D}$, deſcribatur circulus $BEF\mathcal{D}$. Producatur $\mathcal{D}C$ ad $A$, ut ſit $AB$ ad $AC$ ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, (id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo $BC$ ad $AC$ ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$) hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$ dein per punctum $\mathcal{D}$ ducatur infinita $Gg$, quæ tangat circulum in $\mathcal{D}$; & ſi capiatur angulus $BCE$ vel $BCF$ æqualis duplæ diſtantiæ Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur $AE$ vel $AF$ ſecans perpendiculum $DG$ in $G$; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum Nodi inter ipſius Syzygias (id eſt, ad $9^{gr.}\ 11'.\ 3''.$) ut tangens $DG$ ad circuli $BED$ circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus $DAG$ uſurpari poteſt) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi






tranſeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tranſeunt a Syzygiis ad Quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA-NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio annua motus Nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri annuæ, alteri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi poſſint.

*Corol.* Ex hac & præcedente Propoſitione liquet quod Nodi in Syzygiis ſuis quieſcunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}.$ Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus ſit $1^{gr.}\ 30'.$ Quæ omnia cum Phænomenis cœleſtibus probe quadrant.

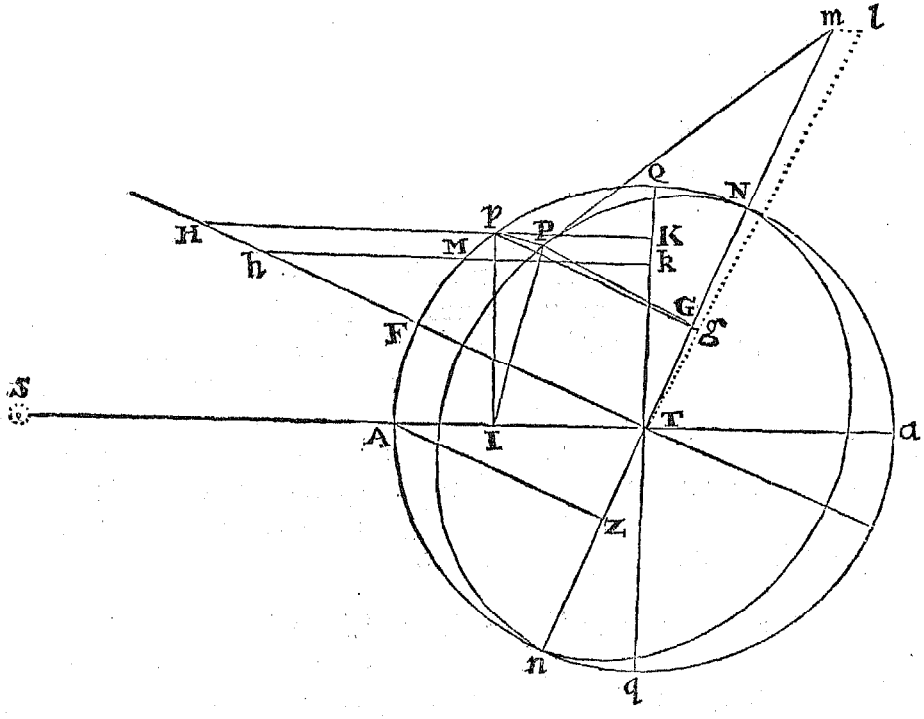
PRO-

De Mundi Systemate

## PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

*Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.*

Deſignent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* Inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ,




ubi Luna verſatur in *P*; & angulus *Pgp* Inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum; adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea Inclinationis. Eſt autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg*, ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus *GTg* (per Propoſit. xxx.) ſit ad angulum $33''.10'''.33^{iv}.$ ut

*IT* ×

$IT \times PG \times AZ$ ad $AT\,cub$, erit angulus $GPg$ (seu Inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''.\,10'''.\,33^{iv}$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$. *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyratur. Quod si Orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

*Corol.* 1. Si ad $N\mathfrak{N}$ erigatur perpendiculum $TF$, sitque $pM$ motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula $pK$, $Mk$ in $QT$ demissa & utrinque producta occurrant $TF$ in $H$ & $h$: erit $IT$ ad $AT$ ut $Kk$ ad $Mp$, & $TG$ ad $Hp$ ut $TZ$ ad $AT$, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis Variatio horaria ad $33''.\,10'''.\,33^{iv}$, ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub$.

*Corol.* 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\,10'''.\,33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti $p$ genitarum, & sub signis propriis $+$ & $-$ conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\,cub$. hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\,quad$.

*Corol.* 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\,10'''.\,33^{iv}$, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,AT\,q$, sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id

De Mundi Systemate

eſt (cum $Pp$ ſit ad $PG$ ut ſinus Inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli $ATn$ ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

*Corol.* 4. Quoniam Inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis verſantur, eſt (per hanc Propoſitionem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\,cub.$ id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à Quadratura ad Syzygiam, (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ſeu $5878''$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi Inclinatio ſit $5^{gr.}\ 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex ſumma omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, eſt $163''$, ſeu $2'.\ 43''$.

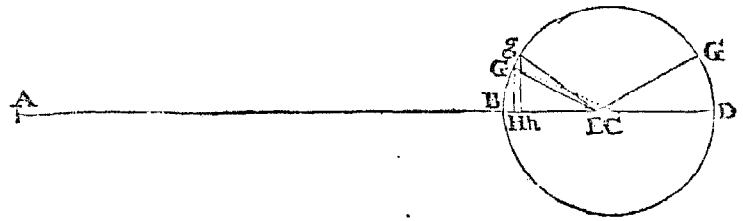
## PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

*Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.*

Sit $AD$ ſinus Inclinationis maximæ, & $AB$ ſinus Inclinationis minimæ. Biſecetur $BD$ in $C$, & centro $C$, intervallo $BC$, deſcribatur Circulus $BGD$. In $AC$ capiatur $CE$ in ea ratione ad $EB$ quam $EB$ habet ad $2BA$: Et ſi dato tempore conſtituatur angulus $AEG$ æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Qua-

Quadraturis, & ad $AD$ demittatur perpendiculum $GH$: erit $AH$ ſinus Inclinationis quæſitæ. 

Nam $GEq$ æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt $GEq$ ut $AH$. Deſignet jam $AEg$ duplicatam diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus $Gg$, ob datum



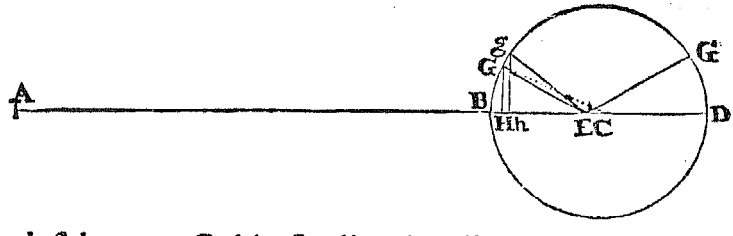

angulum $GEg$, erit ut diſtantia $GE$. Eſt autem $Hh$ ad $Gg$ ut $GH$ ad $GC$, & propterea $Hh$ eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut $AH$ & ſinus anguli $AEG$ conjunctim. Igitur ſi $AH$ in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed $AH$ ubi punctum $G$ incidit in punctum alterutrum $B$ vel $D$ huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum $BEG$, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum $BEG$ rectum eſſe, & in hoc caſu $Gg$ eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut contentum ſub Inclinationis ſinu $AH$ & ſinu anguli recti $BEG$, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus $AH$ ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum Inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem Variatio tota, ſinuum differentiæ $BD$ reſpondens, ad Variationem illam horariam ut diameter $BD$ ad

De Mundi Systemate

arcum $Gg$; id est, ut diameter $BD$ ad semicircumferentiam $BGD$ & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota $BD$ ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa $BD$ prodibit $16'.\ 23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclinatio minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'.\ 43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris $BD$ in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'.\ 45''$: adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit $5^{gr.}\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit $4^{gr.}\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.




Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat $AB$ ad $AD$ ut sinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad sinum graduum $5.\ 17'.\ 20''$, & capiatur angulus $AEG$ æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit $AH$ sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat $90^{gr.}$ à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

*Scho-*

*Scholium.*

Hiſce motuum Lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, & Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis a Terra diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis eſt, & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium, & in oppoſita Orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{1}{2}$, hæc Æquatio ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed Eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{5}{6}$, & Æquatio maxima erit 11′. 52″.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis eſt in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, eſt 1 gr. 56′. 26″ prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{5}{6}$ congruens. Quod ſi motus Solis eſſet in triplicata ratione diſtantiæ inverſe, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam 2 gr. 56′. 9″. Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2 gr. 56′. 9″, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi 19′. 52″: & Æquatio maxima medii motus Nodorum 9′. 27″. Additur vero Æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſita Orbis parte.

Per

DE MUNDI SYSTEMATE

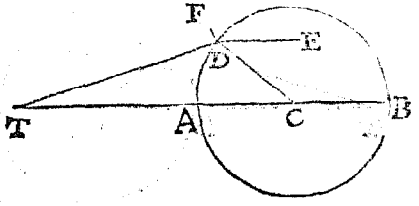
Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major ſit ubi tranſverſa diameter Orbis Lunaris tranſit per Solem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a ſitu Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima eſt cum Apogæum Lunæ verſatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & ſubducitur in tranſitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semeſtrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima eſt, aſcendit ad $3'.45''$ circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione diſtantiæ Solis inverſe, adeoque in maxima Solis diſtantia eſt $3'.34''$, & in minima $3'.56''$ quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ ſitum eſt extra Octantes, evadit minor; eſtque ad Æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta tranſit per Solem, quam ubi linea ad rectos eſt angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi Nodi in Solis Octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi tranſeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & ſubducitur in eorum tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima eſt, aſcendit ad $47''$ in mediocri Solis diſtantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad $45''$ in Apogæo ejus ad $49''$ circiter aſcendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9.

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semeſtrem vocabo. Et Æquatio maxima Semeſtris eſt 12 gr. 18′ circiter, quantum ex Obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000, & referat $T$ Terram & $TC$ Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur $TC$ ad $B$, ut ſit $CB$ ſinus Æquationis maximæ Semeſtris 12 gr. 18′ ad radium $TC$, & circulus $BDA$ centro $C$ intervallo $CB$ deſcriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum $BDA$ revolvitur. Capiatur angulus $BCD$ æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit $CTD$ Æquatio



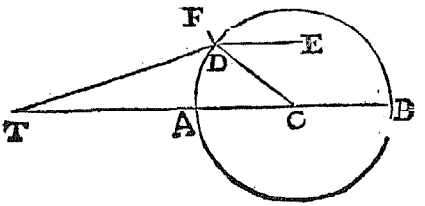



Semeſtris Apogæi Lunæ & $TD$ Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & diſtantia ejus a Terra, idque per Methodos notiſſimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum $C$ quam in Aphelio, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehenſam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo $BDA$ in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe; ab Orbis centro $D$ agatur recta $DE$ verſus Apogæum Lunæ, ſeu rectæ $TC$ parallela, & capiatur angulus $EDF$ æqualis exceſſui Argumenti

menti annui prædicti supra distantiam Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus $CDF$ æqualis complemento Anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et sit $DF$ ad $DC$ ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad distantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'.27''.16'''$ ad $59'.8''.10'''$ conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum Orbis Lunæ locari in puncto $F$, & in Epicyclo cujus centrum est $D$ & radius $DF$ interea revolvi dum punctum $D$ progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum $C$ descripta movebitur, erit reciproce ut cubus distantiæ Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terra sit partium 100000, & Eccentricitas $TC$ sit partium 5505 ut supra: recta $CB$ vel $CD$ invenietur partium $1172\frac{1}{4}$, & recta $DF$




partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam $TC$ subtendit angulum ad Terram quem translatio centri Orbis a loco $D$ ad locum $F$ generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici Orbis Lunæ a Terra, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, & ad distantiam Lunæ a Terra subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici potest. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ distantia a Terra, est ut sinus anguli quem recta illa $DF$ cum recta a puncto $F$ ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima est evadit $2'.25''$. Angulus autem quem recta $DF$ & recta a puncto $F$ ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum $EDF$ ab Anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis

Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″ ſunt ad Æquationem centri Secundam, addendam ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipſis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior deſideretur, corrigendus eſt locus Lunæ in Orbe ut ſupra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus ſupra, hæc maxima eſt in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima eſt in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia poſitione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad ſinum verſum diſtantiæ Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ a Sole, ita ſumma hujus quarti proportionalis & anguli cujuſdam alterius Q ad Variationem Secundam, ſubducendam ſi Lunæ lumen augetur, addendam ſi diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Obſervationibus determinandi ſunt. Et interea ſi pro angulo P uſurpentur 2′, & pro angulo Q 1′, non multum errabitur.

Cum Atmoſphæra Terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in Umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

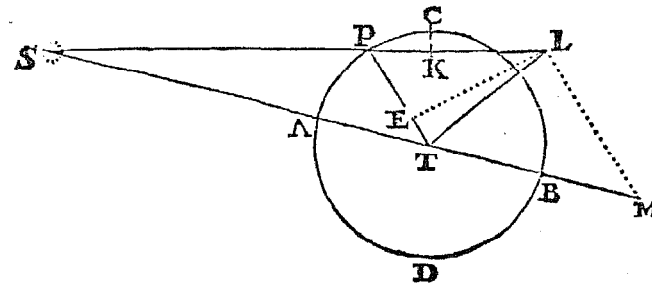
Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20gr. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♌ 7gr. 44′. 30″, & motum medium Lunæ ♒ 15gr. 20′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8gr. 20′. 00″, & Nodi aſcendentis ☊ 27gr. 24′. 20″; & differentiam meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* 0hor. 9min. 20ſec.

DE MUNDI SYSTEMATE

## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

*Invenire vim Solis ad Mare movendum.*

Solis vis $ML$ seu $PT$, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis $TM - LM$ seu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus, est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ, est ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus distant




a Sole. Vi altera quæ duplo major est, Mare elevatur & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole nil ageret.

Hæc est vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a Terra. In aliis Solis positionibus vis ad Mare attollendum, est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directe & cubus distantiæ Solis a Terra inverse.

*Corol.* Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

tudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub Polis menſura pedum Pariſienſium 85820; vis Solaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant a Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum octava parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85820 ut 1 ad 44527.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

*Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.*

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum Maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter a Terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æſtus in Syzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis, pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æſtus in portu *Biſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æſtus maximi non incidunt in ipſas Luminarium Syzygias, ſed ſunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium Lunæ poſt Syzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novendecim in consequentia. Æstas & Hyems maxime vigent, non in ipsis Solstitiis, sed ubi Sol distat a Solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus Æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æstu ad Æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis in hac distantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipsis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna absque Eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70, ideoque distantia Lunæ a Terra in Syzygiis est ad distantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a Syzygiis ubi Æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a Quadraturis ubi Æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad Mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

*Corol.*

*Corol.* 1. Cum Aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi Æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, Æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit Æſtus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quam in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis, per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo Æſtus reſpondet viribus Solis & Lunæ.

*Corol.*

*Corol.* 2. Cum vis Lunæ ad Mare movendum, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In Æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

*Corol.* 3. Quoniam vis Lunæ ad Mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint $31'.\ 16\frac{1}{2}''$ & $32'.\ 12''$) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 396; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ, ut 4891 ad 3960 ſeu 21 ad 17. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quam Terra noſtra.

*Corol.* 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Obſervationibus Aſtronomicis) ſit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39,371.

*Corol.* 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

*Corol.* 6. Et diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371.

*Corol.* 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ſemidiametrorum maximarum Terræ $60\frac{1}{4}$ quamproxime. Nam ſemidiameter maxima Terræ fuit pedum Pariſienſium 19767630, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujuſmodi ſemidiametris $60\frac{1}{4}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1190999707. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371, quæ proinde eſt pedum 1161498340. Et cum Luna revolvatur reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis $43\frac{1}{3}$; ſinus verſus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu ſuo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ deſcribit, eſt 1275235, exiſtente radio 100, 000000, 000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1161498340 ad pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,811833. Et ſi hæc vis augeatur in ratione $177\frac{22}{40}$ ad $178\frac{22}{40}$, habebitur

bebitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribere deberet pedes 14,89517. Et ad ſexageſimam partem hujus diſtantiæ, id eſt, ad diſtantiam pedum 19849995 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuatur hæc diſtantia in ſubduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur diſtantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius ſecundi deſcribet pedes 15,12028, id eſt, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in ſuperficie Terræ, in Latitudine urbis *Lutetiæ Pariſiorum*, ut ſupra oſtenſum eſt. Eſt autem diſtantia pedum 19701678 paulo minor quam ſemidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus ſemidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentiæ ſunt inſenſibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe ſuo, ad diſtantiam maximarum Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{4}$, ea eſt quam vis Gravitatis in ſuperficie Terræ requirit. LIBER TERTIUS.

*Corol.* 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, eſt mediocrium Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam ſemidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, eſt ad ſemidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{4}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non conſideravimus, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc Attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

## PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

### *Invenire Figuram corporis Lunæ.*

Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar Maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, qua Mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39,371 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1079 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{2}{3}$, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes $93\frac{1}{2}$. Eaque de causa Figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 187. Talem igitur Figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

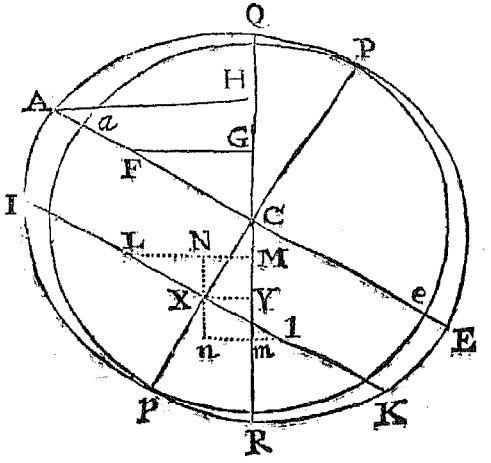
*Corol.* Inde vero fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. XVII. allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

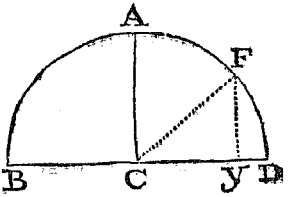
## LEMMA I.

*Si* APEp *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *& Polis* P, p *& Æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur Sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ Sphæra modo descripta altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in Æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime distat, consistentium vim & efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione Æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro *C* diametro *BD* describatur semicirculus *BAFDC*. Dividi intelligatur semicircumferentia *BAD* in partes

partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis $F$ ad diametrum $B\mathcal{D}$ demittantur ſinus $F\mathcal{Y}$. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus $F\mathcal{Y}$ æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus $C\mathcal{Y}$, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris $CF$; adeoque ſumma quadratorum ex omnibus $F\mathcal{Y}$, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris $CF$.



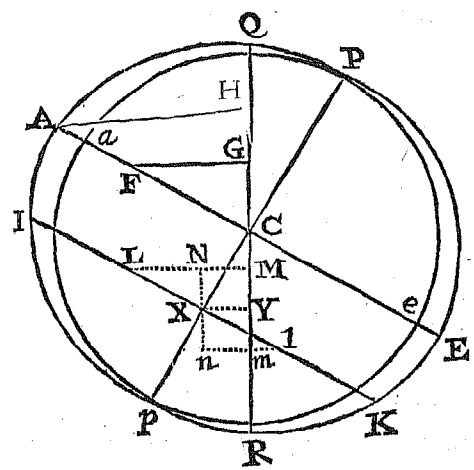

Jam dividatur perimeter circuli $AE$ in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque $F$ ad planum $\mathcal{Q}R$ demittatur perpendiculum $FG$, ut & a puncto $A$ perpendiculum $AH$. Et vis qua particula $F$ recedit a plano $\mathcal{Q}R$, erit ut perpendiculum illud $FG$ per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam $CG$, erit efficacia particulæ $F$ ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco $F$, erit ad efficaciam particulæ in loco $A$, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut $FCq$ ad $ACq$; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis $F$, erit ad efficaciam particularum totidem in loco $A$, ut ſumma omnium $FCq$ ad ſummam totidem $ACq$, hoc eſt, (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q.E.D.*

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano $\mathcal{Q}R$, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli Æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo $\mathcal{Q}R$ quam in plano Æquatoris jacentem.

## LEMMA II.

*Iisdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo* AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim *IK* circulus quilibet minor Æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit autem recta *Ll* plano *Pape* parallela & bisecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela sit plano *QR* & perpendi-




culis *LM*, *lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM$

$-NM\times mC$: & harum differentia $LN\times Mm-NM\times\overline{MC+mC}$, eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN\times Mm$ ſeu $2LN\times NX$, eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in $A$ conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut $LXq$ ad $ACq$. Et pars negativa $NM\times\overline{MC+mC}$ ſeu $2XY\times CY$, ad particularum earundem in $A$ conſiſtentium vim $2AH\times HC$, ut $CXq$ ad $ACq$. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum $L$ & $l$ ſimul ſumptarum vis ad Terram rotandam, eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco $A$ conſiſtentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq-CXq$ ad $ACq$. Sed ſi circuli $IK$ circumferentia $IK$ dividatur in particulas innumeras æquales $L$, erunt omnes $LXq$ ad totidem $IXq$ ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem $ACq$, ut $IXq$ ad $2ACq$; & totidem $CXq$ ad totidem $ACq$ ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli $IK$, ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco $A$, ut $IXq-2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli $AE$, ut $IXq-2CXq$ ad $ACq$.

Jam vero ſi Sphæræ diameter $Pp$ dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem $IK$; materia in perimetro circuli cujuſque $IK$ erit ut $IXq$: ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut $IXq$ in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli $AE$ perimetro conſiſteret, eſſet ut $IXq$ in $ACq$. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi $AE$ conſiſtentis, ut omnia $IXq$ in $IXq-2CXq$ ad totidem $IXq$ in $ACq$, hoc eſt, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in $ACq$, id eſt, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad totidem $ACqq-ACq\times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens cujus fluxio eſt $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio eſt $ACqq-ACq\times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq\times CX-\frac{4}{3}ACq\times CXcub+\frac{1}{5}CXqc$ ad $ACqq\times CX-\frac{1}{3}ACq\times CXcub$, id eſt, ſi pro $CX$ ſcribatur tota $Cp$ vel $AC$, ut $\frac{4}{15}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$, hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

## LEMMA III.

*Iiſdem poſitis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante deſcriptum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri* 925275 *ad numerum* 1000000.

Eſt enim motus Cylindri circum axem ſuum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

## HYPOTHESIS II.

*Si annulus prædictus Terra omni reliqua ſublata, ſolus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum* $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materia rigida & firma conſtaret.*

PRO-

## PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

*Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.*

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ & hujus dimidium $8''.\ 17'''.\ 38^{iv}.\ 18^{v}.$ (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; ſitque *anno toto* ſidereo $20^{gr.}\ 11'.\ 46''.$ Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim $20^{gr.}\ 11'.\ 46''.$ in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad $20^{gr.}\ 11'.\ 46''.$ ut dies ſidereus horarum 23. 56'. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43'; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit Terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* ſuperior eſt; (*Vid. Fig. pag.* 434.) & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.*−*aCqu.* id eſt (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* ſit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte Terram ſecundum Æquatorem cingeret & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum quo ipſius Nodi ſeu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti, ad motum

De Mundi Systemate

$20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires $3IT$, *in Fig. pag.* 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano $QR$, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ $PapAPepE$, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Idcoque annuus Æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

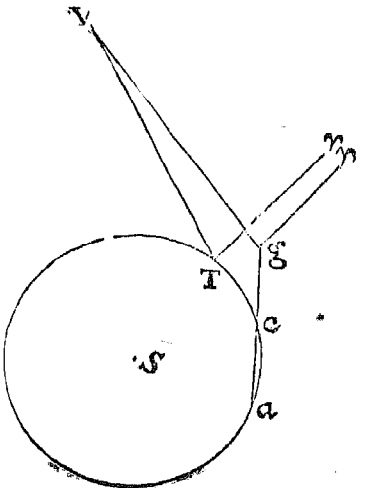
Si altitudo Terræ ad Æquatorem superet altitudinem ejus ad Polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

De Mundi Systemate

Agatur recta $ABC$, cujus partes $AB$, $BC$ rectis $QA$ & $QB$, $QB$ & $QC$ interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur $AC$ ad $G$, ut ſit $AG$ ad $AB$ ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur $QG$. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus $\gamma QG$ longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur $FQG$, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\gamma QG$, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet $S$ Solem, $acT$ Orbem magnum, $a$ locum Terræ in obſervatione prima, $c$ locum Terræ in obſervatione tertia, $T$ locum Terræ in obſervatione ultima, & $T\gamma$ lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus $\gamma TV$ æqualis angulo $\gamma QF$, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra verſatur in $T$. Jungatur $ac$, & producatur ea ad $g$, ut ſit $ag$ ad $ac$ ut $AG$ ad $AC$, & erit $g$ locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta $ac$ uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur $g\gamma$ ipſi $T\gamma$ parallela, & capiatur angulus $\gamma gV$ angulo $\gamma QG$ æqualis, erit hic angulus $\gamma gV$ æqualis longitudini Cometæ e loco $g$ ſpectati; & angulus $TVg$ parallaxis erit, quæ oritur a tranſlatione Terræ de loco $g$ in locum $T$: ac proinde $V$ locus erit Cometæ in plano Ecliptiæ. Hic autem locus $V$ Orbe Jovis inferior eſſe ſolet.




Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longe infra Jovem. Unde conſequens eſt quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis a Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione ſubduplicata lucis ad lucem inverſe. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum a *Flamſtedio* obſervata & Micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{.4}$ inverſe, & 12″ ad 30″ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665 menſe *Aprili*, ut author eſt *Hevelius*, claritate ſua pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio

De Mundi Systemate

dio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent a Sole noſtro, quam Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur a Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis a ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus a capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. *In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam* capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita *ſub Sole* deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum a Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu a Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante *Hevelio*,) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de

de motu ſuo apparente, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in Orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum a Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maxime ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum

regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

*Corol.* 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

*Corol.* 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

*Corol.* 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata est, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PRO-

## PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

*Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.*

Patet per Corol. 1. Propos. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

*Corol.* 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

*Corol.* 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

*Corol.* 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 100000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

*Corol.* 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

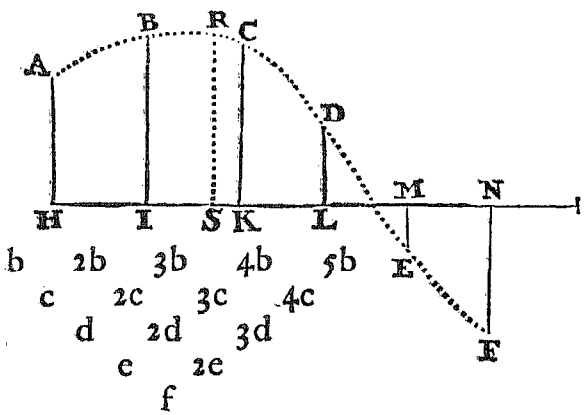
LEMMA

## LEMMA V.

*Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.*

Sunto puncta illa $A, B, C, D, E, F$, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam $HN$ demitte perpendicula quotcunque $AH, BI, CK, DL, EM, FN$.

*Cas.* 1. Si punctorum $H, I, K, L, M, N$ æqualia sunt intervalla $HI, IK, KL$, &c. collige perpendiculorum $AH, BI, CK$, &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. secundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id est, ita ut sit $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, &c. dein $b-2b=c$, &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam quæ hic est $f$. Deinde erecta quacunque perpendiculari $RS$, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla $HI, IK, KL, LM$, &c. unitates esse, & dic $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM=t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum $ME$, & præponendo signa negativa terminis $HS, IS$, &c. qui jacent ad partes puncti $S$ versus $A$, & signa affirmativa terminis $SK, SL$, &c. qui jacent ad alteras partes puncti $S$. Et signis probe observatis, erit $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.




*Cas.* 2. Quod si punctorum $H, I, K, L$, &c. inæqualia sint intervalla $HI, IK$, &c. collige perpendiculorum $AH, BI, CK$, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; secundas per intervalla bina divisas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per inter-

intervalla quaterna diviſas $e$, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. Poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, $p$ in $-IS=q$, $q$ in $+SK=r$, $r$ in $+SL=s$, $s$ in $+SM=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum $ME$, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

*Corol.* Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproxime. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola, per Methodos notiſſimas, ſemper quadrari Geometrice.

## LEMMA VI.

*Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.*

Deſignent $HI$, $IK$, $KL$, $LM$ tempora inter obſervationes, (*in Fig. præced.*) $HA$, $IB$, $KC$, $LD$, $ME$ obſervatas quinque longitudines Cometæ, $HS$ tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta $A, B, C, D, E$ duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata $RS$, erit $RS$ longitudo quæſita.

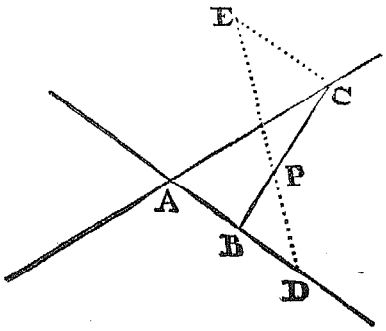
Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEMMA

## LEMMA VII.

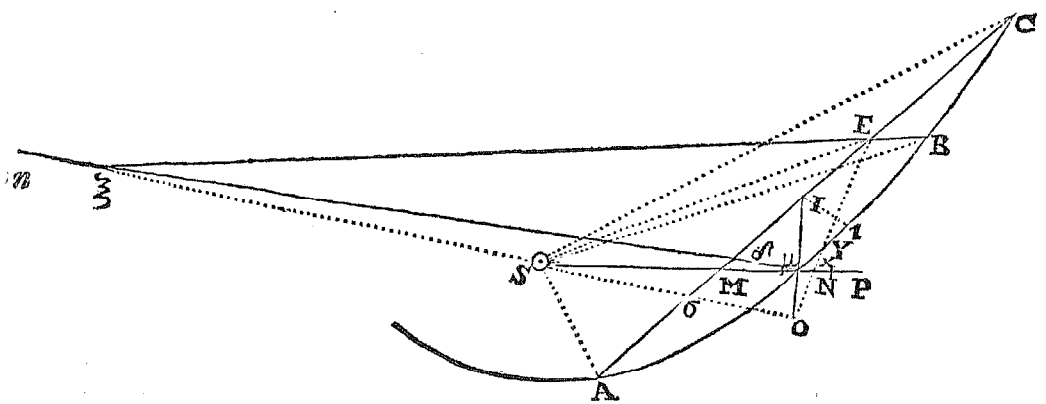
*Per datum punctum* P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*




A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*

## LEMMA VIII.

*Sit* ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* I$\mu$ *& vertex* $\mu$. *In* I$\mu$ *producta capiatur* $\mu$O *æqualis dimidio ipsius*




I$\mu$. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* $\xi$, *ut sit* S$\xi$ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* $\xi$B *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproxime.*

Junga-

Jungatur enim $EO$ secans arcum Parabolicum $ABC$ in $\Upsilon$, & agatur $\mu X$ quæ tangat eundem arcum in vertice $\mu$ & actæ $EO$ occurrat in $X$; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $AC\Upsilon\mu A$ ut $AE$ ad $AC$. Ideoque cum triangulum $ASE$ sit ad triangulum $ASC$ in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASC\Upsilon\mu A$ ut $AE$ ad $AC$. Cum autem $\xi O$ sit ad $SO$ ut 3 ad 1, & $EO$ ad $XO$ in eadem ratione, erit $SX$ ipsi $EB$ parallela: & propterea si jungatur $BX$, erit triangulum $SEB$ triangulo $XEB$ æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum $EXB$, & de summa auferatur triangulum $SEB$, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASC\Upsilon\mu A$ ut $AE$ ad $AC$. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASB\Upsilon\mu A$ quamproxime, & hæc area $ASB\Upsilon\mu A$ est ad aream $ASC\Upsilon\mu A$, ut tempus descripti arcus $AB$ ad tempus descripti arcus totius $AC$. Ideoque $AE$ est ad $AC$ in ratione temporum quamproxime. *Q.E.D.*

*Corol.* Ubi punctum $B$ incidit in Parabolæ verticem $\mu$, est $AE$ ad $AC$ in ratione temporum accurate.

*Scholium.*

Si jungatur $\mu\xi$ secans $AC$ in $\delta$, & in ea capiatur $\xi n$ quæ sit ad $\mu B$ ut $27MI$ ad $16M\mu$: acta $Bn$ secabit chordam $AC$ in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum $n$ ultra punctum $\xi$, si punctum $B$ magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum $\mu$; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

## LEMMA IX.

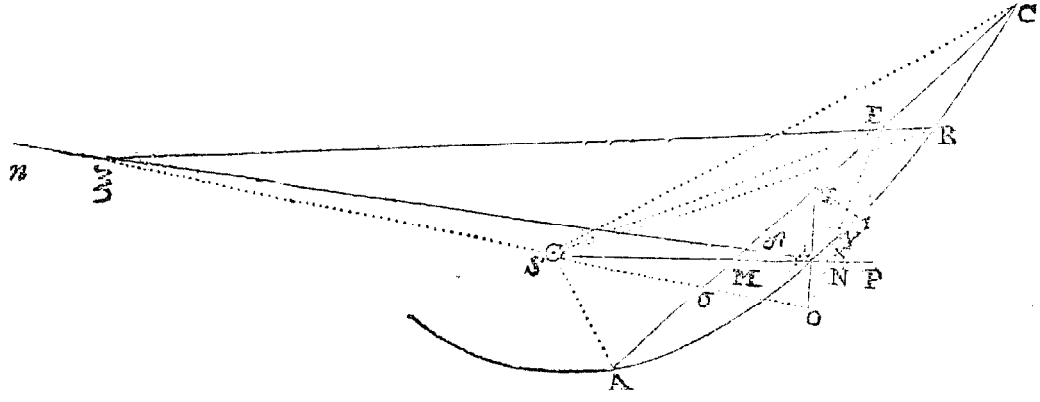
*Rectæ* $I\mu$ *&* $\mu M$ *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem $\mu$.

## LEMMA X.

*Si producatur* S $\mu$ *ad* N *&* P, *ut* $\mu$N *ſit pars tertia ipſius* $\mu$I, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* S$\mu$. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* A$\mu$C, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi Cometa velocitate quam habet in $\mu$, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in $\mu$; area quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ *ASC*$\mu$. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine *S*$\mu$, eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*$\mu$ ad triangulum *ASCM*, id eſt, ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*$\mu$ ad *SN*. Cum autem velocitas




Cometæ in altitudine *SP* ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine *S*$\mu$, in ſubduplicata ratione *SP* ad *S*$\mu$ inverſe, id eſt, in ratione *S*$\mu$ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*$\mu$ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q.E.D.*

*Corol.* Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproxime.

LEMMA

## LEMMA XI.

*Si Cometa motu omni privatus de altitudine* SN *seu* $S\mu + \frac{1}{2}I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur sub initio; idem semisse temporis quo in Orbe suo describat arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum $AC$, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine $SP$ (per Lemma novissimum) describet chordam $AC$, adeoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus semidiameter esset $SP$, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam $AC$, in subduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine $SP$, cadendo de altitudine illa in Solem, describeret semisse temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis $SP$, id est, spatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine $SN$, sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine $SP$, ut $SP$ ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine $SN$ eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id est, spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q.E.D.*

## PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

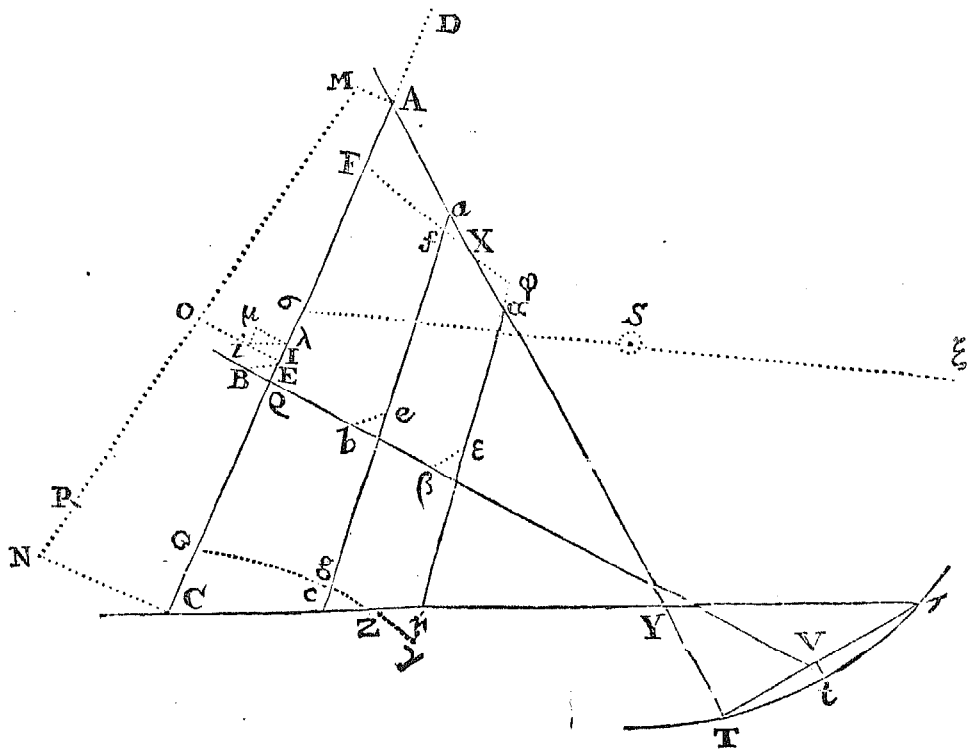
*Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Observationibus determinare.*

Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut

ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.

Designent *S* Solem, *T*, *t*, τ tria loca Terræ in Orbe magno, *TA*, *tB*, τ*C* observatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore, ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, quæque per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III. invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *T*τ. In longi-




tudine media *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco Cometæ in plano Eclipticæ, & inde versus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium *tB*.

Et

Et per punctum $E$ agatur (per hujus Lem. VII.) recta $AEC$, cujus partes $AE$, $EC$ ad rectas $TA$ & $\tau C$ terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt $A$ & $C$ loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione prima ac tertia quamproxime, ſi modo $B$ ſit locus ejus recte aſſumptus in obſervatione ſecunda.

Ad $AC$ biſectam in $I$ erige perpendiculum $Ii$. Per punctum $B$ age occultam $Bi$ ipſi $AC$ parallelam. Junge occultam $Si$ ſecantem $AC$ in $\lambda$, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem $S$ age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis $A$, $E$, $C$, $I$, a puncto $B$ verſus punctum $\xi$ duc occultam novam $BE$, quæ ſit ad priorem $BE$ in duplicata ratione diſtantiæ $BS$ ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum $E$ iterum duc rectam $AEC$ eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes $AE$ & $EC$ ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt $A$ & $C$ loca Cometæ magis accurate.

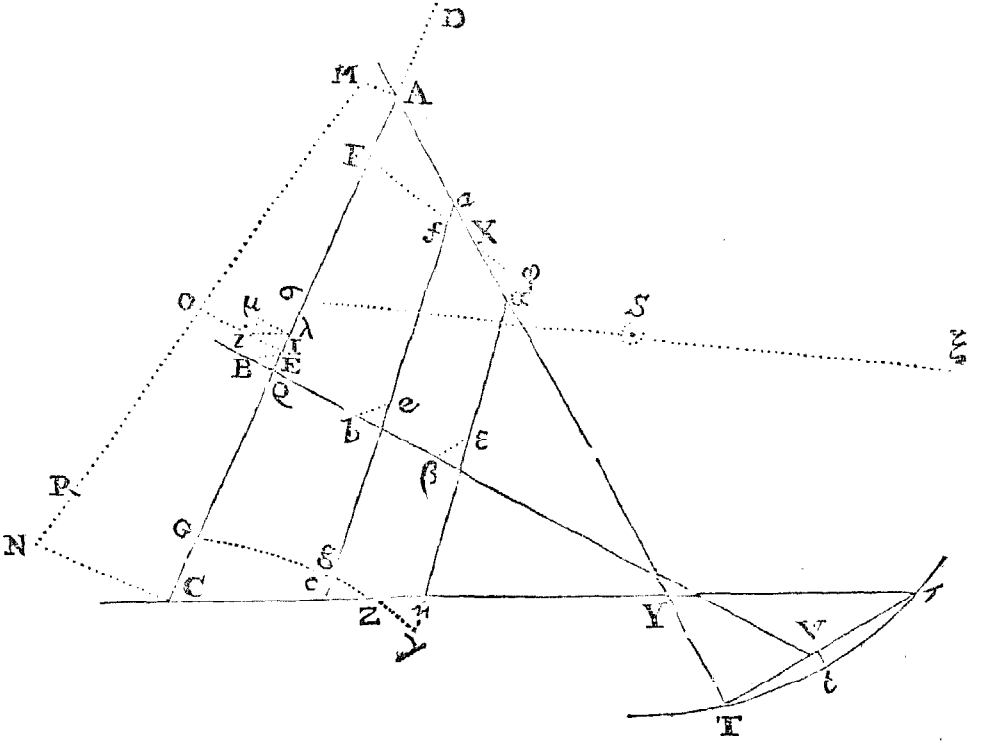
Ad $AC$ biſectam in $I$ erigantur perpendicula $AM$, $CN$, $IO$, quarum $AM$ & $CN$ ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios $TA$ & $\tau C$. Jungatur $MN$ ſecans $IO$ in $O$. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In $IA$ producta capiatur $ID$ æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta $OD$. Deinde in $MN$ verſus $N$ capiatur $MP$, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicata ratione mediocris diſtantiæ Telluris a Sole (ſeu ſemidiametri Orbis magni) ad diſtantiam $OD$. Si punctum $P$ incidat in punctum $N$; erunt $A$, $B$, $C$ tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum $P$ non incidat in punctum $N$; in recta $AC$ capiatur $CG$ ipſi $NP$ æqualis, ita ut puncta $G$ & $P$ ad eaſdem partes rectæ $NC$ jaceant.

Eadem methodo qua puncta $E$, $A$, $C$, $G$, ex aſſumpto puncto $B$ inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis $b$ & $\beta$ puncta nova $e$, $a$, $c$, $g$, & $\varepsilon$, $\alpha$, $\varkappa$, $\gamma$. Deinde ſi per $G$, $g$, $\gamma$ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam $\tau C$ in $Z$: erit $Z$ locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in $AC$, $ac$, $\alpha\varkappa$ capiantur $AF$, $af$, $\alpha\varphi$ ipſis $CG$, $cg$, $\varkappa\gamma$ reſpective æquales, & per puncta $F$, $f$, $\varphi$ ducatur circumferentia circuli $Ff\Phi$, ſecans rectam $AT$ in $X$; erit punctum $X$ alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta $X$ & $Z$ erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios $TX$ & $\tau Z$; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico $S$, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ, $Q.E.I.$

Con-

DE MUNDI SYSTEMATE

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta $AC$ ſecetur in $E$ in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & $BE$ per Lem. XI. ſit pars rectæ $BS$ vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui $ABC$ & chordæ $AEC$ interjecta; & $MP$ (per Corol. Lem. x.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi $MN$ æqualis fuerit, ſi modo $B$ ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.




Cæterum puncta $B$, $b$, $\beta$ non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus $AQt$, in quo veſtigium Orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam $tB$, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta $AC$, quæ ſit ad $\frac{4}{3}T\tau$ in ſubduplicata ratione $SQ$ ad $St$. Et agendo rectam $SEB$ cujus pars $EB$ æquetur longitudini $Vt$, determinabitur punctum $B$ quod prima vice uſurpare licet. Tum recta $AC$ deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa

inventa insuper longitudine $MP$; in $tB$ capiatur punctum $b$, ea lege, ut si $TA$, $\tau C$ se mutuo secuerint in $\Upsilon$, sit distantia $\Upsilon b$ ad distantiam $\Upsilon B$, in ratione composita ex ratione $MP$ ad $MN$ & ratione subduplicata $SB$ ad $Sb$. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium $\beta$, si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum sufficerint. Nam si distantia $B\beta$ perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta $F, f$ & $G, g$, actæ rectæ $Ff$ & $Gg$ secabunt $TA$ & $\tau C$ in punctis quæsitis $X$ & $Z$.

## *Exemplum.*

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

| | | Tem. appar. | Temp. verum | Long. Solis | Long. Cometæ | Lat. Cometæ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | h. ′ | h. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ |
| 1680 *Dec.* | 12 | 4.46 | 4.46. 0 | ♍ 1.51.23 | ♍ 6.31.21 | 8.26. 0 |
| | 21 | 6.32½ | 6.36.59 | ♐ 1. 6.44 | ♒ 5. 7.38 | 21.45.30 |
| | 24 | 6.12 | 6.17.52 | 14. 9.26 | 18.49.10 | 25.23.24 |
| | 26 | 5.14 | 5.20.44 | 16. 9.22 | 28.24. 6 | 27. 0.57 |
| | 29 | 7.55 | 8. 3. 2 | 19.19.43 | ♓ 13.11.45 | 28.10. 5 |
| | 30 | 8. 2 | 8.10.26 | 20.21. 9 | 17.39. 5 | 28.11.12 |
| 1681 *Jan.* | 5 | 5.51 | 6. 1.38 | 26.22.18 | ♈ 8.49.10 | 26.15.26 |
| | 9 | 6.49 | 7. 0.53 | ♒ 0.29. 2 | 18.43.18 | 24.12.42 |
| | 10 | 5.54 | 6. 6.10 | 1.27.43 | 20.40.57 | 23.44. 0 |
| | 13 | 6.56 | 7. 8.55 | 4.33.20 | 25.59.34 | 22.17.36 |
| | 25 | 7.44 | 7.58.42 | 16.45.36 | ♉ 9.35.48 | 17.56.54 |
| | 30 | 8. 7 | 8.21.53 | 21.49.58 | 13.19.36 | 16.40.57 |
| *Feb.* | 2 | 6.20 | 6.34.51 | 24.46.59 | 15.13.48 | 16. 2. 2 |
| | 5 | 6.50 | 7. 4.41 | 27.49.51 | 16.59.52 | 15.27.23 |

His adde Observationes quasdam e nostris.

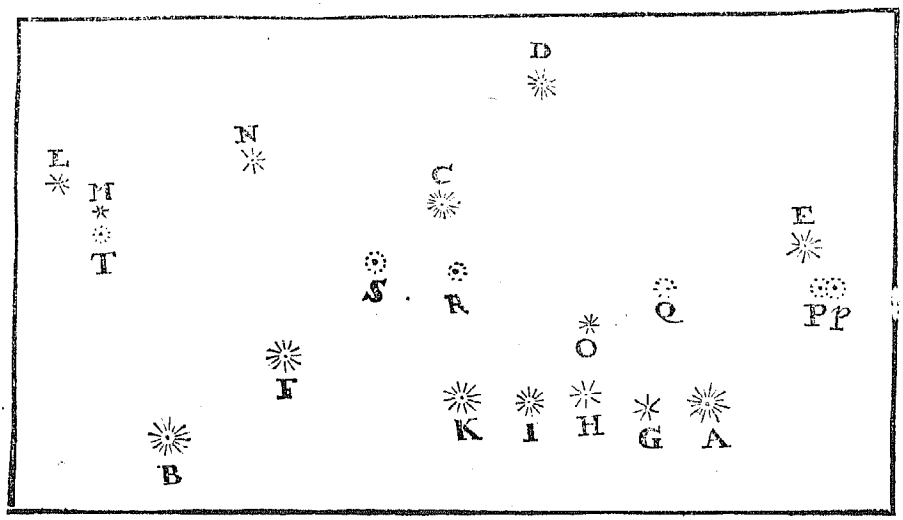
| | | Temp. appar. | Cometæ Longit. | Com. Lat. |
|---|---|---|---|---|
| | | $8^h$ . $30'$ | ♉ $26^{gr}$ . $18'$ . $17''$ | $12^{gr}$ . $46'\frac{7}{8}$ |
| *Febr.* | 25 | 8 . 15 | 27 . 4 . 24 | 12 . $36\frac{1}{3}$ |
| | 27 | 11 . 0 | 27 . 53 . 6 | 12 . $24\frac{6}{7}$ |
| *Mart.* | 1 | 8 . 0 | 28 . 12 . 27 | 12 . 20 |
| | 2 | 11 . 30 | 29 . 20 . 51 | 12 . $3\frac{1}{2}$ |
| | 5 | 8 . 30 | ♊ 0 . 43 . 4 | 11 . $45\frac{7}{8}$ |
| | 9 | | | |

Hæ Observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis

&

De Mundi Systemate

& positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* o) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$,




*DI* $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{4}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{6}CD$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{1}{13}AE$, major quam $\frac{1}{14}AE$, adeoque æqualis $\frac{3}{14}AE$ proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantiæ Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{3}pE$.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}AE$, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}AE$, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}AE$, seu $\frac{8}{39}AE$ quamproxime. A perpendiculo autem a stella $A$ ad rectam $PE$ demisso, distantia Cometæ erat $\frac{3}{5}PE$.

Die ⊙is, *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ P.M. Cometæ in $Q$ existentis distantia a stella $O$ æquabat distantiam stellarum $O$ & $H$, & recta $QO$ producta transibat inter stellas $K$ & $B$. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die ♂tis, *Mart* 1, hor. 11. P.M. Cometa in $R$ existens, stellis $K$ & $C$ accurate interjacebat, & rectæ $CRK$ pars $CR$ paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{8}CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{16}CR$ seu $\frac{16}{47}CK$.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P.M. Cometæ existentis in $S$, distantia a stella $C$ erat $\frac{4}{9}FC$ quamproxime. Distantia stellæ $F$ a recta $CS$ producta erat $\frac{1}{24}FC$; & distantia stellæ $B$ ab eadem recta, erat quintuplo major quam distantia stellæ $F$. Item recta $NS$ producta transibat inter stellas $H$ & $I$, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ $H$ quam stellæ $I$.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. P.M. Cometa existente in $T$, recta $MT$ æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta $LT$ producta transibat inter $B$ & $F$, quadruplo vel quintuplo propior $F$ quam $B$, auferens a $BF$ quintam vel sextam ejus partem versus $F$. Et $MT$ producta transibat extra spatium $BF$ ad partes stellæ $B$, quadruplo propior existens stellæ $B$ quam stellæ $F$. Erat $M$ stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & $L$ stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum $A$ & $B$ distantia esset $2^{gr.}\ 6'.46''$, & stellæ $A$ longitudo ♉ $26^{gr.}\ 41'.50''$ & latitudo borealis $12^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$, stellæque $B$ longitudo ♉ $28^{gr.}\ 40'.24''$ & latitudo borealis $11^{gr.}\ 17'\frac{2}{10}$;) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultima *Mart.* 9. ubi positiones stellarum minus accurate determinare potui. *Cassinus* qui ascensionem rectam Cometæ eodem tempore observavit, declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine

De Mundi Systemate

motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *Sμ* 9503, *iλ* 413: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, X 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in ☋ & ascendentem in ♈ 1 gr. 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 gr. 20′⅓; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo 8 gr. 38′, & esse in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine australi 7 gr. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, arearnque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 100000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. P. M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16⅔ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

| | Distant. Cometæ a Sole | Long. Collect. | Lat. Collect. | Long. Obs. | Lat. Obs. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | gr. ′ | gr. ′ | gr. ′ | gr. ′ | | |
| *Dec.* 12 | 2792 | ♍ 6 . 32 | 8 . 18½ | ♍ 6 . 31⅓ | 8 . 26 | + 1 | − 7½ |
| 29 | 8403 | ♓ 13 . 13⅔ | 28 . 0 | ♓ 13 . 11¾ | 28 . 10½ | + 2 | −10½ |
| *Febr.* 5 | 16669 | ♉ 17 . 0 | 15 . 29⅔ | ♉ 16 . 59⅞ | 15 . 27⅔ | + 0 | + 2¼ |
| *Mar.* 5 | 21737 | 29 . 19¼ | 12 . 4 | 29 . 20⅙ | 12 . 3½ | − 1 | + ½ |

Postea vero *Halleius* noster Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in ☋ & ♈ 1 gr. 53′, & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61 gr. 20′⅓, ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: distantiam vero Perihelii

helii a Nodo ascendente, in Orbita Cometæ mensuratam, invenit esse 9 gr. 20′, & Latus rectum Parabolæ esse 243 partium, existente mediocri Solis a Terra distantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

| Tempus verum | | Distantia Cometæ a ☉ | Long. comp. | Lat. comp. | Errores in Long. | Errores in Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | d. h. ″ | | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | | |
| *Dec.* | 12. 4.46. 0 | 28028 | ♍ 6.29.25 | 8.26. 0 Bor. | −1.56 | +0. 0 |
| | 21. 6.36.59 | 61076 | ♒ 5. 6.30 | 21.43.20 | −1. 8 | −2.10 |
| | 24. 6.17.52 | 70008 | 18.48.20 | 25.22.40 | −0.50 | −0.44 |
| | 26. 5.20.44 | 75576 | 28.22.45 | 27. 1.36 | −1.21 | +0.39 |
| | 29. 8. 3. 2 | 84021 | ♓ 13.12.40 | 28.10.10 | +0.55 | +0. 5 |
| | 30. 8.10.26 | 86661 | 17.40. 5 | 28.11.20 | +1. 0 | +0. 8 |
| *Jan.* | 5. 6. 1.38 | 101440 | ♈ 8.49.49 | 26.15.15 | +0.39 | −0.11 |
| | 9. 7. 0.53 | 110959 | 18.44.36 | 24.12.54 | +1.18 | +0.12 |
| | 10. 6. 6.10 | 113162 | 20.41. 0 | 23.44.10 | +0. 3 | +0.10 |
| | 13. 7. 8.55 | 120000 | 26. 0.21 | 22.17.30 | +0.47 | −0. 6 |
| | 25. 7.58.42 | 145370 | ♉ 9.33.40 | 17.57.55 | −2. 8 | +1. 1 |
| | 30. 8.21.53 | 155303 | 13.17.41 | 16.42. 7 | −1.55 | +1.10 |
| *Feb.* | 2. 6.34.51 | 160951 | 15.11.11 | 16. 4.15 | −2.37 | +2.13 |
| | 5. 7. 4.41 | 166686 | 16.58.25 | 15.29.13 | −1.27 | +1.50 |
| | 25. 8.19. 0 | 202570 | 26.15.46 | 12.48. 0 | −2.31 | +1. 8 |
| *Mar.* | 5.11.21. 0 | 216205 | 29.18.35 | 12. 5.40 | −2.16 | +2.10 |

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus mensis stylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuariæ* in *Anglia*, visus fuit in ♍ 12½ cum latitudine boreali 2 gr. circiter. Crassissima fuit hæc Observatio: meliores sunt quæ sequuntur.

*Nov.* 17, st. vet. *Ponthæus* & socii hora sexta matutina *Romæ* (id est, hora 5, 10′ *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam observarunt in ♎ 8. 30′, cum latitudine australi 0 gr. 40′. Extant eorum Observationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & observationes suas in Epistola ad *D. Cassinum* misit, Cometam eadem hora vidit in ♎ 8 gr. 30′ cum latitudine australi 0 gr. 30′. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in ♎ 8 gr. sine latitudine.

*Nov.* 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id est, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in ♎ 13 gr. 30′ cum latitudine australi 1 gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5, 9′ *Londini*) Cometam vidit in medio inter stellas

duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in Virginis auſtrali manu, & altera eſt extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12. 46′, cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* in Latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id eſt *Londini* hora matutina 9. 44′) Cometa viſus eſt prope ♎ 14, cum latitudine auſtrali 1 gr. 30′, uti a *Cl. Halleio* accepi.

*Nov.* 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat a Spica ♍ quaſi 2 gr. Boreazephyrum verſus. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa diſtabat a Spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula *Jamaica*, Cometa diſtabat a Spica intervallo quaſi gradus unius. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo, quod hora 9. 44′. *Londini*, Cometa erat in ♎ 18 gr. 40′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 18′ circiter. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ gr. hora quinta matutina (id eſt, hora 10ª *Londini*) Cometam vidit ſupra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¼ gr. Obſervator idem, eadem hora diei ſequentis, Cometam vidit quaſi 2 gr. inferiorem Spica. Congruent hæ obſervationes cum obſervationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, ſi modo diſtantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore ſuperior eſſet Spica ♍, altitudine 1 gr. circiter, ac die poſteriore inferior eadem ſtella, altitudine perpendiculari 3 gr. 40′.

*Nov.* 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta matutina *Venetiis* (id eſt, hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 gr., cum latitudine auſtrali 1 gr. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat Cometa a Spica ♍, 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 gr. 24′ circiter.

*Nov.* 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7¼ Cometam obſervarunt in ♎ 27 gr. 50′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 16′; *Angо* hora quinta matutina in ♎ 27 gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27 gr. 51′. Eodem die in Inſula *Jamaica*, Cometa viſus eſt prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id eſt, 2 gr. 2′.

*Nov.* 22. Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 2. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id eſt, 1 gr. 30′. Eodem die *Londini*, hora

hora mat. $6\frac{1}{2}$ *Hookius* noſter Cometam vidit in ♏ $3^{gr.}$ $30'$ circiter, idque in linea recta quæ tranſit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus Cordis Leonis, interpoſito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ $3^{gr.}$ $46'$, in angulo $2^{gr.}$ $51'$. Et ſi Cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ $3^{gr.}$, ejus latitudo fuiſſet $2^{gr.}$ $26'$. Sed cum Cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque $1^{gr.}$ $30'$ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam $1^{gr.}$ $30'$. Inter limites autem jam conſtitutos $2^{gr.}$ $26'$ & $1^{gr.}$ $30'$, magnitudine mediocri latitudo erit $1^{gr.}$ $58'$ circiter. Cauda Cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a Stella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & Cauda Æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione Solis boream verſus.

*Nov.* 24. Ante ortum Solis Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ $12^{gr.}$ $52'$, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam $2^{gr.}$ $38'$. Hæc latitudo uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam $1^{gr.}$ $58'$; & magnitudine mediocri, abſque notabili errore, ſtatui poteſt $2^{gr.}$ $18'$. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & Obſervator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ.

Jam collatis Obſervationibus inter ſe, colligere videor quod Cometa hoc menſe circulum fere maximum deſcripſit, ſecantem Eclipticam in ♍ 25. 12′, idque in angulo $3^{gr.}$ $12'$ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in auſtrum, tribus ſaltem

tem gradibus declinasse dicit. Et cognita cursus positione, longitudines Cometæ ex observationibus collectæ, ad incudem jam revocari possunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in sequentibus. *Cellius* Novemb. 17. observavit distantiam Cometæ a Spica ♍, æqualem esse distantiæ ejus a stella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus est Cometa in intersectione hujus circuli quem Cometa motu apparente descripsit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter distat, atque adeo in ♎ 7 gr. 54′, cum latitudine australi 43′. Præterea *Montenarus*, *Novemb.* 20. hora sexta matutina *Venetiis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus distantiam a Spica; dicitque hanc distantiam, vix æquasse distantiam stellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc est 3 gr. & 30′ vel 32′. Sit igitur distantia Cometæ a Spica 3 gr. 30′, & Cometa locabitur in ♎ 22 gr. 48′, cum latitudine australi 1 gr. 30′. Adhæc *Montenarus*, *Novemb.* 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & semiminuta diviso & vitris Telescopicis armato, distantias mensuravit Cometæ a Spica 8 gr 28′, 13 gr. 10′, 23 gr. 30′, & 28 gr. 13′: & has distantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuisse in ♎ 27 gr. 51′, ♏ 2 gr. 33′, ♏ 12 gr. 52′ & ♏ 17 gr. 45′. Si distantiæ illæ per refractiones corrigantur, & ex distantiis correctis differentiæ longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in ♎ 27 gr. 52′, ♏ 2 gr. 36′, ♏ 12 gr. 58′ & ♏ 17 gr. 53′ circiter. Latitudines autem ad has longitudines in via Cometæ captas, prodeunt 1 gr. 45′, 1 gr. 58′, 2 gr. 22′ & 2 gr. 31′. Harum quatuor observationum horas matutinas *Montenarus* non posuit. Priores duæ ante horam sextam, posteriores (ob viciniam Solis) post sextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex observatione *Montenari* locatur in ♏ 2 gr. 36′, *Hookius* noster eundem locavit in ♏ 3 gr. 30′ ut supra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in excessu errasse videntur. Nam Cometa, ex serie observationum, jam fuit in ♏ 2 gr. 56′ vel ♏ 3 gr. circiter.

Observationum suarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* suspectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id est, *Novem.* 25) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in ♏ 15 gr. 47′, cum latitudine australi quasi gradus unius. Sed *Cellius* observavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum stella lucida in dextro femore

Vir-

Virginis & cum Lance auſtrali Libræ, & hæc linea ſecat viam Cometæ in ♏ 18 gr. 36′. *Ponthæus* etiam eodem tempore obſervavit, quod Cometa erat in recta tranſeunte per Chelam auſtrinam Scorpii & per ſtellam quæ Lancem borealem ſequitur: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 16 gr. 34′. Obſervavit etiam, quod Cometa erat in recta tranſeunte per ſtellam ſupra Lancem auſtralem Libræ & ſtellam in principio pedis ſecundi Scorpii: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 17 gr. 55′. Et inter longitudines ex his tribus Obſervationibus ſic derivatas, longitudo mediocris eſt ♏ 17 gr. 42′, quæ cum obſervatione *Montenari* ſatis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in ♏ 15 gr. 47′, per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et ſimilibus Azimuthorum & Altitudinum obſervationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in ♏ 20 & ♏ 24 diebus duobus ſequentibus, ubi ſtellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ ſunt hæ obſervationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum ſemiſſe.

Ex omnibus autem Obſervationibus inter ſe collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproxime deſcripſiſſe.

| Temp. med. ſt. vet. | | | Long. Cometæ | | Lat. Cometæ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | d. | h. | gr. | ′ | gr. | ′ |
| *Nov.* | 16 | 17 . 10 | ♐ 8 | 0 | 0.44 | Auſt. |
| | 17 | 17 . 10 | 12 | 52 | 1. 0 | |
| | 18 | 21 . 44 | 18 | 40 | 1.18 | |
| | 19 | 17 . 10 | 22 | 48 | 1.30 | |
| | 20 | 17 fere | 27 | 52 | 1.45 | |
| | 21 | 17 fere | ♑ 2 | 56 | 1.58 | |
| | 23 | $17\frac{1}{4}$ fere | 12 | 58 | 2.20 | |
| | 24 | $17\frac{1}{2}$ fere | 17 | 53 | 2.29 | |
| | 26 | 18 . 00 | 26 vel 27 gr. | | 2.42 | |

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita ſe habent.

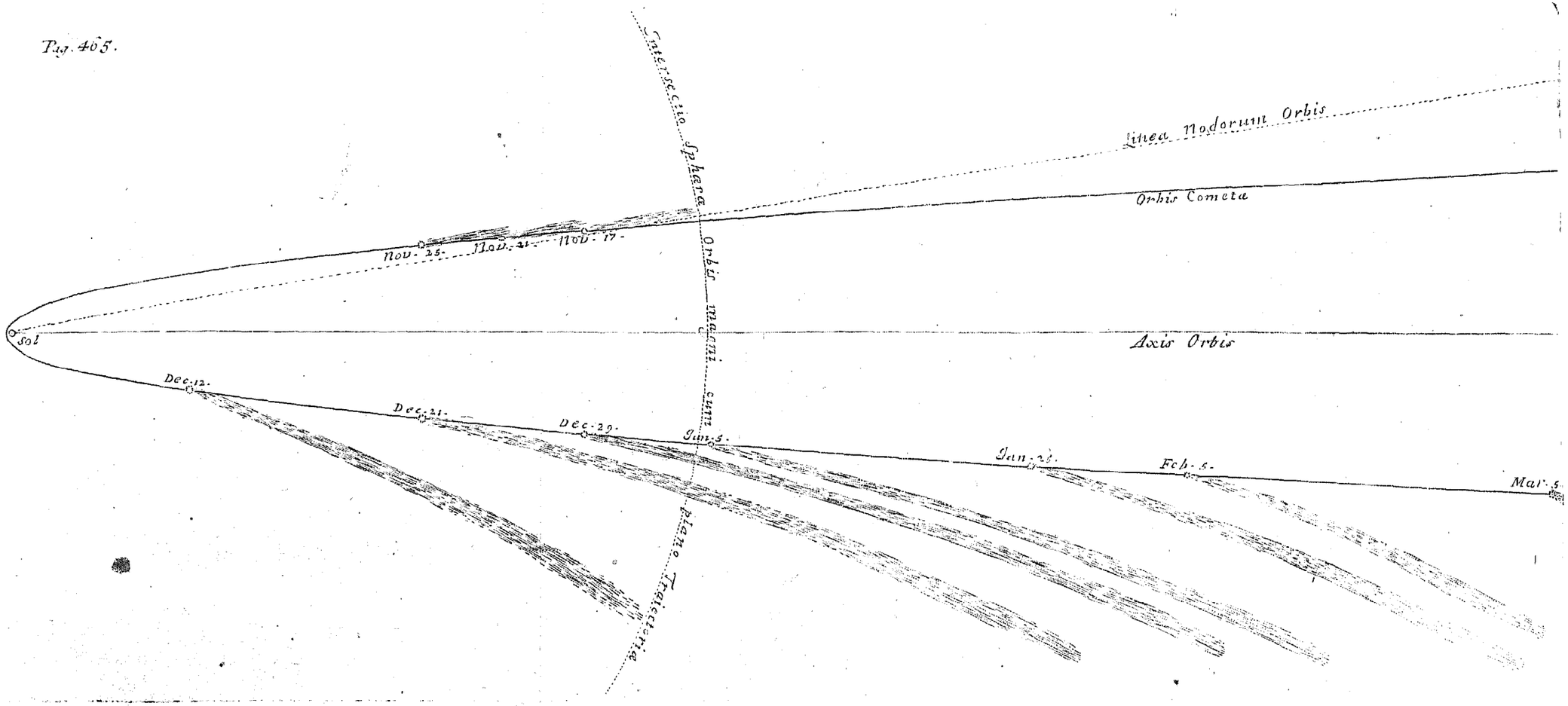
| Temp. verum | | | Diſt. Com. a ☉ | Long. comp. | | | Lat. comp. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | d. | h. | | gr. | ′ | ″ | gr. | ′ | ″ |
| *Nov.* | 16 | 17 . 0 | 83920 | ♐ 8 | 0 | 25 | 0.43 | 20 | Auſt. |
| | 18 | 21 . 34 | 78020 | 18 | 41 | 50 | 1.17 | 30 | |
| | 20 | 16 . 50 | 73012 | 27 | 59 | 40 | 1.44 | 25 | |
| | 23 | 17 . 5 | 64206 | ♑ 13 | 19 | 15 | 2.21 | 8 | |
| | 26 | 17 . 0 | 54799 | 26 | 46 | 30 | 2.42 | 30 | |

Con-

De Mundi Systemate

Congruunt igitur Obſervationes Aſtronomicæ, tam menſe *Novembri* quam menſibus quatuor ſequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuiſſe, qui menſe *Novembri* ad Solem deſcendit, & menſibus ſequentibus ab eodem aſcendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuiſſe quamproxime. Menſibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Obſervationes hujus Cometæ ſunt ſatis accuratæ, congruunt eædem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam obſervationes Planetarum congruere ſolent cum eorum Theoriis. Menſe *Novembri*, ubi obſervationes ſunt craſſæ, errores non ſunt majores quam qui craſſitudini obſervationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis ſecuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab Ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in ſeptentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per ſigna fere novem, a Virginis ſcilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum, præter ſignum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris*, deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis obſervationibus Aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera. Cometa tamen ſub finem motus deviabat aliquantulum ab hac Trajectoria Parabolica verſus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem menſe *Februario* & *Martio* conſpirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico

Tab. 465.


Sol
Nov. 25.
Nov. 21.
Nov. 17.
Dec. 12.
Dec. 21.
Dec. 29.
Jan. 5.
Jan. 23.
Feb. 5.
Mar. 5.
Linea Nodorum Orbis
Orbis Cometæ
Axis Orbis
Orbis magni
Planeta Transeuntis

liptico circum Solem movebatur, ſpatio annorum pluſquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & Caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Obſervationibus ſequentibus in Cauda definienda adhibitis.

*Nov.* 17 Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18 Cauda 30 gr. longa, Solique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam δ, quæ tunc erat in ♍ 9 gr. 54′. *Nov.* 19 in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10 Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♐ 19½ gr. cum latitudine boreali 34¼ gr. circiter. *Dec.* 11 ſurgebat ad uſque caput Sagittæ (*Bayero*, α, β,) deſinens in ♐ 26 gr. 43′, cum latitudine boreali 38 gr. 34′. *Dec.* 12 tranſibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4 gr., cum latitudine boreali 42½ gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra Cygni Uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a Stella illa 2 gr 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22 gr. cum latitudine boreali 61 gr. *Dec.* 21 ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♓ 24 gr. cum latitudine 47½ gr. *Dec.* 29 tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54 gr. adeoque deſinebat in ♉ 19 gr. cum latitudine 35 gr. *Jan.* 5 tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta Obſervationes noſtras) longa erat 40 gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

De Mundi Systemate

octo. *Jan.* 13 Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione stellæ $\varkappa$ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo Solem & Cometam ungente erat $3^{gr.}$ 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr.}$. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10 Caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7 se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideoque cum distantia Cometæ a centro Solis *Decemb.* 8 ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis

entis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari. Liber Tertius.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea Menſe *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ e Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius a capite Cometæ in Terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem a capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa, demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum Aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis evane-

evaneſcunt, Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♐ $8^{gr.}\ 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}\ 6'$, Sole exiſtente in ♒ $18^{gr.}\ 26'$. Et Cometa Anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♐ $8^{gr.}\ 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr.}\ 40'$, Sole etiam exiſtente in ♒ $18^{gr.}\ 26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis

planis Orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus a Sole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit a quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed a capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitionibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapo-

De Mundi systemate

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam Aqua ejuſdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejuſdem eſt ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, ſi aſcendatur a ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a Sole, aſcendere cœpit a capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ Orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui a tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrime peragunt ac diutiſſime conſervant. Liber Tertius.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes a Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt a ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impediti ſſimis in regionibus noſtris, a radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam a Sole aſcendere.

De Mundi Systemate

dere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem

riorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra diſtantiis, obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novemb.* 19, Cometa hicce luce ſua quantumvis plumbea & obtuſa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam

De Mundi Systemate

maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668 *Mart.* 5. St. nov. hora ſeptima veſpertina *R. P. Valentinus Eſtancius, Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda vero ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput a Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Februarii*, circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde vero & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem*

*tempore*

*tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne Solem attractione ſua nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium vero tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iiſdem Orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

## PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

### *Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.*

*Oper.* 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem Graphice inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maxime diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe a Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

*Oper.* 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

prædictis tribus Cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra:) deinde etiam Orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint $d$ & $e$, nec non tempus totum $t$ quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

*Oper.* 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint $\delta$ & $\varepsilon$, & tempus totum $\tau$ quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & $g$ ad 1 ut $d$ ad $e$, & $\gamma$ ad 1 ut $\delta$ ad $\varepsilon$; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & − probe obſervatis quærantur numeri $m$ & $n$, ea lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, $r$ & $\varrho$ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quam Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q.E.I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem Cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures Cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem Orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothesi quod sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum Phænomenis semper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum observationibus supra contuli, sed etiam ex ea Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, sed minus accurate. Ex iisdem observationibus, *Halleius* noster loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum ascendentem in ☊ 21 gr. 13′. 55″, Inclinationem Orbitæ ad planum Ecliptiæ 21 gr. 18′. 40″, distantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49 gr. 27′. 30″. Perihelium in ☌ 8 gr. 40′. 30″ cum Latitudine australina heliocentrica 16 gr. 1′. 45″. Cometam in Perihelio *Novemb.* 24d. 11h. 52′. P. M. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, stylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum observationibus, patebit ex Tabula sequente ab *Halleio* supputata.

| Temp. Appar. *Gedani* | Observata Cometæ distantia | | Loca observata | | Loca computata in Orbe | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | gr. ′ ″ | | gr. ′ ″ | | gr. ′ ″ |
| *Decemb.* 3d. 18h. 29′½ | a Corde Leonis | 46 · 24 · 20 | Long. | ♎ 7 · 1 · 0 | | ♎ 7 · 1 · 29 |
| | a Spica Virginis | 22 · 52 · 10 | Lat. aust. | 21 · 39 · 0 | | 21 · 38 · 50 |
| 4 · 18 · 1½ | a Corde Leonis | 46 · 2 · 45 | Long. | ♎ 6 · 15 · 0 | | ♎ 6 · 16 · 5 |
| | a Spica Virginis | 23 · 52 · 40 | Lat. a. | 22 · 24 · 0 | | 22 · 24 · 0 |
| 7 · 17 · 48 | a Corde Leonis | 44 · 48 · 0 | Long. | ♎ 3 · 6 · 0 | | ♎ 3 · 7 · 33 |
| | a Spica Virginis | 27 · 56 · 40 | Lat. a. | 25 · 22 · 0 | | 25 · 21 · 40 |
| 17 · 14 · 43 | a Corde Leonis | 53 · 15 · 15 | Long. | ♌ 2 · 56 · 0 | | ♌ 2 · 56 · 0 |
| | ab Humero Orionis dext. | 45 · 43 · 30 | Lat. a. | 49 · 25 · 0 | | 49 · 25 · 0 |
| 19 · 9 · 25 | a Procyone | 35 · 13 · 50 | Long. | ♊ 28 · 40 · 30 | | ♊ 28 · 43 · 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 52 · 56 · 0 | Lat. a. | 45 · 48 · 0 | | 45 · 46 · 0 |
| 20 · 9 · 53½ | a Procyone | 40 · 49 · 0 | Long. | ♊ 13 · 3 · 0 | | ♊ 13 · 5 · 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 40 · 4 · 0 | Lat. a. | 39 · 54 · 0 | | 39 · 53 · 0 |
| 21 · 9 · 9½ | ab Hum. dext. Orionis | 26 · 21 · 25 | Long. | ♊ 2 · 16 · 0 | | ♊ 2 · 18 · 30 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 29 · 28 · 0 | Lat. a. | 33 · 41 · 0 | | 33 · 39 · 40 |
| 22 · 9 · 0 | ab Hum. dext. Orionis | 29 · 47 · 0 | Long. | ♉ 24 · 24 · 0 | | ♉ 24 · 27 · 0 |
| | a Lucid. Mandib. Ceti | 20 · 29 · 30 | Lat. a. | 27 · 45 · 0 | | 27 · 46 · 0 |
| 26 · 7 · 58 | a Lucida Arietis | 23 · 20 · 0 | Long. | ♉ 9 · 0 · 0 | | ♉ 9 · 2 · 28 |
| | ab Aldebaran | 26 · 44 · 0 | Lat. a. | 12 · 36 · 0 | | 12 · 34 · 13 |

Temp.

| Temp. Appar. *Gedani* | Obſervata Cometæ diſtantia | | Loca obſervata | | Loca computata in Orbe. |
|---|---|---|---|---|---|
| d. h. ′ | | gr. ′ ″ | | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ |
| 27 . 6 . 45 | a Lucida Arietis | 20 • 45 • 0 | Long. ♉ | 7 . 5 . 40 | ♉ 7 • 8 • 54 |
| | ab Aldebaran | 28 • 10 • 0 | Lat. a. | 10 . 23 . 0 | 10 • 23 • 13 |
| 28 . 7 . 39 | a Lucida Arietis | 18 • 29 • 0 | Long. ♉ | 5 . 24 . 45 | ♉ 5 • 27 • 52 |
| | a Palilicio | 29 • 37 • 0 | Lat. a. | 8 . 22 . 50 | 8 • 23 • 37 |
| 31 . 6 . 45 | a Cing. Androm. | 30 • 48 • 10 | Long. ♉ | 2 . 7 . 40 | ♉ 2 • 8 • 20 |
| | a Palilicio | 32 • 53 • 30 | Lat. a. | 4 . 13 . 0 | 4 • 16 • 25 |
| *Jan.* | a Cing. Androm. | 25 • 11 • 0 | Long. ♈ | 28 . 24 . 47 | ♈ 28 • 24 • 0 |
| 7 . 7 . 37½ | a Palilicio | 37 • 12 • 25 | Lat. bor. | 0 . 54 . 0 | 0 • 53 • 0 |
| 24 . 7 . 29 | a Palilicio | 40 • 5 • 0 | Long. ♈ | 26 . 29 . 15 | ♈ 26 • 28 • 50 |
| | a Cing. Androm. | 20 • 32 • 15 | Lat. bor. | 5 . 25 . 50 | 5 • 26 • 0 |
| *Mar.* | Cometa ab *Hookio* prope ſecundam Arietis obſervabatur, *Mar.* 1d. 7h. 0′ *Londini*, cum | | Long. ♈ | 29 . 17 . 20 | ♈ 29 • 18 • 20 |
| 1 . 8 . 6 | | | Lat. bor. | 8 . 37 . 10 | 8 • 36 • 12 |

Apparuit hic Cometa per menſes tres, ſignaque fere ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, Theoria a principio ad finem cum obſervationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta prima ab angulo inter Nodum aſcendentem & Perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit, & inde demonſtratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam 83gr. 11′; Perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; Diſtantia perihelia a Sole 56020, exiſtente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

| 1683 Temp. Æquat. | Locus Solis | Cometæ Long. Comp. | Lat. Bor. Comp. | Cometæ Long. Obſ. | Lat. Bor. Obſer. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. ′ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Jul.* 13.12.55 | ♌ 1. 2.30 | ♋ 13. 5.42 | 29.28.13 | ♋ 13. 6.42 | 29.28.20 | + 1. 0 | + 0. 7 |
| 15.11.15 | 2.53.12 | 11.37.48 | 29.34. 0 | 11.39.43 | 29.34.50 | + 1.55 | + 0.50 |
| 17.10.20 | 4.45.45 | 10. 7. 6 | 29.33.30 | 10. 8.40 | 29.34. 0 | + 1.34 | + 0.30 |
| 23.13.40 | 10.38.21 | 5.10.27 | 28.51.42 | 5.11.30 | 28.50.28 | + 1. 3 | − 1.14 |
| 25.14. 5 | 12.35.28 | 3.27.53 | 24.24.47 | 3.27. 0 | 28.23.40 | − 0.53 | − 1. 7 |
| 31. 9.42 | 18. 9.22 | ♊ 27.55. 3 | 26.22.52 | ♊ 27.54.24 | 26.22.25 | − 0.39 | − 0.27 |
| 31.14.55 | 18.21.53 | 27.41. 7 | 26.16.57 | 27.41. 8 | 26.14.50 | + 0. 1 | − 2. 7 |
| *Aug.* 2.14.56 | 20.17.16 | 25.29.32 | 25.16.19 | 25.28.46 | 25.17.28 | − 0.46 | + 1. 9 |
| 4.10.49 | 22. 2.50 | 23.18.20 | 24.10.49 | 23.16.55 | 24.12.19 | − 1.25 | + 1.30 |
| 6.10. 9 | 23.56.45 | 20.42.23 | 22.47. 5 | 20.40.32 | 22.49. 5 | − 1.51 | + 2. 0 |
| 9.10.26 | 26.50.52 | 16. 7.57 | 20. 6.37 | 16. 5.55 | 20. 6.10 | − 2. 2 | − 0.27 |
| 15.14. 1 | ♍ 2.47.13 | 3.30.48 | 11.37.33 | 3.26.18 | 11.32. 1 | − 4.30 | − 5.32 |
| 16.15.10 | 3.48. 2 | 0.43. 7 | 9.34.16 | 0.41.55 | 9.34.13 | − 1.12 | − 0. 3 |
| 18.15.44 | 5.45.33 | ♉ 24.52.53 | 5.11.15 Auſtr. | ♉ 24.49. 5 | 5. 9.11 Auſtr. | − 3.48 | − 2. 4 |
| 22.14.44 | 9.35.49 | 11. 7.14 | 5.16.53 | 11. 7.12 | 5.16.50 | − 0. 2 | − 0. 3 |
| 23.15.52 | 10.36.48 | 7. 2.18 | 8.17. 9 | 7. 1.17 | 8.16.41 | − 1. 1 | − 0.28 |
| 26.16. 2 | 13.31.10 | ♈ 24.45.31 | 16.38. 0 | ♈ 24.44. 0 | 16.38.20 | − 1.31 | + 0.20 |

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21$^{gr.}$ 16′. 30″. Inclinatio Orbitæ ad planum Ecliptícæ 17$^{gr.}$ 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2$^{gr.}$ 52′. 50″. Diſtantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4$^{d.}$ 7$^{h.}$ 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

| 1682 Temp. Appar | Locus Solis | Cometæ Long. Comp. | Lat. Bor. Comp. | Cometæ Long. Obſ. | Lat. Bor. Obſerv. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. ′ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Aug.* 19.16.38 | ♍ 7. 0. 7 | ♌ 18.14.28 | 25.50. 7 | ♌ 18.14.40 | 25.49.55 | − 0.12 | + 0.12 |
| 20.15.38 | 7.55.52 | 24.46.23 | 26.14.42 | 24.46.22 | 26.12.52 | + 0. 1 | + 1.50 |
| 21. 8.21 | 8.36.14 | 29.37.15 | 26.20. 3 | 29.38. 2 | 26.17.37 | − 0.47 | + 2.26 |
| 22. 8. 8 | 9.33.55 | ♍ 6.29.53 | 26. 8.42 | ♍ 6.30. 3 | 26. 7.12 | − 0.10 | + 1.30 |
| 29. 8.20 | 16.22.40 | ♎ 12.37.54 | 18.37.47 | ♎ 12.37.49 | 18.34. 5 | + 0. 5 | + 3.42 |
| 30. 7.45 | 17.19.41 | 15.36. 1 | 17.26.43 | 15.35.18 | 17.27.17 | + 0.43 | − 0.34 |
| *Sept.* 1. 7.33 | 19.16. 9 | 20.30.53 | 15.13. 0 | 20.27. 4 | 15. 9.49 | + 3.49 | + 3.11 |
| 4. 7.22 | 22.11.28 | 25.42. 0 | 12.23.48 | 25.40.58 | 12.22. 0 | + 1. 2 | + 1.48 |
| 5. 7.32 | 23.10.29 | 27. 0.46 | 11.33. 8 | 26.59.24 | 11 33.51 | + 1.22 | − 0.43 |
| 8. 7.16 | 26. 5.58 | 29.58.44 | 9.26.46 | 29.58.45 | 9.26.43 | − 0. 1 | + 0. 3 |
| 9. 7.26 | 27. 5. 9 | ♍ 0.44.10 | 8.49.10 | ♍ 0.44. 4 | 8.48.25 | + 0. 6 | + 0.45 |

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur,

De Mundi Systemate

hibentur, quam ſolent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera tranſverſa & Apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, deſcripſit Orbem cujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat 17gr. 2′. Perihelium erat in ♒ 2gr. 16′, & diſtantia perihelia a Sole erat 58680, exiſtente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa ſpatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}:75\times75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad diſtantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi Cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc Orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole diſtantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iiſdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis ſuis ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa Cometæ qui altius deſcendunt, adeoque tardiſſime moventur in Apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a Sole in Perihelio ſuo quam parte ſexta diametri Solis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam Atmoſphæræ Solis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari poteſt & ſubinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare. Decreſcente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardeſcent, & creſcente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augebitur. Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* & cum hodiernis, *Halleius* noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod ſciam deprehendit.

## *SCHOLIUM GENERALE.*

Hypotheſis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in eadem diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cælorum partes, quod fieri non poteſt niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere noſtro, ſolam aeris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc

De Mundi Systemate

Vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cæleſtium quæ ſunt ſupra atmoſphæram Terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis, ſecundum leges ſupra expoſitas, perpetuo revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minime potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis Mechanicis; ſiquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cælorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerrime & facillime tranſeunt, & in Apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutius morantur, quam longiſſime diſtant ab invicem, & ſe mutuo quam minime trahunt. Elegantiſſima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non niſi conſilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi Stellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum; hæc omnia ſimili conſilio conſtructa, ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux Fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux Solis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, ſed ut univerſorum Dominus; & propter dominium ſuum Dominus Deus * παντοκράτωρ dici ſolet. Nam *Deus* eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & *Deitas* eſt dominatio Dei non in corpus proprium, ſed in ſervos. *Deus ſummus* eſt Ens æternum, infinitum, abſolute perfectum; ſed Ens utcunque perfectum ſine dominio, non eſt *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus, Deus veſter, Deus Iſraelis:* ſed non dicimus *Æternus meus, Æternus veſter, Æternus Iſraelis*; non dicimus *Infinitus meus, Infinitus veſter, Infinitus Iſraelis*; non dicimus *Perfectus meus, Perfectus veſter, Perfectus Iſraelis*. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox *Deus* paſſim ſignificat *Dominum*, ſed omnis Dominus non eſt Deus. Dominatio Entis ſpiritualis *Deum* conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione vera ſequitur, Deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe vel ſumme perfectum.

* Id eſt, *Imperator univerſalis.*

fectum. *Æternus* eſt & *Infinitus*, *Omnipotens* & *Omniſciens*, id eſt, durat ab æterno in æternum & adeſt ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoſcit quæ fiunt aut ſciri poſſunt. Non eſt æternitas vel infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio vel ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique durationem & ſpatium, æternitatem & infinitatem conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam nuſquam*. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo * continentur & moventur univerſa, ſed abſque mutua *paſſione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentia Dei. Deum ſummum neceſſario exiſtere in confeſſo eſt: Et eadem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi & agendi; ſed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, ſic nos ideam non habemus modorum quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus Subſtantia minime cognoſcimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum ſonos, tangimus tantum ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores; Intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nulla actione reflexa cognoſcimus, & multo minus ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ſuas & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras, & cauſas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim ſine dominio, providentia, & cauſis finalibus, nihil aliud eſt quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad *Philoſophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita ſentiebant veteres, *Aratus* in Phænom: ſub initio. *Paulus* in Act. 7. 27, 28. *Moſes* Deut. 4. 39 & 10. 14. *David* Pſal. 139. 7, 8. *Solomon* Reg. 8. 27. *Job.* 22. 12. *Jeremias* Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per Vim gravitatis expoſui, ſed cauſam Gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc Vis a cauſa aliqua quæ penetrat ad uſque centra Solis

De Mundi Systemate

& Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ,) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicata ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas, & recedendo a Sole decreſcit accurate in duplicata ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modo Aphelia illa quieſcant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & Hypotheſes ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophia Experimentali* locum non habent. In hac Philoſophia Propoſitiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod Gravitas revera exiſtat, & agat ſecundum leges a nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & a cerebro in muſculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monſtrari debent.

*F I N I S.*

*Pag.* 478, *lin.* 25, *lege:* duodecim minuta ſecunda.

# INDEX RERUM
## ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ ſunt ad normam ſequentis Exempli.* III, 10: 444, 20: 471, 28 *deſignant Libri tertii Propoſitionem decimam: Paginæ* 444^ta *lineam* 20^am: *Paginæ* 471^am *lineam* 28^am.


A.

Æquinoctiorum præceſſio
  cauſæ hujus motus indicantur III, 21
  quantitas motus ex cauſis computatur III, 39
Aeris
  denſitas ad quamlibet altitudinem colligitur ex Prop. 22. Lib. II. quanta ſit ad altitudinem unius ſemidiametri Terreſtris oſtenditur 470, 11
  elaſtica vis quali cauſæ tribui poſſit II, 23
  gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3
  reſiſtentia quanta ſit, per Experimenta Pendulorum colligitur 286, 28; per Experimenta corporum cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13
Anguli contactus non ſunt omnes ejuſdem generis, ſed alii aliis infinite minores p. 32
Apſidum motus expenditur I, Sect. 9
Areæ quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, deſcribunt, conferuntur cum temporibus deſcriptionum, I, 1, 2, 3, 58, 65
Attractio corporum univerſorum demonſtratur III, 7; qualis ſit hujus demonſtrationis certitudo oſtenditur 358, 28: 484, 11
Attractionis cauſam vel modum nullibi definit Author 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Cæli
  reſiſtentia deſtituuntur III, 10: 444, 20: 471, 28; & propterea Fluido omni corporeo 328, 18
  tranſitum Luci præbent abſque ulla refractione 467, 33
Calore virga ferrea comperta eſt augeri longitudine 386, 4
Calor Solis quantus ſit in diverſis a Sole diſtantiis 466, 20
  quantus apud Mercurium 372, 12
  quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio verſantem 466, 22
Centrum commune gravitatis corporum plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis p. 17
Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.
Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu annuo percurrit Orbem magnum 376, 6 quibus intervallis diſtat a Terra & Luna 430, 22
Centrum Virium quibus corpora revolventia in Orbibus retinentur
  quali Arearum indicio invenitur 38, 14
  qua ratione ex datis revolventium velocitatibus invenitur I, 5
Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum deſcribi poteſt a corpore revolvente I, 4, 7, 8
Cometæ
  Genus ſunt Planetarum, non Meteororum 444, 24: 466, 15
  Luna ſuperiores ſunt, & in regione Planetarum verſantur p. 439
  Diſtantia eorum qua ratione per Obſervationes colligi poteſt quamproxime 439, 21
  Plures obſervati ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito; & unde hoc fiat 444, 5
  Splendent luce Solis a ſe reflexa 444, 4; Lux illa quanta eſſet ſolet 441, 12
  Cinguntur Atmoſphæris ingentibus 442, 12: 444, 27
  Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum minores eſſe exiſtimantur 475, 7
  Quo fine non comprehenduntur Zodiaco (more Planetarum) ſed in omnes cælorum regiones varie feruntur 480, 30
  Poſſunt aliquando in Solem incidere & novum illi alimentum ignis præbere 480, 37
  Uſus eorum ſuggeritur 473, 1: 481, 7


Come-

Cometarum caudæ
avertuntur a Sole 468, 39
maximæ ſunt & fulgentiſſimæ ſtatim poſt tranſitum per viciniam Solis 467, 8
inſignis earum raritas 470, 32
origo & natura earundem 442, 19: 467, 13
quo temporis ſpatio a capite aſcendunt 471, 1
Cometæ
Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus, & radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales. Et quidem in Ellipſibus moventur ſi in Orbem redeunt, hæ tamen Parabolis erunt maxime finitimæ III, 40
Trajectoria Parabolica ex datis tribus Obſervationibus invenitur III, 41; Inventa corrigitur III, 42
Locus in Parabola invenitur ad tempus datum 445, 30: I, 30
Velocitas cum velocitate Planetarum confertur 445, 17
Cometa annorum 1664 & 1665
Hujus motus obſervatus expenditur, & cum Theoria accurate congruere deprehenditur p. 477
Cometa annorum 1680 & 1681
Hujus motus obſervatus cum Theoria accurate congruere invenitur p. 455 & ſeqq.
Videbatur in Ellipſi revolvi ſpatio annorum pluſquam quingentorum 464, 37
Trajectoria illius & Cauda ſingulis in locis delineantur p. 465
Cometa anni 1682
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 479
Comparuiſſe viſus eſt anno 1607, iterumque rediturus videtur periodo 75 annorum 480, 6
Cometa anni 1683
Hujus motus accurate reſpondet Theoriæ p. 478
Curvæ diſtinguuntur in Geometrice rationales & Geometrice irrationales 100, 5
Curvatura figurarum qua ratione æſtimanda ſit 235, 28: 398, 33
Cycloidis ſeu Epicycloidis
rectificatio I, 48, 49: 142, 18
Evoluta I, 50: 142, 22
Cylindri attractio ex particulis trahentibus compoſiti quarum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 1

D.

Dei Natura p. 482 & 483
Deſcenſus gravium in vacuo quantus ſit, ex longitudine Penduli colligitur 379, 1
Deſcenſus vel Aſcenſus rectilinei ſpatia deſcripta, tempora deſcriptionum & velocitates acquiſitæ conferuntur, poſita cujuſcunque generis vi centripeta I, Sect. 7
Deſcenſus & Aſcenſus corporum in Mediis reſiſtentibus II, 3, 8, 9, 40, 13, 14

E.

Ellipſis
qua lege vis contripetæ tendentis ad centrum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 10, 64
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
Fluidorum denſitas & compreſſio quas léges habent, oſtenditur II, Sect. 5
Fluidorum per foramen în vaſe factum effluentium determinatur motus II, 36
Fumi in camino aſcenſus obiter explicatur 472, 4

G.

Graduum in Meridiano Terreſtri menſura exhibetur, & quam ſit exigua inæqualitas oſtenditur ex Theoria III, 20
Gravitas
diverſi eſt generis a vi Magnetica 368, 29
mutua eſt inter Terram & ejus partes 22, 18
ejus cauſa non aſſignatur 483, 34
datur in Planetas univerſos 365, 15; & pergendo a ſuperficiebus Planetarum ſurſum decreſcit in duplicata ratione diſtantiarum a centro III, 8, deorſum decreſcit in ſimplici ratione quamproxime III, 9
datur in corpora omnia, & proportionalis eſt quantitati materiæ in ſingulis III, 7
Gravitatem eſſe vim illam qua Luna retinetur in Orbe III, 4, computo accuratiori comprobatur 430, 25
Gravitatem eſſe vim illam qua Planetæ primarii & Satellites Jovis & Saturni retinentur in Orbibus III, 5

H.

Hydroſtaticæ principia traduntur II, Sect. 5
Hyperbola
qua lege vis centrifugæ tendentis a figuræ centro deſcribitur a corpore revolvente 47, 26
qua lege vis centrifugæ tendentis ab umbilico figuræ deſcribitur a corpore revolvente 51, 6
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 12
Hypotheſes cujuſcunque generis rejiciuntur ab hac Philoſophia 484, 8.

I.

Inertiæ vis definitur p. 2
Jovis
  diſtantia a Sole 361, 1
  ſemidiameter apparens 371, 3
  ſemidiameter vera 371, 14
  attractiva vis quanta ſit 370, 33
  pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
  denſitas 371, 37
  quantitas materiæ 371, 27
  perturbatio a Saturno quanta ſit 375, 33
  diametrorum proportio computo exhibetur 381, 27
  converſio circum axem quo tempore abſolvitur 381, 25
  cingulæ cauſa ſubindicatur 444. 32.

L.

*Locus definitur*, & diſtinguitur in abſolutum & relativum 6, 12
Loca corporum in Sectionibus conicis motorum inveniuntur ad tempus aſſignatum I, Sect. 6
Lucis
  propagatio non eſt inſtantanea 207, 5; non fit per agitationem Medii alicujus Ætherei 342, 36
  velocitas in diverſis Mediis diverſa I, 95
  reflexio quædam explicatur I, 96
  refractio explicatur I, 94; non fit in puncto ſolum incidentiæ 207, 29
  incurvatio prope corporum terminos Experimentis obſervata 207, 8
Lunæ
  corporis figura computo colligitur III, 38
  inde cauſa patefacta, cur eandem ſemper faciem in Terram obvertat 432, 9
  & librationes explicantur III, 17
  diameter mediocris apparens 430, 12
  diameter vera 430, 17
  pondus corporum in ejus ſuperficie 430, 20
  denſitas 430, 15
  quantitas materiæ 430, 19
  diſtantia mediocris a Terra quot continet maximas Terræ ſemidiametros 430, 25, quot mediocres 431, 18
  parallaxis maxima in longitudinem paulo major eſt quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8
  vis ad Mare movendum quanta ſit III, 37; non ſentiri poteſt in Experimentis pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque 430, 1
  tempus periodicum 430, 32
  tempus revolutionis ſynodicæ 398, 1
  motus medius cum diurno motu Terræ collatus paulatim accelerari deprehenditur ab *Halleio* 481, 16
Lunæ motus & motuum inæqualitates a cauſis ſuis derivantur III, 22: p. 421 & ſeqq.
  tardius revolvitur Luna dilatato Orbe, in perihelio Terræ; citius in aphelio, contracto Orbe III, 22: 421, 6
  tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Apogæi Syzygiis cum Sole; citius in Quadraturis Apogæi, contracto Orbe 422, 1
  tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Syzygiis Nodi cum Sole; citius in Quadraturis Nodi, contracto Orbe 422, 21
  tardius movetur in Quadraturis ſuis cum Sole, citius in Syzygiis; & radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore minorem in priore caſu, majorem in poſteriore III, 22: Inæqualitas harum Arearum computatur III, 26. Orbem inſuper habet magis curvum & longius a Terra recedit in *priore caſu, minus curvum habet* Orbem & propius ad Terram accedit in poſteriore III, 22. Orbis hujus figura & proportio diametrorum ejus computo colligitur III, 28. Et ſubinde proponitur methodus inveniendi diſtantiam Lunæ a Terra ex motu ejus horario III, 27
  Apogæum tardius movetur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
  Apogæum ubi eſt in Solis Syzygiis, maxime progreditur; in Quadraturis regreditur III, 22: 422, 37
  Eccentricitas maxima eſt in Apogæi Syzygiis cum Sole, minima in Quadraturis III, 22: 422, 39
  Nodi tardius moventur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
  Nodi quieſcunt in Syzygiis ſuis cum Sole, & velociſſime regrediuntur in Quadraturis III, 22. Nodorum motus & inæqualitates motuum computantur ex Theoria Gravitatis III, 30, 31, 32, 33
  Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima eſt in Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in Quadraturis I, 66 Cor. 10. Inclinationis variationes computantur ex Theoria Gravitatis III, 34, 35
Lunarium motuum Æquationes ad uſus Aſtronomicos p. 421 & ſeqq.
  Motus medii Lunæ
    Æquatio annua 421, 4
    Æquatio ſemeſtris prima 422, 1
    Æquatio ſemeſtris ſecunda 422, 21
    Æquatio centri prima 423, 20: p. 101 & ſeqq.
    Æquatio centri ſecunda 424, 15
    Variatio prima III, 29
    Variatio ſecunda 425, 5

Motus medii Apogæi
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio semestris 422, 37
Motus medii Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris III, 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio semestris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo stabilienda sit per Observationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 13: 271, 25: 368, 29: 431, 23
Maris æstus a causis suis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
distantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Materiæ
quantitas definitur p. 1
vis insita seu vis inertiæ definitur p. 2
vis impressa definitur p. 2
extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiæ, gravitas, qua ratione innotescunt 357, 16: 484, 10
divisibilitas nondum constat 358, 18
Materia subtilis *Cartesianorum* ad examen quoddam revocatur 292, 12
Materia vel subtilissima Gravitate non destituitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonstrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
distantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Methodus
Rationum primarum & ultimarum I, Sect. 1
Transmutandi figuras in alias quæ sunt ejusdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
Serierum convergentium adhibetur ad solutionem Problematum difficiliorum p. 127: 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 1
Motus absolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem secerni possunt, exemplo demonstratur p. 10
Motus Leges p. 12 & seqq.
Motuum compositio & resolutio p. 14
Motus corporum congredientium post reflexionem, quali Experimento recte colligi possunt, ostenditur 19, 21
Motus corporum
in Conicis sectionibus eccentricis I, Sect. 3
in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciprocus I, Sect. 10
Motus corporum viribus centripetis se mutuo petentium I, Sect. 11
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14
Motus corporum quibus resistitur
in ratione velocitatis II, Sect. 1
in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
corporum sola vi insita progredientium in Mediis resistentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 1
corporum recta ascendentium vel descendentium in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
corporum projectorum in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
corporum circumgyrantium in Mediis resistentibus II, Sect. 4
corporum Funependulorum in Mediis resistentibus II, Sect. 6
Motus & resistentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis seu Vorticosus Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex causis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium constructioni Propositio non inutilis 300, 4.

O.

Opticarum ovalium inventio quam *Cartesius* celaverat I, 97. *Cartesiani* Problematis generalior solutio I, 98
Orbitarum inventio
quas corpora describunt, de loco dato data cum velocitate, secundum datum rectam egressa; ubi vis centripeta est reciproce ut quadratum distantiæ & vis illius quantitas absoluta cognoscitur I, 17
quas corpora describunt ubi vires centripetæ sunt reciproce ut cubi distantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
quas corpora viribus quibuscunque centripetis agitata describunt I, Sect. 8.

P.

Parabola, qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ, describitur a corpore revolvente I, 13
Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.
Pendulorum isochronorum longitudines diversæ in diversis locorum Latitudinibus inter se conferuntur, tum per Observationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20
Philosophandi Regulæ p. 357
Planetæ
non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21
Primarii
Solem cingunt 360, 7
moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis III, 13
radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13
temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquiplicata ratione distantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15
retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis quæ respicit Solem, & est reciproce ut quadratum distantiæ ab ipsius centro III, 2, 5
Secundarii
moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22
radiis ad Primarios suos ductis describunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22
temporibus periodicis revolvuntur quæ sunt in sesquiplicata ratione distantiarum a Primariis suis 359, 3, 22: III, 22 & I, 15
retinentur in Orbibus suis a vi Gravitatis quæ respicit Primarios, & est reciproce ut quadratum distantiæ ab eorum centris III, 1, 3, 4, 5
Planetarum
distantiæ a Sole 361, 1
Orbium Aphelia & Nodi prope quiescunt III, 14
Orbes determinantur III, 15, 16
loca in Orbibus inveniuntur I, 31
densitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7
conversiones diurnæ sunt æquabiles III, 17
axes sunt minores diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur III, 18
Pondera corporum
in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus distantiis ab eorum centris, sunt ut quantitates materiæ in corporibus III, 6
non pendent ab eorum formis & texturis 367, 35
in diversis Terræ regionibus inveniuntur & inter se comparantur III, 20
Problematis
*Kepleriani* solutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31
*Veterum* de quatuor lineis, a *Pappo* memorati, a *Carteſio* par calculum Analyticum tentati, compositio Geometrica 70, 19
Projectilia, seposita Medii resistentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29
Projectilium motus in Mediis resistentibus II, 4, 10
Pulsuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla seu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fistularum sonis æquari duplis longitudinibus Fistularum verosimile est 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non potest per finitos terminos I, Lem. 28. p. 98
Qualitates corporum qua ratione innotescunt & admittuntur 357, 16
Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Resistentiæ quantitas
in Mediis non continuis II, 35
in Mediis continuis II, 38
in Mediis cujuscunque generis 302, 32
Resistentiarum Theoria confirmatur
per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p. 284
per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319
Resistentia Mediorum
est ut eorundem densitas, cæteris paribus 290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14
est in duplicata ratione velocitatis corporum quibus resistitur, cæteris paribus 219, 24: 284, 33; II, 33, 35, 38: 324, 23
est in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus resistitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38: Sch. p. 319
non minuitur ab actione Fluidi in partes posticas corporis moti 312, 23
Resistentia Fluidorum duplex est; oriturque vel ab Inertia materiæ fluidæ, vel ab Elasticitate, Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1. Resistentia quæ sentitur in Fluidis fere tota est prioris generis 326, 32, & minui non potest per subtilitatem partium Fluidi, manente densitate 328, 7
Resistentiæ Globi ad resistentiam Cylindri proportio, in Mediis non continuis II, 34

Reſiſtentia quam patitur a Fluido fruſtum Conicum, qua ratione fiat minima 299, 30
Reſiſtentiæ minimæ Solidum 300, 15.

S.

Satellitis
Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
*Hugeniani* elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5
Satellitum
Jovialium tempora periodica & diſtantiæ a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & diſtantiæ a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inæquales motus a motibus Lunæ derivari poſſe oſtenditur III, 23
Saturni
diſtantia a Sole 361, 1
ſemidiameter apparens 371, 9
ſemidiameter vera 371, 14
vis attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
perturbatio a Jove quanta ſit 375, 16
diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8
Sectiones Conicæ, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum, deſcribuntur a corporibus revolventibus 58, 20
Sectionum Conicarum deſcriptio Geometrica
ubi dantur Umbilici I, Sect. 4
ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5. ubi dantur Centra vel Aſymptoti 87, 9
Seſquiplicata ratio definitur 31, 40
Sol
circum Planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12
ſemidiameter ejus mediocris apparens 371, 12
ſemidiameter vera 371, 14
parallaxis ejus horizontalis 370, 33
parallaxis menſtrua 376, 4
vis ejus attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas ejus 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
vis ejus ad perturbandos motus Lunæ 363, 15: III, 25
vis ad Mare movendum III, 36
Sonorum
natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
propagatio divergit a recto tramite 332, 9, fit per agitationem Aeris 343, 1
velocitas computo colligitur 343, 8, paululum major eſſe debet Æſtivo quam Hyberno tempore, per Theoriam 344, 11
ceſſatio fit ſtatim ubi ceſſat motus corporis ſonori 344, 29
augmentatio per tubos ſtenterophonicos 344, 32
Spatium
abſolutum & relativum p. 6, 7
non eſt æqualiter plenum 368, 16
Sphæroidis attractio, cujus particularum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 21
Spiralis quæ ſecat radios ſuos omnes in angulo dato, qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis deſcribi poteſt a corpore revolvente, oſtenditur I, 9: II, 15, 16
Spiritum quendam corpora pervadentem & in corporibus latentem, ad plurima naturæ phænomena ſolvenda, requiri ſuggeritur 484, 17
Stellarum fixarum
quies demonſtratur 376, 18
radiatio & ſcintillatio quibus cauſis referendæ ſint 467, 38
Stellæ Novæ unde oriri poſſint 481, 5
Subſtantiæ rerum omnium occultæ ſunt 483, 22

T.

Tempus abſolutum & relativum p. 5, 7
Temporis Æquatio Aſtronomica per Horologium oſcillatorium & Eclipſes Satellitum Jovis comprobatur 7, 15
Tempora periodica corporum revolventium in Ellipſibus, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 15
Terræ
dimenſio per *Picartum* 378, 11, per *Caſſinum* 378, 21, per *Norwoodum* 378, 28
figura invenitur, & proportio diametrorum, & menſura graduum in Meridiano III, 19, 20
altitudinis ad Æquatorem ſupra altitudinem ad Polos quantus ſit exceſſus 381, 7: 387, 1
ſemidiameter maxima, minima & mediocris 387, 10
globus denſior eſt quam ſi totus ex Aqua conſtaret 372, 31
globus denſior eſt ad centrum quam ad ſuperficiem 386, 1
molem indies augeri veroſimile eſt 473, 18: 481, 13
axis nutatio III, 21
motus annuus in Orbe magno demonſtratur III, 12, 13: 478, 26
Eccentricitas quanta ſit 421, 15
Aphelii motus quantus ſit 376, 33.

V.

Vacuum datur, vel ſpatia omnia (ſi dicantur eſſe plena) non ſunt æqualiter plena 328, 18: 368, 25

Velocitas maxima quam Globus, in Medio resistente cadendo, potest acquirere II, 38, Cor. 2
Velocitates corporum in Sectionibus conicis motorum, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 16
Veneris
distantia a Sole 361, 1
tempus periodicum 370, 23
Aphelii motus 376, 33
Virium compositio & resolutio p. 14
Vires attractivæ corporum
sphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compositorum, expenduntur I, Sect. 12
non sphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compositorum, expenduntur I, Sect. 13
Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ quanta sit 379, 22
Vis centripeta definitur p. 2
quantitas ejus absoluta definitur p. 4
quantitas acceleratrix definitur p. 4
quantitas motrix definitur p. 4
proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua ratione colligenda sit, ostenditur 40, 1
Virium centripetarum inventio, ubi corpus in spatio non resistente, circa centrum immobile, in Orbe quocunque revolvitur I, 6: I, Sect. 2 & 3
Viribus centripetis datis ad quodcunque punctum tendentibus, quibus Figura quævis a corpore revolvente describi potest; dantur vires centripetæ ad aliud quodvis punctum tendentes, quibus eadem Figura eodem tempore periodico describi potest 44, 3
Viribus centripetis datis quibus Figura quævis describitur a corpore revolvente; dantur vires quibus Figura nova describi potest, si Ordinatæ augeantur vel minuantur in ratione quacunque data, vel angulus Ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico 47, 28
Viribus centripetis in duplicata ratione distantiarum decrescentibus, quænam Figuræ describi possunt, ostenditur 53, 1 : 150, 8
Vi centripeta
quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in data quavis coni sectione 45, 1
quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in Hyperbola 202, 26
Umbra Terrestris in Eclipsibus Lunæ augenda est, propter Atmosphæræ refractionem 425, 27
Umbræ Terrestris diametri non sunt æquales; quanta sit differentia ostenditur 387, 8
Undarum in aquæ stagnantis superficie propagatarum velocitas invenitur II, 46
Vorticum natura & constitutio ad examen revocatur II, Sect. 9: 481, 21
*Ut.* Hujus voculæ significatio Mathematica definitur 30, 19.

*FINIS.*

# CORRIGENDA.

PAG. 3, *lin.* 14 *lege*, Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major &c. *P.* 7, *l.* 8 *lege*, ut ex veriore tempore menſurent motus &c. *P.* 15, *l.* 16 *lege*, lineam *pH* in plana, &c. *P.* 17, *l.* 20 *lege*, centri corporis tertii &c. *P.* 41, *l.* 3 *lege*, ſunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & ☋; &c. *P.* 44, *l.* 23 *lege*, rectangulo $☋R \times \overline{RN + ☋N}$ &c. *P.* 47. *l. penult. lege*, in Abſciſſa poſitum tendentes a binis quibuſvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correſpondentibus Abſciſſarum punctis inſiſtentes, augentur vel &c. *P.* 54, *l.* 4 *lege*, ut area $☋T \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in &c. *P.* 57, *l.* 25 *lege*, Nimirum ſi ea ſit corporis &c. *P.* 61, *l.* 12 *lege*, ita ut ſit $GA$ ad $AS$ & $Ga$ ad $aS$ ut eſt $KB$ ad $BS$, & axe &c. *l.* 15 *lege*, & cum ſit $GA$ ad $AS$ ut $Ga$ ad $aS$, erit diviſim $Ga - GA$ ſeu $Aa$ ad $aS - AS$ ſeu $SH$ in eadem &c. *P.* 87, *l.* 7 *lege*, per Probl. XIV. &c. *P.* 89 & *P.* 90 *in figura jungatur FD.* *P.* 92 *in figura jungantur FG & HI.* *P.* 136, *l.* 2 *lege*, perimetrum *BP* &c. *P.* 166, *l.* 8 *lege*, motus uterque erit ut tempus periodicum corporis &c. *P.* 233, *l. ult. lege*, $+2QRo^3 +$ &c. *P.* 244, *l.* 22 *lege*, $\frac{2nn - 2n}{n - 2} VG$.

*P.* 317, *l. penult. lege*, velocitatem illam maximam *H*, &c. *P.* 367, *l.* 14 *lege*, eccentricitas foret &c. *P.* 379, *l.* 13 & 23 *lege*, vim centrifugam corporum &c. *P.* 415, *l.* 11 *lege*, Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus Nodorum. *P.* 415, *l.* 15 *lege*, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; &c.